

§12. Алгебраические многообразия

Всюду в этом параграфе мы продолжаем по умолчанию считать, что основное поле \mathbb{k} алгебраически замкнуто.

12.1. Определения и примеры. Алгебраическое многообразие определяется по той же самой схеме, что и гладкое или аналитическое многообразие в дифференциальной геометрии, т. е. как топологическое пространство, каждая точка которого обладает открытой окрестностью, гомеоморфной некоторой стандартной «локальной карте», и любые две таких карты регулярным образом согласованы на их пересечении. При этом в качестве стандартных локальных карт допускаются *произвольные*¹ аффинные алгебраические многообразия, а регулярность согласования двух таких карт на их пересечении означает, что переход от одной карты к другой задаётся рациональными функциями. Точные определения таковы.

Алгебраической аффинной картой на топологическом пространстве X называется гомеоморфизм $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ какого либо аффинного алгебраического многообразия X_U с топологией Зарисского на открытое подмножество $U \subset X$ с индуцированной из X топологией. Две алгебраических аффинных карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ и $\varphi_W : X_W \xrightarrow{\sim} W$ на X называются *совместимыми*, если гомеоморфизм склейки

$$\varphi_{WU} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_W^{-1} \circ \varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(U \cap W)} : \varphi_U^{-1}(U \cap W) \xrightarrow{\sim} \varphi_W^{-1}(U \cap W),$$

отождествляющий между собою прообразы пересечения $U \cap W$ в многообразиях X_U и X_W , регулярен в том смысле, что его гомоморфизм поднятия $\varphi_{WU}^* : f \mapsto f \circ \varphi_{WU}$ является изоморфизмом алгебры определённых всюду в $\varphi_U^{-1}(U \cap W)$ рациональных функций на X_U с алгеброй определённых всюду в $\varphi_W^{-1}(U \cap W)$ рациональных функций на X_W :

$$\varphi_{WU}^* : \mathbb{k}[\varphi_W^{-1}(U \cap W)] \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}[\varphi_U^{-1}(U \cap W)].$$

Открытое покрытие $X = \bigcup U_\nu$ попарно совместимыми алгебраическими картами называется *алгебраическим атласом* на X . Два алгебраических атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также представляет собой алгебраический атлас. Топологическое пространство X , с зафиксированным на нём классом эквивалентных алгебраических атласов называется *алгебраическим многообразием*. Алгебраические многообразия, обладающие конечным атласом, называются *многообразиями конечного типа*.

ПРИМЕР 12.1 (ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА)

Проективное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$ с однородными координатами

$$x = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$$

¹В том числе *не* гладкие — такие, как крест $\text{Spec}_m(\mathbb{k}[x, y]/(xy))$

обладает алгебраическим атласом из $(n + 1)$ стандартных аффинных карт

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid x_i \neq 0\}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Обозначим через $X_i \simeq \mathbb{A}^n$ аффинное пространство с координатами¹

$$t_i = (t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}).$$

Отображение $\varphi_i : t_i \mapsto (t_{i,0} : \dots : t_{i,i-1} : 1 : t_{i,i+1} : \dots : t_{i,n})$ задаёт биекцию

$$\varphi_i : X_i \xrightarrow{\simeq} U_i, \quad (12-1)$$

в которой прообразом пересечения $U_i \cap U_j$ является главное открытое множество $\mathcal{D}(t_{i,j}) \subset X_i$. Отображение склейки $\varphi_{ji} = \varphi_j^{-1} \varphi_i : X_i \supset \mathcal{D}(t_{i,j}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{D}(t_{j,i}) \subset X_j$ действует по формуле $t_i \mapsto t_{i,j}^{-1} \cdot t_j$ и является изоморфизмом аффинных алгебраических многообразий $\mathcal{D}(t_{i,j}) = \text{Spec}_m \mathbb{k} [t_{i,j}^{-1}, t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}]$ и $\mathcal{D}(t_{j,i}) = \text{Spec}_m \mathbb{k} [t_{j,i}^{-1}, t_{j,0}, \dots, t_{j,j-1}, t_{j,j+1}, \dots, t_{j,n}]$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.1. Убедитесь в этом.

Поэтому перенос топологии Зарисского с $X_i \simeq \mathbb{A}^n$ на U_i при помощи биекции (12-1) определяет согласованные индуцированные топологии на пересечениях $U_i \cap U_j$ и корректно наделяет \mathbb{P}_n топологией, в которой все отображения (12-1) являются гомеоморфизмами.

ПРИМЕР 12.2 (ГРАССМАНИАНЫ)

Точками грассманова многообразия $\text{Gr}(k, m)$ являются k -мерные векторные подпространства в координатном векторном пространстве \mathbb{k}^m . Иначе их можно воспринимать как орбиты матриц x ранга k из k строк ширины m под действием полной линейной группы $\text{GL}_k(\mathbb{k})$ левыми умножениями. При этом орбите матрицы x отвечает линейная оболочка её строк, а подпространству — орбита матрицы, по строкам которой записаны координаты базисных векторов любого базиса этого подпространства в стандартном базисе пространства \mathbb{k}^m . Грассманиан $\text{Gr}(k, m)$ покрывается $\binom{m}{k}$ стандартными аффинными картами U_I , занумерованными строго возрастающими наборами индексов $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$. Если обозначить через $s_I(x)$ подматрицу матрицы x , образованную столбцами с номерами из I , то

$$U_I = \{x \in \text{Mat}_{k \times m}(\mathbb{k}) \mid \det s_I(x) \neq 0\}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 12.2. Убедитесь, что карта U_I состоит из всех k -мерных подпространств $W \subset \mathbb{k}^m$, которые изоморфно проектируются на k -мерную координатную плоскость, натянутую на стандартные базисные векторы e_i с $i \in I$ пространства \mathbb{k}^m ,

¹первый индекс i является номером карты, а сами координаты $t_{i,v}$ в i -той карте нумеруются вторым индексом $v \neq i$, $0 \leq v \leq n$

вдоль дополнительной $(m - k)$ -мерной координатной плоскости, натянутой на остальные базисные векторы.

Обозначим через $X_I \simeq \text{Mat}_{k \times (m-k)}(\mathbb{k}) \simeq \mathbb{A}^{k(m-k)}$ аффинное пространство всех матриц из k строк ширины $m - k$ и будем нумеровать столбцы этих матриц индексами ν из дополнительного к I набора $\hat{I} = \{1, 2, \dots, m\} \setminus I$. Отображение

$$\varphi_I : X_I \xrightarrow{\simeq} U_I, \quad (12-2)$$

превращающее $k \times (m - k)$ -матрицу $t \in X_I$ в $k \times m$ -матрицу $\varphi_I(t)$ дописываем к ней единичной $k \times k$ -матрицы в столбцы с номерами из I , биективно. Пробраз

$$\varphi_I^{-1}(U_I \cap U_J) = \mathcal{D}\left(\det s_J(\varphi_I(t))\right) \subset X_I.$$

УПРАЖНЕНИЕ 12.3. Убедитесь, что отображение склейки

$$\varphi_{JI} = \varphi_J^{-1} \varphi_I : X_I \supset \mathcal{D}\left(\det s_J(\varphi_I(t))\right) \rightarrow \mathcal{D}\left(\det s_I(\varphi_J(t))\right) \subset X_J$$

действует по формуле $t \mapsto s_J\left(s_J^{-1}(\varphi_I(t)) \cdot \varphi_I(t)\right)$ и является изоморфизмом аффинных алгебраических многообразий.

