Лекция 10 февраля (первая половина)

2й экзамен за 1й семестр будет
20 февраля с 10:00 до 14:00

заочно   условие — на официальном сайте.

решение послать на gorod@itep.ru
строго до 14:00

Страница курса — та же
gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/2122/list.html

math for students → этот курс

В этом семестре учитываются листки
начиная с 8-го включительно

Категории и Функторы

Определение категории Категория $\mathcal{C}$ состоит из **класса** объектов $Ob(\mathcal{C})$

$\forall$ объектов $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ задано **множество морфизмов** $Hom(X,Y)$

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

(для разных пар объектов эти множества не пересекаются)

$$Mor(\mathcal{C}) = \bigsqcup_{X,Y \in Ob \times Ob} Hom(X,Y)$$

это тоже класс

$\forall X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[rr, dashed, bend right] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

задано отображение композиции

$$Hom(Y,Z) \times Hom(X,Y) \longrightarrow Hom(X,Z)$$
$$(\varphi, \psi) \longmapsto \varphi \circ \psi \quad (= \varphi\psi)$$

которы ассоциативны: $(\varphi\psi)\chi = \varphi(\psi\chi)$ всякий раз, когда обе части определены.

$\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ $\exists$ **тождественный морфизм**

$Id_X :\quad \varphi \circ Id_X = \varphi \qquad Id_X \circ \psi = \psi$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "Id"] \arrow[r, "\varphi"] & {} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {} \arrow[r] & X \arrow[loop right, "Id_X"] \end{tikzcd}$$

Эта стрелка автоматически единственная

$$Id'_X = Id'_X \circ Id''_X = Id''_X$$

Категория наз. малой, если $Ob(\mathcal{C})$ это множество.

$\mathcal{D} < \mathcal{C}$ – это подкатегория, если $Ob\,\mathcal{D} \subset Ob(\mathcal{C})$ и все стрелки у $\mathcal{D}$ являются стрелками в $\mathcal{C}$

Примеры НЕ малых категорий

(1) Set множества и их отображения.

Множества с доп. структурой и отображения, которые структуру уважают:

Top – топологические пр-ва и непрерывные отображения

$\mathcal{G}rp$ – группы и их гомоморфизмы

$\left[\begin{array}{l} \mathcal{V}ec \text{ – векторные пространства и линейные отображения} \\ \quad \cup \\ vec \text{ – конечномерные векторные пространства} \end{array}\right.$

Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ наз полной,

если $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$

$\forall X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$

Примеры малых категорий!

M множество с предпорядком $x \leq y$

транзитивно и рефлексивно

$(x \leq y \;\; y \leq z \Rightarrow x \leq z)$, $\quad x \leq x \;\; \forall x$

$$\mathrm{Hom}(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ элемент, если } x \leq y \\ \varnothing \text{ если } x \text{ и } y \text{ не сравнимы.} \end{cases}$$

транзитивность = наличие композиции

рефлексивность = наличие Id_x $\forall x$.

X — топ. пр-во $\mathfrak{U}(X)$ — категория открытых множеств. $Ob(\mathfrak{U}(X))$ — открытые множества

$$Hom(U, W) = \begin{cases} 1 \text{ элемент, если } U \subset W \\ \varnothing \quad \text{если } U \not\subset W \end{cases}$$

предпорядок явл. порядком если $x \leq y$ $y \leq x \Rightarrow x = y$

Δ_{big} — конечные упорядоченные множества (не малая категория)

$\cup$

Δ $Ob(\Delta) = \{0, 1, \dots, n\} = [n]$

малая полная подкат.

один объект для каждого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Морфизмы — неубывающие (сохраняющие порядок) отображения

$$\varphi : [n] \longrightarrow [m]$$

$$X \longrightarrow Y$$

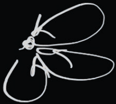
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$$

A - ассоциативная алгебра над комм. кольцом K

$\updownarrow$

категория с одним объектом

$\mathrm{Hom}(\bullet,\bullet) = A$



Из любой категории $\mathcal{C}$ и любого комм. кольца K можно изготовить K-алгебру

$K[\mathcal{C}]$ = формальные конечные линейные комбинации стрелок из $\mathcal{C}$ с к-тами в K

