Лекция 17 февраля (первая половина)

Категория $\mathcal{C}$ аналог ассоциативной (матричной) алгебры

стрелки категории ⟷ элементы алгебры

$X \to Y$ ⟷ матричный элемент в позиции (Y, X)

Функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ аналоги гомоморфизмов алгебр

$A \xrightarrow{\varphi} B$ гомоморфизм алгебр задаёт на B структуру A-модуля

$a.b := \varphi(a)b \in B$

Если есть функтор $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \mapsto FX \xrightarrow{F\varphi} FY$$

Стрелки категории $\mathcal{C}$ действуют левыми умножениями на стрелки категории $\mathcal{D}$,

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \\ & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Естественное преобразование f из F в G
(функториальные) морфизмы функторов

[это аналог гомоморфизма $\mathcal{C}$-модулей]

это набор морфизмов $f_X : F(X) \to G(X)$

по одному для каждого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ с таким свойством: $\forall \varphi : X \to Y$ в $\mathcal{C}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F\varphi"] \arrow[d, "f_X"] & F(Y) \arrow[d, "f_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G\varphi"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

(в $\mathcal{D}$)

коммутативна. $f_Y \circ F(\varphi) = G(\varphi) f_X$

мод. стр-ра задаваемая на $\mathcal{D}$ ф-ром F

модульная стр-ра задав. на $\mathcal{D}$ функтором G

Примеры: $F, G : \Delta_S^{opp} \to Sets$

два триангулированных пр-ва

$[n] \longrightarrow F_n$ наборы n-мерных

G_n симплексов Δ^n

$[n] \xrightarrow{\varphi} [m]$

$\varphi : \Delta^n \to \Delta^m$

$$\begin{tikzcd}
F_m \arrow[r] \arrow[d, "x"'] & F_n \arrow[d, "\varphi^* x"] \\
G_m \arrow[r] & G_n
\end{tikzcd}$$

$$\frac{\bigsqcup_n F_n \times \Delta^n}{\text{соотн. связей}} \qquad \frac{\bigsqcup_n G_n \times \Delta^n}{\text{соотн. связей}}$$

Естественное преобразование — это непрерывное отображение топологических пр-в, сохраняющее триангуляции:

симплекс → симплекс с уважением правил связей

Морфизм предпучков и топологическом пр-ве

$F : U(X)^{op} \to Set$

$G : U(X)^{op} \to Set$

$U \subset X \longrightarrow F(U) \xrightarrow[f_U]{} G(U)$

$U \subset W$

$$\begin{tikzcd}
F(W) \arrow[r, "f_W"'] \arrow[d, "res"] & G(W) \arrow[d, "res"] \\
F(U) \arrow[r, "f_U"'] & G(U)
\end{tikzcd}$$

Функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ образуют "категорию" морфизмами в которой служат естественные преобразования. [кавычки можно убрать, если категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ малые].

$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ - категория функторов.

Функторы F и G изоморфны, если $\exists$ естественные преобразования $f: F \to G$ $g: G \to F$: $fg = \mathrm{Id}$ $gf = \mathrm{Id}$
$(\forall x \ f_x g_x = \mathrm{Id}_x \quad g_x f_x = \mathrm{Id}_x)$.

Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ наз. эквивалентными если $\exists$ функторы $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$
$G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$

такие что $FG \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ $GF \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$

эквивалентность функторов

эквивалентность функторов

$FG(X) \neq X$ $\quad$ $GF(Y) \neq Y$

но должны быть естественные изоморфизмы

$FG(X) \rightleftarrows X$ $\quad$ $GF(Y) \rightleftarrows Y$

Пример: Vec — категория векторных

$\cup$ $\quad$ пр-в с $\dim V < \infty$

$\mathcal{C}$ — категория координатных векторных пр-в $\Bbbk^n$

полная подкатегория $\longrightarrow$

$n \in \mathbb{N} \cup 0$ $\quad$ $\Bbbk^0 = 0$

Это эквивалентные категории

Эквивалентность — это выбор базиса.

$\forall V \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Vec}$ зафиксируем изоморфизм

$f_V : V \xrightarrow{\sim} \Bbbk^n$, где $n = \dim V$

$v \mapsto$ строку координат

при $V = \Bbbk^n$ $\quad f_{\Bbbk^n} : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ это $\mathrm{Id}_{\Bbbk^n}$

$\mathcal{C} \xhookrightarrow{F} \mathrm{Vec}$ $\quad$ тавтологическое вложение

$\mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathrm{Vec}$

$$\Bbbk^{\dim V} \longleftarrow V$$

матрицу φ в выбранных базисах $\leftsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\wr"', "f_V"] & W \arrow[d, "\wr"', "f_W"] \\ \Bbbk^{\dim V} \arrow[r, "G\varphi"'] \arrow[d, phantom, "="] & \Bbbk^{\dim W} \arrow[d, phantom, "="] \\ {} & {} \end{tikzcd}$$

$$G\varphi := f_W \varphi f_V^{-1}$$

по построению все такие диаграммы коммутативны

$$\boxed{f : \mathrm{Id}_{vec} \longrightarrow FG}$$ естеств. преобр.

$$\boxed{GF : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \text{ совпадает с } \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}}$$

F и G это эквивалентность категорий

двойственность: $vec \simeq vec^{op}$.

$$\boxed{vec^{op} \to vec}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & V^* \\ W \arrow[r] & W^* \arrow[u, "\varphi^* \quad \xi \mapsto \xi\varphi"'] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\mathrm{Hom}(*,k) = h_k \qquad V \longmapsto \mathrm{Hom}(V,k)}$$

$$\exists \ \boxed{V \longrightarrow V^{**}} \quad v \longmapsto ev_v : V^* \to k$$

функториальный изоморфизм

$$ev_v(\varphi) := \varphi(v)$$

функториальный

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "ev", "\sim"'] \arrow[d, "F"] & V^{**} \arrow[d, "F^{**}"] \\ W \arrow[r, "\sim", "ev"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

Критерий эквивалентности категорий

Th: Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ является эквивалентностью $\Longleftrightarrow$ он вполне строг и по существу эпиморфен.