Отсюда мы как и в предыдущем примере заключаем, что грассманиан $\text{Gr}(k, n)$ является алгебраическим многообразием конечного типа. Отметим, что при $k = 1$, $m = n + 1$ проделанное только что построение превращается в построение из [прим. 12.1](#).

ПРИМЕР 12.3 (ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОГООБРАЗИЙ)

Структура алгебраического многообразия на прямом произведении алгебраических многообразий X и Y задаётся атласом, состоящим из всех попарных произведений $U \times W$ аффинных карт $U \subset X$ и $W \subset Y$ на X, Y .

12.1.1. Структурный пучок и регулярные морфизмы. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{k}$ называется *регулярной* в точке x алгебраического многообразия X , если существуют такие порывающая x аффинная карта $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\simeq} U \ni x$ и определённая в x рациональная функция $\tilde{f} \in \mathbb{k}(X_U)$, что значения $\varphi_U^* f(z) = \tilde{f}(z)$ совпадают во всех точках $z \in \text{Dom } \tilde{f}$. Функции $U \rightarrow \mathbb{k}$ на открытом подмножестве $U \subset X$, регулярные в каждой точке этого подмножества, образуют коммутативное кольцо, которое обозначается $\mathcal{O}_x(U)$ и называется *кольцом локальных регулярных функций* на U . Сопоставление $U \mapsto \mathcal{O}_x(U)$ является пучком \mathbb{k} -алгебр на топологическом пространстве X в смысле [прим. 9.8](#) на стр. 130. Он называется *структурным пучком* алгебраического многообразия X .

Отображение алгебраических многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *регулярным*, если $\forall x \in X$ и любой локальной регулярной функции $f \in \mathcal{O}_Y(W)$, определённой в какой-либо окрестности $W \ni \varphi(x)$, существует такая окрестность $U \subset \varphi^{-1}(W)$ точки x , что $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}_X(U)$. Иными словами, над каждым

открытом $U \subset Y$ гомоморфизм поднятия должен переводить локальные регулярные функции на U в локальные регулярные функции на $\varphi^{-1}(U)$, т. е. быть гомоморфизмом $\varphi^* : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$. Например, множество регулярных морфизмов $X \rightarrow \mathbb{A}^1$ совпадает с $\mathcal{O}_X(X)$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.4. Покажите, что для каждой аффинной карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ гомоморфизм подъёма $\varphi_U^* : \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}[X_U]$ отождествляет кольцо локальных регулярных на U функций с координатной алгеброй аффинного многообразия X_U .

12.1.2. Замкнутые подмногообразия. Каждое замкнутое подмножество $Z \subset X$ алгебраического многообразия X имеет естественную структуру алгебраического многообразия. А именно, для каждой аффинной карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ прообраз пересечения $\varphi_U^{-1}(Z \cap U)$ является замкнутым подмножеством в X_U , т. е. аффинным алгебраическим многообразием с координатным кольцом $\mathbb{k}[X_U]/\varphi_U^*I(Z \cap U) \simeq \mathcal{O}_X(U)/I(Z \cap U)$, где идеал $I(Z \cap U) \subset \mathcal{O}_X(U)$ состоит из всех локальных регулярных на U функций¹, тождественно нулю на $Z \cap U$. Аффинные карты $\varphi_U^{-1}(Z \cap U) \xrightarrow{\sim} Z \cap U \subset Z$ образуют алгебраический атлас на Z . Сопоставление $U \mapsto I(Z \cap U)$ является подпучком идеалов в структурном пучке \mathbb{k} -алгебр \mathcal{O}_X . Он называется *пучком идеалов* замкнутого подмногообразия $Z \subset X$ и обозначается $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_X$. В этой ситуации пишут, что $Z = V(\mathcal{I}_Z)$.

Регулярный морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *замкнутым вложением*, если его образ $\varphi(X) \subset Y$ является замкнутым подмногообразием и φ устанавливает изоморфизм между X и $\varphi(X)$. В частности, алгебраическое многообразие X тогда и только тогда допускает замкнутое вложение в аффинное пространство, когда оно является аффинным алгебраическим многообразием в смысле п° 11.1 на стр. 160, т. е. является множеством нулей системы полиномиальных уравнений в аффинном пространстве.

ПРИМЕР 12.4 (СЕМЕЙСТВА ПОДМНОГООБРАЗИЙ)

Каждый регулярный морфизм $\pi : X \rightarrow Y$ может восприниматься как семейство замкнутых подмногообразий $X_y = \pi^{-1}(y) \subset X$, параметризованное точками $y \in Y$. Если $\pi : X \rightarrow Y$, $\pi' : X' \rightarrow Y$ — два семейства с одной и той же базой, то регулярный морфизм $\varphi : X \rightarrow X'$ называется *морфизмом семейств*², если он переводит X_y в X'_y для каждого $y \in Y$, т. е. если $\pi = \pi' \circ \varphi$. Семейство $\pi : X \rightarrow Y$ называется *постоянным* или *тривиальным*, если оно изоморфно над Y прямому произведению $\pi_Y : X_0 \times Y \rightarrow Y$ для некоторого многообразия X_0 .

12.1.3. Отделимость. Стандартный атлас на \mathbb{P}_1 состоит из двух карт

$$\varphi_i : \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} U_i \subset \mathbb{P}_1, \quad i = 0, 1.$$

¹ср. с упр. 12.4

²или морфизмом над Y

Их пересечение видно внутри каждой из них как дополнение к началу координат:

$$\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) = \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = \{t \in \mathbb{A}^1 \mid t \neq 0\}.$$

Карты склеены по этому пересечению посредством отображения склейки

$$\varphi_{01} : t \mapsto 1/t. \quad (12-3)$$

Если вместо этого отображения воспользоваться тождественным отображением

$$\tilde{\varphi}_{01} : t \mapsto t, \quad (12-4)$$

получится другое многообразие — «прямая с раздвоенной точкой»:

$$\text{-----} : \text{-----} .$$

Такая патология называется *неотделимостью*. Причина её возникновения в том, что правило склейки (12-4) «не замкнуто»: его можно «продолжить по непрерывности» с $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ на всё $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.