аналог групповой алгебры

M - множество

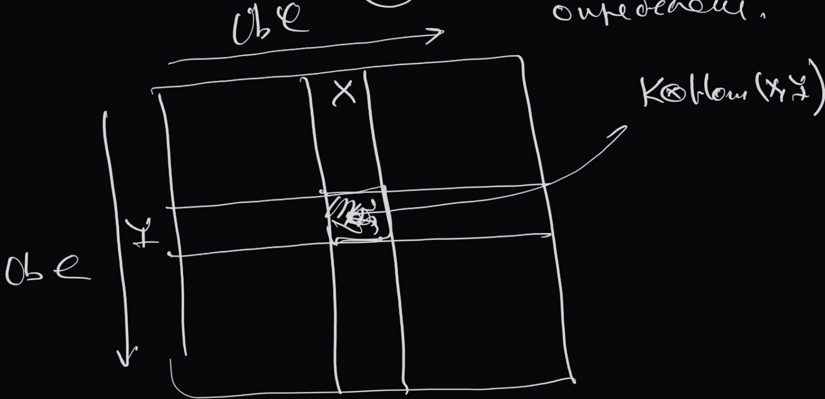
$K \otimes M \overset{\mathrm{def}}{=}$ свободный K-модуль с базисом M

$$= \left\{ \sum_{m \in M} x_m m \;\middle|\; \text{конечное число } x_m \neq 0 \right\}$$

$$K[\mathcal{C}] = \bigoplus_{X,Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} K \otimes \mathrm{Hom}(X,Y)$$

$$\sum x_\varphi \cdot \varphi \sum x_\psi \psi = \sum x_\varphi x_\psi \underline{\underline{\varphi\psi}}$$

$$\varphi\psi = \begin{cases} \varphi\circ\psi & \text{если композиция определена} \\ 0 & \text{если она не определена.} \end{cases}$$



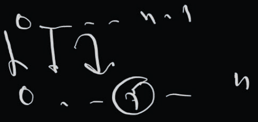
только конечное число элементов ≠ 0.

Как устроена алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$?

Δ наз. симплициальной категорией

$[0,\ldots,n]=[n]$ — комбинаторный симплекс

$\partial_i^n : [n-1] \longrightarrow [n]$ возрастающее отображение, не содержащее в образе "i"



вложение i-той грани.

$S_i^n : [n+1] \longrightarrow [n]$ сюръекция, которая склеивает точки $\underline{i}$ и $\underline{i+1}$

$Id_n : [n] \to [n]$

Факт! $\mathbb{Z}[\Delta]$ порождается этими элементами

Можно явно описать идеал соотношений?

$$\begin{array}{c} T(\partial, s) \xrightarrow{\pi} \underline{K[\Delta]} \\ \cup \\ I = \ker \end{array}$$

Стрелка α наз. инъективной, если на неё можно сокращать слева:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, hook, "\alpha"] & Y \\ {} \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & \end{tikzcd}$$

$\forall \varphi, \psi \quad \alpha\varphi = \alpha\psi \Rightarrow \varphi = \psi$

Стрелка β наз. сюръективной?
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"'] & Y \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & {} \end{tikzcd}$$
если на неё можно сокращать справа:

$$\forall \varphi, \psi \quad \varphi\beta = \psi\beta \Rightarrow \varphi = \psi.$$

Стрелки α и β
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "\alpha"] & Y \arrow[l, shift left, "\beta"] \end{tikzcd}$$
наз. взаимно-обратными,
если $\alpha\beta = Id_Y$ и $\beta\alpha = Id_X$.

Объекты наз. изоморфными, если между ними есть взаимно-обратные стрелки (такие стрелки наз. изоморфизмами).

Функтор $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ это

(1) отображение $F: Ob\mathcal{C} \to Ob\mathcal{D}$

(2) $\forall X, Y \in Ob\mathcal{C}$ задано отображение множеств $F: Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(FX,FY)$

которое является гомоморфизмом относительно композиции, т.е.

$$F(\varphi\psi) = F(\varphi)F(\psi).$$

функтор задаёт гомоморфизм алгебр

$$K[\mathcal{C}] \longrightarrow K[\mathcal{D}]$$

---

(3) $F(Id_X) = Id_{F(X)}$

Пример: Геометрическая реализация симплексов: $|\cdot| : \Delta \longrightarrow Top$

$[n] \longrightarrow \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

правильный симпл.,

||

выпуклая оболочка концов стандартных базисных векторов $e_0, \dots, e_n \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{tikzcd} {[n]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, squiggly] & {[m]} \\ \Delta^n \arrow[r, "|\varphi|"] & \Delta^m \end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$

аффинное отображение, действующее на вершины как φ.

② Тождественный функтор $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

$Id(X) = X$

$Id(\varphi) = \varphi$

③ Забывающие функторы

$\mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Set}$ (забывание

$\mathrm{Grp} \longrightarrow \mathrm{Set}$ структуры)

Функтор $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ наз. строгим

если $\forall X, Y \quad F : \mathrm{Hom}(X,Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(FX,FY)$

инъективно

разные стрелки переходят

в разные

F наз. полным если

$\forall X, Y \quad F : \mathrm{Hom}(X,Y) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(FX,FY)$

сюръективно

каждая стрелка между FX и FY

получается из стрелки $X \to Y$

вполне строгий $\overset{\mathrm{def}}{=}$ $\overset{?}{\text{полный}}$ + строгий

$F : \mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(FX,FY)$