вполне строг: $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow[\sim]{F} \mathrm{Hom}(FX,FY)$$

биективно

по существу эпиморфен! $\forall Y \in Ob(\mathcal{D})$
$\exists X \in Ob(\mathcal{C})$:
$Y \simeq F(X)$
изоморфизм в $\mathcal{D}$

Пусть эти условия выполнены:

Надо построить функтор $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$
квазиобратный к F: $FG \simeq Id_D$
$GF \simeq Id_{\mathcal{C}}$

$\forall Y \in Ob(\mathcal{D})$ зафиксируем $X \in Ob(\mathcal{C})$
"$X(Y)$"

и изоморфизм

$$Y \xrightarrow{f_Y} F(X)$$

и положим $G(Y) = X$

$X_1 \to X_2$ стр-ка в $\mathcal{C}$

$\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, "f_{Y_1}", "\sim"'] \arrow[d, "\varphi"'] & F(X_1) \arrow[d] \\ Y_2 \arrow[r, "\sim", "f"'] & F(X_2) \end{tikzcd}$$

$$\underbrace{f_{X_2} \circ \varphi \circ f_{Y_1}^{-1}}_{\text{стрелка в } \mathcal{D}}$$

f_{Y_2}

$f D$ $\quad F : \mathrm{Hom}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y_1, Y_2)$

$F^{-1}\varphi \longrightarrow \varphi$

$\underbrace{G\varphi \in \mathrm{Mor}\, D}$ $\quad G\varphi = F^{-1}$

f_X задают естественный изоморфизм

$$\mathrm{Id}_D \longrightarrow GF$$

$$F : C \longrightarrow D$$

$$\mathrm{Hom}(X_1, X_2) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}(FX_1, FX_2) \ni f_{Y_2}\,\varphi\, f_{Y_1}^{-1}$$

$G : Y \longrightarrow X(Y)$

$Y_1 \longrightarrow X_1$

$Y_2 \longrightarrow X_2$

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_{Y_1}"] & Y_2 \arrow[d, "f_{Y_2}"] \\
FX_1 \arrow[r] & F(X_2)
\end{tikzcd}$$

$$G : \varphi \begin{array}{c} Y_1 \\ \downarrow \\ Y_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} X_1 \\ \downarrow G\varphi = F^{-1}(f_{Y_2}\,\varphi\, f_{Y_1}^{-1}) \\ X_2 \end{array}$$

$$\boxed{FG \leftarrow \mathrm{Id}}$$

$$\underline{GF = \mathrm{Id}}$$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d] \\
X_2 & X_1
\end{tikzcd}$$

$F(X_1) = FG(Y_1) \xleftarrow{f_{Y_1}} Y_1$

если на объектах $F(X) < D$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[d, "G\varphi"] & {} \arrow[d, "\varphi"] \\ F(X_2)=FG(Y_2) & Y_2 \arrow[l, "f_{Y_2}"'] \end{tikzcd}$$

положить

$f_{F(X)} = \mathrm{Id}\, F(X)$

▷

$G \circ \boxed{F(X)}$

Функторы Hom

$\forall\, X \in \mathcal{C}$ имеются функторы

$$h_X = \mathrm{Hom}(?, X) : \mathcal{C}^{opp} \longrightarrow Sets$$

$$Y \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, X)$$

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, "\varphi"] & Y_2 \arrow[d, "\xi"] \\ X_2 & X_1 \arrow[l, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

$$\varphi \rightsquigarrow \varphi^* : \mathrm{Hom}(Y_2, X) \to \mathrm{Hom}(Y_1, X)$$

$$\xi \longmapsto \xi\varphi$$

φ^* = правое умножение на стрелку φ

Сопоставление $X \longrightarrow h_X$ это ковариантный функтор $\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, Set)$

$\varphi_* : h_{X_1} \longrightarrow h_{X_2}$ ← левое умножение на стрелку φ.

$$\varphi_{*,Y} : h_{X_1}(Y) \longrightarrow h_{X_2}(Y)$$

$$\mathrm{Hom}(Y, X_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, X_2)$$

$$\xi \longrightarrow \varphi\xi$$

Симметричная версия:

$$X \longrightarrow h^X := \mathrm{Hom}(X, *) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

$$Y \longmapsto \mathrm{Hom}(Y, X).$$

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, "\varphi"] & Y_2 \\ X \arrow[u, "\xi"] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[d, "\varphi"'] & \longmapsto & \mathrm{Hom}(X, Y_1) \arrow[d, "\varphi_*"'] \\ Y_2 & & \mathrm{Hom}(X, Y_2) \end{tikzcd}$$

$$\varphi_* : \xi \longmapsto \varphi\xi$$

φ_* - левое умножение на стрелку φ.

Сопоставление $X \longmapsto h^X$ это функтор

$$\mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Set})$$

Пример: $\mathcal{C} = \Delta_S$ полусимплициальная

$$h_{[n]} : [m] \longmapsto \mathrm{Hom}_{\Delta_S}([m], [n])$$

$$\Delta_S^{op} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

Стандартная триангуляция n-мерного симплекса: $\mathrm{Hom}([m], [n])$ — множество всех m-мерных граней n-мерного симплекса.