В общем случае явление (не)отделимости формализуется так. Включения

$$U_0 \hookrightarrow U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_1$$

задают вложение $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_0 \times U_1$, образ которого является пересечением аффинной карты $U_0 \cap U_1 \subset X \times X$ с диагональю $\Delta = (x, x) \subset X \times X$. Правило (12-3) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \setminus 0) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t, t^{-1})$ и отождествляет пересечение $U_0 \cap U_1 \simeq (U_0 \times U_1) \cap \Delta$ с замкнутым подмножеством в $U_0 \times U_1 \simeq \mathbb{A}^2$ — а именно, с гиперболой $xy = 1$. Правило (12-4) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \setminus 0) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t, t)$. Образ этого вложения не замкнут в $U_0 \times U_1 \simeq \mathbb{A}^2$ — он получается выкидыванием начала координат из диагонали $x = y$.

Алгебраическое многообразие X называется *отделимым*, если для любой пары аффинных карт U, W на X образ канонического вложения $U \cap W \hookrightarrow U \times W$ замкнут, или, что то же самое, если диагональ $\Delta \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Например, \mathbb{A}^n и \mathbb{P}^n отделимы, поскольку диагонали в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ и в $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ задаются, соответственно, уравнениями $x_i = y_i$ и $x_i y_j = x_j y_i$. Замкнутое подмногообразие $X \subset Y$ отделимого многообразия Y тоже отделимо, ибо диагональ в $X \times X$ является прообразом диагонали в $Y \times Y$ при вложении $X \times X \hookrightarrow Y \times Y$. В частности, всякое аффинное или проективное многообразие отделимо и имеет конечный тип.

ПРИМЕР 12.5 (ГРАФИК МОРФИЗМА)

Пусть $\varphi : X \rightarrow Y$ — регулярный морфизм. Прообраз диагонали $\Delta \subset Y \times Y$ при индуцированном морфизме $\varphi \times \text{Id}_Y : X \times Y \rightarrow Y \times Y$ называется *графиком* φ и обозначается через Γ_φ . Геометрически, $\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x))\} \subset X \times Y$. Если Y отделимо, то график замкнут. Например, график регулярного морфизма аффинных многообразий $\varphi : \text{Spec}_m(A) \rightarrow \text{Spec}_m(B)$ задаётся в $A \otimes B$ системой уравнений $1 \otimes f = \varphi^*(f) \otimes 1$, где f пробегает B .

12.1.4. Рациональные отображения. Регулярный морфизм $\varphi : U \rightarrow Y$, определённый на некотором открытом плотном подмножестве U алгебраического многообразия X , называется *рациональным отображением* из X в Y . Рациональное отображение $\psi : W \rightarrow Y$, заданное на открытом множестве $W \supset U$ и совпадающее с φ на U , называется *продолжением* рационального отображения $\varphi : U \rightarrow Y$. Объединение всех открытых множеств $W \supset U$, на которые продолжается φ , называется *областью определения* рационального отображения $\varphi : X \dashrightarrow Y$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.5 (квадратичная инволюция Кремоны). Покажите, что правило

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^{-1} : x_1^{-1} : x_2^{-1})$$

задаёт рациональное отображение $\mathcal{K} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, определённое всюду, кроме трёх точек, найдите эти точки и опишите образ \mathcal{K} .

Рациональные отображения $\varphi : X \dashrightarrow Y$ не являются отображениями «из X » в теоретико-множественном смысле, ибо определены не везде. В частности, композиция рациональных отображений не определена, когда образ первого отображения оказывается целиком вне области определения второго. Тем не менее, рациональные отображения часто возникают и играют важную роль в алгебраической геометрии. Например, естественная проекция $\mathbb{A}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$, переводящая точку пространства $\mathbb{A}(V)$, представленную вектором $v \in V$, в точку пространства $\mathbb{P}(V)$, представленную тем же самым вектором v , является сюръективным рациональным отображением определённым всюду, кроме нуля.

12.2. Проективные многообразия. Алгебраическое многообразие X называется *проективным*, если оно допускает замкнутое вложение в проективное пространство, т. е. изоморфно замкнутому подмногообразию в \mathbb{P}^n для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.6. Покажите, что множество решений системы однородных полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства \mathbb{P}^n является замкнутым подмногообразием в \mathbb{P}^n .

В частности, проективными алгебраическими многообразиями являются грассманианы $\text{Gr}(k, V)$, задаваемые квадратичными соотношениями Плюккера в $\mathbb{P}(\wedge^k V)$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.7. Покажите, что прямое произведение проективных многообразий проективно, и выведите из этого, что подмножество в $\mathbb{P}_{n_1} \times \mathbb{P}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{P}_{n_m}$, задаваемое набором однородных по координатам каждого сомножителя полиномиальных уравнений на однородные координаты, является проективным алгебраическим многообразием.

ПРИМЕР 12.6 (раздутие точки в \mathbb{P}^n)

Прямые, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}^n$, образуют проективное пространство $E \simeq \mathbb{P}_{n-1}$. График инцидентности $\mathcal{B}_p = \{(q, \ell) \in \mathbb{P}^n \times E \mid q \in \ell\}$

называется *раздутием* точки $p \in \mathbb{P}_n$. Проекция $\sigma_p : \mathcal{B}_p \rightarrow \mathbb{P}_n$ биективна всюду над $\mathbb{P}_n \setminus \{p\}$, но прообразом самой точки p является весь слой:

$$\sigma_p^{-1}(p) = \{p\} \times E \subset \mathbb{P}_n \times E.$$

Он называется *исключительным дивизором*¹. Вторая проекция $\varrho_E : \mathcal{B}_p \rightarrow E$ реализует \mathcal{B}_p как *линейное расслоение* над E , слой которого над точкой $q \in E$ — это прямая $(pq) \subset \mathbb{P}_n$. Это расслоение называется *тавтологическим* линейным расслоением над E . Из [упр. 12.7](#) вытекает, что \mathcal{B}_p является проективным многообразием: выберем однородные координаты на \mathbb{P}_n так, чтобы

$$p = (1 : 0 : \dots : 0),$$

и отождествим E с гиперплоскостью $V(x_0) = \{(0 : \lambda_1 : \dots : \lambda_n)\} \subset \mathbb{P}_n$, сопоставляя прямой $\ell \ni p$ точку $\lambda = \ell \cap V(x_0)$; тогда коллинеарность точек p, q, λ запишется системой однородных квадратичных уравнений

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ q_0 & q_1 & \dots & q_n \\ 0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = 2, \quad \text{или} \quad q_i t_j = q_j t_i \quad \forall 1 \leq i < j \leq n$$

на $(q, \lambda) \in \mathbb{P}_n \times E$. Иначе раздутие точки p можно представлять себе как результат вклеивания проективного пространства E в проделанное на \mathbb{P}_n вместо p точечное отверстие таким образом, что приход в точку p вдоль прямой $\ell \subset \mathbb{P}_n$ приводит в точку $\ell \in E$.

