

### Индукцированные представления.

- А6◊1.** Пусть подгруппа  $H$  конечной группы  $G$  действует на конечномерном векторном пространстве  $V$ . Изоморфны ли друг другу индуцированное и коиндуцированное представления  $G$  на пространствах  $\mathbb{k}[G] \otimes_{\mathbb{k}[H]} V$  и  $\text{Hom}_{\mathbb{k}[H]}(\mathbb{k}[G], V)$  по правилам  $g(x \otimes v) \stackrel{\text{def}}{=} (gx) \otimes v$  и  $g\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(xg)$ ?
- А6◊2.** Выразите значение характера представления группы  $G$ , индуцированного тривиальным 1-мерным представлением подгруппы  $H$ , на классе сопряжённости  $C$  через  $[G : H]$ ,  $|C|$  и  $|C \cap H|$ .
- А6◊3.** Разложим пересечение  $C \cap H$  класса сопряжённости  $C \subset G$  с подгруппой  $H \subset G$  в объединение классов  $H$ -сопряжённости  $D_1 \sqcup D_2 \sqcup \dots \sqcup D_s$ . Выразите через  $[G : H]$ ,  $|D_i|$  и  $\chi(D_i)$  значение на  $C$  характера группы  $G$ , индуцированного характером  $\chi$  подгруппы  $H$ .
- А6◊4.** Опишите представление  $S_4$ , индуцированное а) двумерным неприводимым представлением  $S_3 = \text{Stab}(\{4\}) \subset S_4$  б) одномерным представлением 4-цикла умножением на  $i \in \mathbb{C}$  в) одномерным представлением 3-цикла умножением на  $e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$ .
- А6◊5 (аффинная группа прямой).** Пусть  $A$  — группа аффинных преобразований  $x \mapsto ax + b$  аффинной прямой  $\mathbb{A}^1$  над полем  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ . Покажите, что а)  $A = T \rtimes \mathbb{F}_p^*$ , где  $T \subset A$  — подгруппа параллельных переносов, а  $\mathbb{F}_p^* \subset A$  — подгруппа гомотетий относительно начала координат, и перечислите классы сопряжённости в  $A$  б) представление  $A$  в пространстве комплекснозначных функций на  $\mathbb{A}^1$  с нулевой суммой значений неприводимо и индуцировано одномерным представлением абелевой подгруппы  $T$  с характером  $\mathbb{F}_p \ni t \mapsto e^{2\pi it/p} \in \text{U}(1)$ , и вычислите характер этого представления в) все остальные неприводимые представления группы  $A$  одномерны
- А6◊6 (группа Гейзенберга).** Свяжем с  $n$ -мерным векторным пространством  $L$  над полем  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$  с  $p > 2$  группу Гейзенберга  $H_p^n$ , образованную тройками  $(x, u, u^*) \in \mathbb{F}_p \times L \times L^*$  с операцией  $(x_1, u_1, u_1^*) \circ (x_2, u_2, u_2^*) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x_2 + (\langle u_2^*, u_1 \rangle - \langle u_1^*, u_2 \rangle)/2, u_1 + u_2, u_1^* + u_2^*)$ , и обозначим через  $H' \simeq \mathbb{F}_p \times L \subset H_p^n$  абелеву подгруппу, образованную тройками вида  $(x, u, 0)$ . Покажите, что а)  $H_p^n$  группа и перечислите её классы сопряжённости б)  $H_p^1$  изоморфна группе верхних унитарных  $3 \times 3$  матриц над  $\mathbb{F}_p$  в) для каждого  $a \in \mathbb{F}_p^*$  комплексное представление  $W_a$  группы  $H_p^n$ , индуцированное одномерным представлением подгруппы  $H'$  с характером  $\psi_a(x, u, 0) = e^{2\pi i ax/p}$ , неприводимо, и все они различны; вычислите размерность и характер представления  $W_a$  г) все остальные неприводимые представления группы  $H_p^n$  одномерны.
- А6◊7 (группа Гейзенберга 2).** При  $p = 2$  обозначим через  $H$  группу, порождённую  $4n+4$  образующими  $\pm 1, \pm u_1, \dots, \pm u_{2n+1}$  с соотношениями  $u_i^2 = -1, u_i u_j = -u_j u_i$  и «минус на минус даёт плюс». Покажите, что а)  $H$  состоит из  $2^{2n+2}$  элементов  $\pm u_I = \pm u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k}$ , где  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  пробегает всевозможные упорядоченные подмножества в  $\{1, 2, \dots, (n+1)\}$  и  $u_\emptyset = 1$  б) элементы  $\pm u_I$ , отвечающие индексам  $I$  чётной длины, образуют в  $H$  подгруппу (она называется группой Гейзенберга  $H_2^n$ ) в)  $H_2^1$  изоморфна группе кватернионных единиц  $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$
- А6◊8.** Опишите а) центр б) классы сопряжённости в) неприводимые представления группы  $H_2^n$
- А6◊9.** Покажите, что в каждом вещественном (соотв. комплексном) конечномерном представлении конечной группы  $G$  существует  $G$ -инвариантная евклидова (соотв. эрмитова) структура.
- А6◊10\*.** Покажите, что в разложениях тензорных степеней произвольного эффективного представления конечной группы встречаются все её неприводимые представления.
- А6◊11\*.** Покажите, что каждый неодномерный неприводимый характер конечной группы зануляется хотя бы на одном классе сопряжённости.

| №  | дата сдачи | имя и фамилия принявшего | подпись принявшего |
|----|------------|--------------------------|--------------------|
| 1  |            |                          |                    |
| 2  |            |                          |                    |
| 3  |            |                          |                    |
| 4а |            |                          |                    |
| б  |            |                          |                    |
| в  |            |                          |                    |
| 5а |            |                          |                    |
| б  |            |                          |                    |
| в  |            |                          |                    |
| 6а |            |                          |                    |
| б  |            |                          |                    |
| в  |            |                          |                    |
| г  |            |                          |                    |
| 7а |            |                          |                    |
| б  |            |                          |                    |
| в  |            |                          |                    |
| 8а |            |                          |                    |
| б  |            |                          |                    |
| в  |            |                          |                    |
| 9  |            |                          |                    |
| 10 |            |                          |                    |
| 11 |            |                          |                    |