ЛЕММА 12.1

Каждое замкнутое подмногообразие $X \subset \mathbb{P}_n$ является множеством решений конечной системы полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства \mathbb{P}_n .

Доказательство. В обозначениях из [прим. 12.1](#) на стр. 177 пересечение $X \cap U_i$ со стандартной открытой картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ является множеством нулей некоторого идеала I_i в кольце многочленов от n переменных $t_{i,\nu} = x_\nu/x_i$, где $0 \leq \nu \leq n$ и $\nu \neq i$. Каждый такой многочлен f можно переписать как $\bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)/x_i^d$, где $d = \deg f$, а $\bar{f} \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ — такой однородный многочлен степени d , что $\bar{f}(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}) = f(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n})$. Для каждого i рассмотрим какое-нибудь конечное множество образующих $f_{i,\alpha}$ идеала I_i и построим по ним однородные многочлены $\bar{f}_{i,\alpha} \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Покажем, что многообразие X совпадает с множеством Z решений системы однородных полиномиальных уравнений $x_i \cdot \bar{f}_{i,\alpha}(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, где $0 \leq i \leq n$, и

¹вообще *дивизорами* (Вейля) на алгебраическом многообразии называются элементы свободной абелевой группы, порождённой неприводимыми замкнутыми подмногообразиями размерности 1 (размерности алгебраических многообразий обсуждаются в [н° 12.3](#) ниже)

при каждом i второй индекс α нумерует образующие $f_{i,\alpha}$ идеала I_i . Достаточно для каждого i установить равенство $Z \cap U_i = X \cap U_i$. Поскольку пересечение множества нулей однородного многочлена $x_i \cdot \bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ со картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ задаётся в аффинных координатах t_i на U_i уравнением

$$\bar{f}(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}) = f(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}) = 0,$$

пересечение карты U_i с множеством общих нулей однородных многочленов $x_i \cdot \bar{f}_{i,\alpha}$, индекс i которых равен номеру карты, совпадает с $X \cap U_i$. Тем самым, $Z \cap U_i \subset X \cap U_i$, и для доказательства равенства остаётся убедиться, что каждый однородный многочлен $x_j \cdot \bar{f}_{j,\beta}$ с $j \neq i$ также зануляется на $X \cap U_i$. Но множитель x_j зануляется на гиперплоскости $V(t_{i,j}) \subset U_i$, а множитель $\bar{f}_{j,\beta}$ зануляется на дополнительном к этой гиперплоскости главном открытом множестве $\mathcal{D}(t_{i,j}) = X \cap U_i \cap U_j \subset X \cap U_i$, т. к. последнее содержится в пересечении $X \cap U_j$, на котором $\bar{f}_{j,\beta}$ равен нулю. \square

ПРИМЕР 12.7 (иллюстрация доказательства ЛЕМ. 12.1)

Проективное многообразие $X = V(x_0 x_1 x_2) \subset \mathbb{P}_2$ представляет собою объединение трёх координатных прямых и локально, в стандартных картах U_0, U_1, U_2 , задаётся, соответственно, уравнениями $t_{0,1} t_{0,2} = 0, t_{1,0} t_{1,2} = 0, t_{2,0} t_{2,1} = 0$, которым в предыдущем доказательстве отвечают однородные многочлены $\bar{f}_{0,1} = x_1 x_2, \bar{f}_{1,1} = x_0 x_2, \bar{f}_{2,1} = x_0 x_1$, а задающее X глобальное однородное уравнение $x_0 x_1 x_2 = 0$ имеет в левой части многочлен $x_0 x_1 x_2 = x_0 \cdot \bar{f}_{0,1} = x_1 \cdot \bar{f}_{1,1} = x_2 \cdot \bar{f}_{2,1}$.

12.2.1. Системы результатов. Рассматриваемые с точностью до пропорциональности ненулевые решения системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_m(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (12-5)$$

в которой каждый $f_i \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ однороден степени d_i , образуют проективное многообразие — пересечение проективных гиперповерхностей

$$S_i = V(f_i) \subset \mathbb{P}(V).$$

Проективные гиперповерхности степени d являются точками проективного пространства $\mathbb{P}(S^d V^*)$, и наборы гиперповерхностей (S_1, S_2, \dots, S_m) заданных степеней d_1, d_2, \dots, d_m с непустым пересечением $\bigcap_i S_i \neq \emptyset$, составляют фигуру

$$\mathcal{R}(n+1; d_1, d_2, \dots, d_m) \subset \mathbb{P}(S^{d_1} V^*) \times \mathbb{P}(S^{d_2} V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_m} V^*), \quad (12-6)$$

которая называется *результантным множеством* системы (12-5). Например, когда число уравнений равно числу переменных и все уравнения линейны, система (12-5) превращается в систему однородных линейных уравнений $Ax = 0$ с квадратной матрицей $A = (a_{ij})$ и имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det(a_{ij}) = 0$. Поэтому, при $m = n + 1$ и $d_1 = d_2 = \dots = d_{n+1} = 1$ результатное множество является проективным алгебраическим многообразием, заданным одним полиномиальным уравнением на коэффициенты $a_{i,j}$ многочленов f_1, f_2, \dots, f_{n+1} , линейным по каждому набору коэффициентов.

Покажем, что в общем случае результатное многообразие (12-6) также является проективным алгебраическим многообразием, т. е. задаётся конечной системой полиномиальных уравнений на коэффициенты многочленов f_i , однородных по каждому из многочленов и зависящих только от числа переменных $n + 1$ и набора степеней d_i . Для этого рассмотрим идеал

$$J = (f_1, f_2, \dots, f_m) \subset \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

Отсутствие у системы (12-5) ненулевых решений означает, что аффинное алгебраическое многообразие $V(J) \subset \mathbb{A}(V)$ либо пусто, либо совпадает с началом координат. В обоих случаях каждая из координатных функций x_i тождественно зануляется на $V(J)$, и по теореме Гильберта о нулях существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $x_i^m \in J$ для всех i . Наоборот, если J содержит некоторую степень каждой из переменных, то система уравнений с левыми частями из идеала J включает в себя уравнения $x_0^m = x_1^m = \dots = x_n^m = 0$, имеющие только нулевое решение. Таким образом, отсутствие ненулевых решений у системы (12-5) равносильно тому, что для некоторого m идеал J содержит все x_i^m . Последнее означает, что любой многочлен, степень которого больше $(n + 1)(m - 1)$, лежит в J , т. е. J содержит все $S^d V^*$ с $d \gg 0$. Пересечение $J \cap S^d V^*$ является образом линейного отображения

$$\mu_d : S^{d-d_1} V^* \oplus S^{d-d_2} V^* \oplus \dots \oplus S^{d-d_m} V^* \xrightarrow{(g_0, g_1, \dots, g_n) \mapsto \sum g_v f_v} S^d, \quad (12-7)$$

задаваемого в стандартных базисах из мономов матрицей, ненулевые элементы которой суть коэффициенты многочленов f_v . При $d \gg 0$ размерность левой части (12-7) ведёт себя как $\sum_{v=1}^m \binom{n+d-d_v}{n} \sim \frac{m}{n!} d^n$ и становится больше, чем размерность правой части, ведущая себя как $\binom{n+d}{n} \sim \frac{1}{n!} d^n$. Для всех таких d неэпиморфность отображения (12-7), т. е. неравенство $J \cap S^d V^* \neq S^d V^*$, равносильно обнулению всех максимальных миноров матрицы μ_d .

Итак, наличие ненулевых решений у системы (12-5) эквивалентно обращению в нуль всех максимальных миноров матриц μ_d для всех таких d , что размерность левой части (12-7) не меньше, чем размерность правой. В силу нётеровости кольца многочленов, эта бесконечная система полиномиальных уравнений эквивалентна некоторой конечной подсистеме, называемой *системой результатных*.

ЛЕММА 12.2

Проекция $\pi : \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ замкнута¹.

Доказательство. Зафиксируем однородные координаты x на \mathbb{P}_m и аффинные координаты t на \mathbb{A}^n . Замкнутое подмножество $X \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$ задаётся системой однородных по x полиномиальных уравнений $f_\nu(x, t) = 0$. Его образ $\pi(X) \subset \mathbb{A}^n$ состоит из всех точек p , при подстановке которых в эти уравнения вместо t получается система однородных уравнений $f_\nu(x, p) = 0$ на x , имеющая ненулевое решение. Это означает, что коэффициенты форм $f_\nu(x, p)$, являющиеся полиномами от p , удовлетворяют системе результирующих полиномиальных уравнений. \square

СЛЕДСТВИЕ 12.1

Если многообразие X проективно, то проекция $X \times Y \rightarrow Y$ замкнута для любого многообразия Y .

Доказательство. Ограничиваясь на аффинные карты в Y , мы можем считать Y аффинным. Тогда $X \times Y$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$, и наша проекция получается ограничением замкнутой проекции $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ на замкнутое подмножество $X \times Y \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$. \square

СЛЕДСТВИЕ 12.2

Если X проективно, а Y отделимо, то любой морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ замкнут.

Доказательство. Образ $\varphi(Z) \subset Y$ любого подмножества $Z \subset X$ совпадает с образом пересечения $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$ при проекции $X \times Y \rightarrow Y$, где $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$ — график отображения $\varphi : X \rightarrow Y$. Если Z замкнуто в X , произведение $Z \times Y$ замкнуто в $X \times Y$. Если Y отделимо, график Γ_φ тоже замкнут². Если X проективно, проекция $X \times Y \rightarrow Y$ замкнута и переводит замкнутое множество $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$ в замкнутое множество $\varphi(Z) \subset Y$. \square

СЛЕДСТВИЕ 12.3

Любое регулярное отображение связного проективного многообразия X в аффинное многообразие стягивает X в одну точку. В частности, $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{k}$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для отображения $\varphi : X \rightarrow \mathbb{A}^n$. Беря композицию такого отображения с координатными функциями $x_i : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^1$, мы сводим утверждение к случаю $n = 1$. Композиция регулярного отображения $X \rightarrow \mathbb{A}^1$ с вложением $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_1$ в качестве стандартной аффинной карты является регулярным несюръективным отображением $X \rightarrow \mathbb{P}_1$. Так как его образ замкнут и связан, он является точкой. \square

¹т. е. переводит замкнутые множества в замкнутые

²см. прим. 12.5 на стр. 181

12.2.2. Конечные проекции. Регулярный морфизм алгебраических многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *конечным*, если прообраз $W = \varphi^{-1}(U)$ любой аффинной карты $U \subset Y$ является аффинной картой на X , и ограничение $\varphi_w : W \rightarrow U$ является конечным морфизмом аффинных многообразий в смысле **н° 11.5.3** на стр. 174. Из **лем. 11.3** на стр. 174 следует, что каждый конечный морфизм замкнут и ограничение конечного морфизма на замкнутое подмногообразии $Z \subset X$ также является конечным морфизмом. Более того, если X неприводимо, то собственное замкнутое подмножество $Z \subset X$ переходит в *собственное* замкнутое подмножество Y .

Упражнение 12.8. Проверьте, что композиция конечных морфизмов конечна.

Предложение 12.1

Проекция любого проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \notin X$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ является конечным морфизмом.

Доказательство. Рассмотрим аффинную карту $U \subset H$ и однородные координаты $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ на \mathbb{P}_n , в которых $p = (1 : 0 : \dots : 0)$, гиперплоскость $H = V(x_0)$ состоит из точек $q = (0 : q_1 : \dots : q_n)$, а карта $U \subset H$ — из точек $u = (0 : u_1 : \dots : u_{n-1} : 1)$, и пусть X задаётся в этих координатах системой однородных уравнений $f_v(x) = 0$. Поскольку $p \notin X$, прообраз $Y = \pi_p^{-1}(U) \subset X$ является пересечением X с проколотым конусом C над U , образованным всеми прямыми $(pu) \subset \mathbb{P}_n$ с выколотой точкой¹ p . Конус C является аффинным алгебраическим многообразием, изоморфным аффинному пространству $\mathbb{A}^n = U \times \mathbb{A}^1$: изоморфизм переводит точку $(u, t) \in U \times \mathbb{A}^1$ в точку $x = tp + u \in \mathbb{P}_n$. Пересечение $Y = C \cap X$ задаётся в координатах (u, t) уравнениями

$$f_v(tp + u) = \alpha_0^{(v)}(u) t^m + \alpha_1^{(v)}(u) t^{m-1} + \dots + \alpha_m^{(v)}(u) = 0, \quad (12-8)$$

и стало быть тоже является аффинным алгебраическим многообразием. Покажем, что его координатная алгебра $\mathbb{k}[Y] = \mathbb{k}[u_1, u_2, \dots, u_{n-1}]/I$, где идеал I порождается многочленами $f_v(tp + u)$ из уравнений (12-8), цела над $\mathbb{k}[U] = \mathbb{k}[u_1, u_2, \dots, u_{n-1}]$. Для этого достаточно найти в идеале I приведённый многочлен от t с коэффициентами из $\mathbb{k}[U]$ — тогда класс $t \pmod{I}$, являющийся его корнем, будет цел над $\mathbb{k}[U]$. Наличие в идеале I такого многочлена равносильно тому, что идеал, порождённый в $\mathbb{k}[U]$ старшими коэффициентами $\alpha_0^{(v)}(u)$ всех уравнений (12-8), содержит единицу, что по теореме Гильберта означает отсутствие у многочленов $\alpha_0^{(v)}(u)$ общих нулей в U . Но если такой общий нуль u_0 имеется, то однородные версии уравнений (12-8)

$$f_v(\vartheta_0 p + \vartheta_1 u_0) = \alpha_0^{(v)}(u_0) \vartheta_0^m + \alpha_1^{(v)}(u_0) \vartheta_0^{m-1} \vartheta_1 + \dots + \alpha_m^{(v)}(u_0) \vartheta_1^m = 0,$$

¹т. е. аффинными прямыми $u + pt$, $t \in \mathbb{k}$

получающиеся ограничением задающих X уравнений на проективную прямую (p, u_0) , имеют на этой прямой общий корень $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$, находящийся в самой точке p , что противоречит условию $p \notin X$. \square

СЛЕДСТВИЕ 12.4

Каждое проективное многообразие допускает конечный сюръективный морфизм на проективное пространство.

СЛЕДСТВИЕ 12.5

Каждое аффинное многообразие X допускает конечный сюръективный морфизм на аффинное пространство.

Доказательство. Пусть $X \subsetneq \mathbb{A}^n$, где \mathbb{A}^n вложено в \mathbb{P}_n как стандартная карта U_0 . Положим $H_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_n \setminus U_0$ и обозначим через $\bar{X} \subset \mathbb{P}_n$ проективное замыкание аффинного многообразия X . Проекция \bar{X} из любой точки $p \in H_\infty \setminus \bar{X}$ на любую гиперплоскость $L \not\ni p$ выглядит в аффинной карте U_0 как параллельная проекция многообразия $X = \bar{X} \setminus H_\infty$ на гиперплоскость $U_0 \cap L = L \setminus H_\infty$ в направлении вектора p и по [предл. 12.1](#) является конечным морфизмом аффинных многообразий. Если он не сюръективен, повторяем процедуру. \square

УПРАЖНЕНИЕ 12.9. Убедитесь, что если $X \neq \mathbb{A}^n$, то $\bar{X} \cap H_\infty \neq H_\infty$.

ПРИМЕР 12.8 (НОРМАЛИЗАЦИЯ НЁТЕР)

Запишем $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ в виде $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$, где каждый f_k однороден степени k . Замыкание \bar{X} аффинной гиперповерхности $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ в проективном пространстве \mathbb{P}_n с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, куда \mathbb{A}^n вложено в качестве стандартной карты U_0 , задаётся однородным многочленом $\bar{f} = f_0 x_0^d + f_1 x_0^{d-1} + \dots + f_{d-1} x_0 + f_d$. Бесконечно удалённая точка

$$p = (0 : p_1 : p_2 : \dots : p_n) \notin \bar{X} \iff f_d(p_1, p_2, \dots, p_n) \neq 0.$$

Если $f_d \neq \text{const} \cdot x_n^d$, то $p \notin \bar{X}$ можно выбрать¹ в виде $p = (0, p_1, \dots, p_{n-1}, -1)$. Проекция из этой точки на гиперплоскость $x_n = 0$ выглядит в \mathbb{A}^n как параллельная проекция $\pi_p : X \rightarrow \mathbb{A}^{n-1}$ вдоль вектора $p = (p_1, \dots, p_{n-1}, -1)$ и действует по формуле

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + p_1 x_n, x_2 + p_2 x_n, \dots, x_{n-1} + p_{n-1} x_n, 0),$$

т. е. $\pi_p^* : \mathbb{k}[t_1, t_2, \dots, t_{n-1}] \rightarrow \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/(f)$ переводит t_i в $x_i + p_i x_n$. По [предл. 12.1](#) алгебра $\mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/(f)$ цела² над $\mathbb{k}[t_1, t_2, \dots, t_{n-1}]$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.10. Явно предъявите уравнения целой зависимости для всех x_i .

¹над любым бесконечным полем \mathbb{k}

²откуда следует, в частности, что $\text{tr deg } \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/(f) = n - 1$

Проекция π_p доминантна: точка $q \notin \pi_p(X)$, если и только если многочлен

$$f(q_1 + p_1 x_n, q_2 + p_2 x_n, \dots, q_{n-1} + p_{n-1} x_n, x_n) \in \mathbb{k}[x_n]$$

является ненулевой константой, что означает обращение в нуль всех его коэффициентов кроме свободного члена, и в предположении, что $f \neq \text{const}$, может произойти лишь внутри отличного от \mathbb{A}^{n-1} замкнутого подмножества. Из [лем. 11.3](#) на стр. 174 следует, что π_p сюръективна. Этот факт известен как *лемма Нётер о нормализации*: всякая аффинная гиперповерхность над произвольным бесконечным полем допускает конечную сюръективную параллельную проекцию на гиперплоскость.

УПРАЖНЕНИЕ 12.11. Убедитесь в этом напрямую, без привлечения [лем. 11.3](#).

12.3. Размерность $\dim_x X$ алгебраического многообразия X в точке $x \in X$ определяется как максимальное число $n \in \mathbb{N}$, для которого существует цепочка неприводимых замкнутых подмногообразий

$$\{x\} = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n \subset X. \quad (12-9)$$

Если многообразие X неприводимо, максимальная цепочка (12-9) с неизбежностью имеет $X_n = X$. Если X приводимо, размерность $\dim_x X$ равна максимальной из размерностей всех проходящих через x неприводимых компонент многообразия X .

УПРАЖНЕНИЕ 12.12. Покажите, что $\dim_x X = \dim_x U$ для всякой аффинной окрестности U точки x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.2

Если многообразие Y неприводимо и имеется сюръективный морфизм $\varphi : Y \rightarrow X$, то $\dim_y Y \geq \dim_{\varphi(y)} X$ для любой точки $y \in Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой цепочки (12-9) при каждом i многообразие $\varphi^{-1}(X_i) \subset Y$ имеет неприводимую компоненту Y_i , доминантно отображающуюся на X_i , и из них можно составить цепочку $\{y\} = Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_{n-1} \subsetneq Y_n = Y$. \square

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.3

Пусть $\varphi : X \rightarrow Y$ — конечный морфизм неприводимых многообразий, и $x \in X$. Тогда $\dim_x X \leq \dim_{\varphi(x)} Y$ и равенство равносильно тому, что $\varphi(X) = Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [упр. 12.12](#) достаточно считать X и Y аффинными. Каждая цепочка (12-9) в X по [лем. 11.3](#) на стр. 174 порождает цепочку строго вложенных друг в друга замкнутых неприводимых подмногообразий $\varphi(X_i)$ в Y , что даёт нужное неравенство, причём когда $\varphi(X) \neq Y$, это неравенство строгое. В случае $\varphi(X) = Y$ из [предл. 12.2](#) возникает противоположное неравенство. \square

СЛЕДСТВИЕ 12.6

$\dim_x \mathbb{A}^n = n$ в любой точке $x \in \mathbb{A}^n$.

Доказательство. Поскольку в \mathbb{A}^n имеется цепочка вида (12-9), образованная проходящими через x аффинными подпространствами, $\dim_x \mathbb{A}^n \geq n$. Противоположное неравенство получается по индукции: очевидно, что $\dim \mathbb{A}^0 = 0$, и если $\dim \mathbb{A}^{n-1} = n - 1$, то беря конечную проекцию последнего отличного от \mathbb{A}_n элемента максимальной цепочки (12-9), написанной для $X = \mathbb{A}^n$, на гиперплоскость в \mathbb{A}^n , мы заключаем из предл. 12.3, что его размерность, а значит и номер, не превосходит $n - 1$. Поэтому $\dim_x \mathbb{A}^n = n$. \square

СЛЕДСТВИЕ 12.7

Пусть X — неприводимое аффинное многообразие и $\varphi : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ — сюръективный конечный морфизм. Тогда $\dim_x X = m$ в каждой точке $x \in X$, и число m не зависит от выбора φ .

СЛЕДСТВИЕ 12.8

Размерность аффинного неприводимого многообразия X равна степени трансцендентности¹ алгебры $\mathbb{k}[X]$ над \mathbb{k} .

Доказательство. Конечная сюръекция $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ соответствует целому расширению $\pi^* : \mathbb{k}[u_1, u_2, \dots, u_m] = \mathbb{k}[\mathbb{A}^m] \hookrightarrow \mathbb{k}[X]$. Последнее означает, что функции $\pi^* u_i$ образуют базис трансцендентности $\mathbb{k}[X]$ над \mathbb{k} . \square

УПРАЖНЕНИЕ 12.13. Докажите, что $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ для любых неприводимых многообразий X, Y .

12.3.1. Размерности подмногообразий. Если через точку x многообразия X проходит несколько неприводимых компонент, и функция $f \in \mathbb{k}[X]$ тождественно обращается в ноль на одной из таких компонент, имеющей максимальную размерность $\dim_x X$, гиперповерхность $V(f) \subset X$ будет иметь в точке x ту же размерность, что и объемлющее многообразие X . Это контринтуитивное явление возможно, только если f делит нуль в $\mathbb{k}[X]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.4

Если X неприводимо, то $\dim_p V(f) = \dim_p(X) - 1$ для любой непостоянной регулярной функции $f \in \mathcal{O}_x(X)$ и любой точки $p \in V(f)$.

Доказательство. Мы можем и будем предполагать X аффинным. Случай $X = \mathbb{A}^n$ был разобран в прим. 12.8. Общий случай сводится к этому рассуждением, аналогичным использованному в доказательстве лем. 11.4 на стр. 175. Зафиксируем конечную сюръекцию $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}^m$ и рассмотрим отображение

$$\varphi = \pi \times f : X \rightarrow \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1, \quad x \mapsto (\pi(x), f(x)).$$

¹см. н° 10.4 на стр. 157

В лем. 11.4 мы видели, что оно конечно и сюръективно отображает X на аффинную гиперповерхность $V(\mu_f) \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$ — множество нулей минимального многочлена $\mu_f(u, t) = t^n + \alpha_1(u)t^{n-1} + \dots + \alpha_n(u) \in \mathbb{k}[u_1, u_2, \dots, u_m][t]$ функции f над полем $\mathbb{k}(\mathbb{A}^m)$. Гиперповерхность $V(f) \subset X$ отображается морфизмом φ в пересечение $V(\mu_f)$ с аффинной гиперплоскостью $t = 0$, внутри которой это пересечение задаётся уравнением $\alpha_n(u) = 0$, т. е. является аффинной гиперповерхностью $V(a_n) \subset \mathbb{A}^m$ размерности $m - 1$. По предл. 12.3 $\dim V(f) = \dim V(a_n) = m - 1 = \dim X - 1$. \square

Следствие 12.9

Для любых аффинного многообразия X и функций $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{k}[X]$ в каждой точке $p \in V(f_1, f_2, \dots, f_m)$ выполнено неравенство $\dim_p V(f_1, f_2, \dots, f_m) \geq \dim_p(X) - m$. Если при каждом i класс f_i не делит нуль в $\mathbb{k}[X]/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$, это неравенство превращается в равенство¹.

Предостережение 12.1. Предыдущее следствие отнюдь не утверждает, что

$$V(f_1, f_2, \dots, f_m) \neq \emptyset,$$

и формально остаётся истинным, если $V(f_1, f_2, \dots, f_m) = \emptyset$. А такое частенько случается: например, $V(x, x+1) = \emptyset$ в $\mathbb{A}^3 = \text{Спец}_m \mathbb{k}[x, y, z]$. Из слабой теоремы Гильберта о нулях вытекает, что $V(f_1, f_2, \dots, f_m) = \emptyset$, если и только если при некотором i класс f_i в $\mathbb{k}[X]/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$ равен ненулевой константе.

Предложение 12.5

Для любых аффинных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^n$ в каждой точке $x \in X_1 \cap X_2$ выполняется неравенство $\dim_x(X_1 \cap X_2) \geq \dim_x(X_1) + \dim_x(X_2) - n$.

Доказательство. Пусть $\varphi_1 : X_1 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ и $\varphi_2 : X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ — замкнутые вложения. Тогда $X_1 \cap X_2$ является прообразом диагонали $\Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ при отображении

$$\varphi_1 \times \varphi_2 : X_1 \times X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n.$$

Внутри $X_1 \times X_2$ он задаётся n уравнениями $(\varphi_1 \times \varphi_2)^*(x_i) = (\varphi_1 \times \varphi_2)^*(y_i)$, которые являются поднятиями линейных уравнений $x_i = y_i$, задающих диагональ Δ в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Остаётся применить сл. 12.9. \square

Предложение 12.6

Если размерности неприводимых проективных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}_n$ удовлетворяют неравенству $\dim(X_1) + \dim(X_2) \geq n$, то $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Рассмотрим в $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ аффинные конусы X'_1, X''_2 образованные одномерными векторными подпространствами в V ,

¹последовательности функций с таким свойством называются *регулярными*

составляющими точки проективных многообразий¹ X_1 и X_2 . По предыдущему утверждению $\dim_O(X'_1 \cap X''_2) \geq \dim_O(X_1) + 1 + \dim_O(X_2) + 1 - n - 1 \geq 1$. Таким образом, $X'_1 \cap X''_2$ не исчерпывается точкой O . \square

12.3.2. Размерности слоёв регулярных морфизмов. В алгебраической геометрии, в отличие от дифференциальной, размерность прообраза при регулярном отображении контролируется почти столь же жёстко, как в линейной алгебре.

ТЕОРЕМА 12.1

Для любого доминантного морфизма $\varphi : X \rightarrow Y$ неприводимых алгебраических многообразий в каждой точке $x \in X$ выполняется неравенство

$$\dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geq \dim X - \dim Y$$

и существует плотное открытое подмножество $U \subset Y$, над каждой точкой $y \in U$ которого $\dim_x \varphi^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$ в каждой точке $x \in \varphi^{-1}(y)$.

Доказательство. Беря композицию φ с конечным сюръективным морфизмом какой-нибудь аффинной карты $U \ni \varphi(x)$ на пространство \mathbb{A}^m и заменяя X на $\varphi^{-1}(U)$, мы сводим первое утверждение теоремы к случаю $Y = \mathbb{A}^m = \text{Spec}_m \mathbb{k}[u_1, u_2, \dots, u_m]$, $\varphi(x) = 0$. Заменяя X аффинной окрестностью точки x , мы можем считать X аффинным. В этом случае $\varphi^{-1}(0)$ является непустым пересечением m гиперповерхностей $V(\varphi^*(u_i)) \subset X$, и требуемое неравенство вытекает из [сл. 12.9](#). В доказательстве второго утверждения мы также можем и будем считать оба многообразия аффинными, а морфизм φ — ограничением проекции $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \rightarrow Y$ на замкнутое подмногообразие $X \subset Y \times \mathbb{A}^m$, как в разложении из [форм. \(11-8\)](#) на [стр. 173](#). Мы собираемся применить к слоям этой проекции [сл. 12.5](#). Для этого рассмотрим проективное замыкание $\bar{X} \subset Y \times \mathbb{P}_m$, выберем гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}_m$ и точку $p \in \mathbb{P}_m \setminus H$ так, чтобы сечение $Y \times \{p\} \subset Y \times \mathbb{P}_m$ не содержалось в \bar{X} . Тогда послойная проекция из p на H будет удовлетворять условиям [предл. 12.1](#) во всех слоях, располагающихся над открытым подмножеством $U \subset Y$, дополнительным к $\bar{\pi}((Y \times \{p\}) \cap \bar{X})$, где $\bar{\pi} : Y \times \mathbb{P}_m \rightarrow Y$ — проекция вдоль \mathbb{P}_m . Таким образом, заменяя Y любым лежащим в U главным открытым подмножеством (которое, как и Y , тоже является аффинным алгебраическим многообразием), мы можем повторить рассуждения из [сл. 12.5](#) одновременно во всех слоях проекции π , что после конечного числа таких итераций приведёт к конечному сюръективному отображению $\psi : X \rightarrow Y \times \mathbb{A}^n$, ограничение которого на каждый слой $\varphi^{-1}(y)$ является конечным сюръективным морфизмом $\varphi^{-1}(y) \rightarrow \{y\} \times \mathbb{A}^n$. Конечность ψ влечёт равенство $n = \dim X - \dim Y$, а конечность его ограничений на слои — равенство $\dim_x \varphi^{-1}(y) = n$. \square

¹Эти конусы имеют те же самые уравнения, что и X_1, X_2 , но только теперь эти уравнения рассматриваются как аффинные

СЛЕДСТВИЕ 12.10 (ТЕОРЕМА ШЕВАЛЛЕ О ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ)

Для любого морфизма алгебраических многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$ множества

$$X_k \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in X \mid \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geq k \}$$

замкнуты в X при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Если $\dim Y = 0$, то теорема тривиально верна для всех X и k . Пусть теперь $\dim Y = m$ и для всех Y меньшей размерности теорема верна для всех X и k . Покажем, что она верна для Y . Можно считать X и Y неприводимыми. Если $k \leq \dim(X) - \dim(Y)$, то $X_k = X$ по теор. 12.1. Для $k > \dim(X) - \dim(Y)$ заменим Y на $Y' = Y \setminus U$, где U взято из теор. 12.1, а X — на $X' = \varphi^{-1}(Y')$. Тогда $X_k \subset X'$, $\dim Y' < \dim Y$, и применимо индуктивное предположение. \square

СЛЕДСТВИЕ 12.11

Для любого замкнутого морфизма $X \xrightarrow{\varphi} Y$ множество $Y_k \stackrel{\text{def}}{=} \{ y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geq k \}$ замкнуто в Y при всех $k \in \mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА 12.2 (РАЗМЕРНОСТНЫЙ КРИТЕРИЙ НЕПРИВОДИМОСТИ)

Если регулярный морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ сюръективен, а все его слои неприводимы и имеют одинаковые размерности, то неприводимость Y влечёт неприводимость X .

Доказательство. Пусть $X = X_1 \cup X_2$ приводимо. Положим

$$Y_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{ y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_1 \}, \quad Y_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{ y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_2 \}.$$

Поскольку каждый слой φ , будучи неприводимым, целиком содержится либо в X_1 , либо в X_2 , мы заключаем, что $Y = Y_1 \cup Y_2$, причём оба подмножества Y_i отличны от Y , коль скоро оба подмножества X_i отличны от X . Так как Y_i совпадает с множеством таких точек в Y , над которыми слой отображения $\varphi|_{X_i} X_i \rightarrow Y$ достигает своей максимальной размерности, из сл. 12.11 вытекает, что Y_i замкнуто. Тем самым, приводимость X влечёт приводимость Y . \square

12.3.3. Размерности проективных многообразий. По предл. 12.6 всякое d -мерное неприводимое многообразие $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ пересекается со всеми проективными подпространствами $H \subset \mathbb{P}_n$ размерности $\dim H \geq n - d$. Покажем, что общее подпространство H размерности $\dim H < n - d$ не пересекается с X , и, тем самым, $\dim X$ можно охарактеризовать как наибольшее такое d , что X пересекается со всеми проективными подпространствами коразмерности d .

Для этого рассмотрим грассманиан $\text{Gr}(n - d, n + 1) = \text{Gr}(n - d, V)$, точками которого являются все $(n - d - 1)$ -мерные проективные подпространства $H \subset \mathbb{P}(V)$, и образуем многообразие инцидентности

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, H) \in X \times \text{Gr}(n - d, V) \mid x \in H \} \quad (12-10)$$

УПРАЖНЕНИЕ 12.14. Убедитесь, что Γ является проективным алгебраическим многообразием.

Проекция $\pi_1 : \Gamma \rightarrow X$ сюръективна: её слой над каждой точкой x состоит из всех проективных подпространств размерности $n - d - 1$, проходящих через x , и изоморфен грассманиану $\text{Gr}(n - d - 1, n) = \text{Gr}(n - d - 1, V / \mathbb{k} \cdot x)$ всех векторных $(n - d - 1)$ -мерных подпространств в фактор пространстве $V / \mathbb{k} \cdot x$. По теор. 12.2 многообразию Γ неприводимо и имеет размерность $d + (n - d - 1)(d + 1) = (n - d)(d + 1) - 1$. Образ $\pi_2(\Gamma) \subset \text{Gr}(n - d, V)$ второй проекции $\pi_2 : \Gamma \rightarrow \text{Gr}(n - d, V)$ состоит из всех $(n - d - 1)$ -мерных подпространств, пересекающих X . Это неприводимое замкнутое подмногообразие размерности, не превышающей $\dim \Gamma$ и, тем самым, строго меньшей, чем $\dim \text{Gr}(n - d, V) = (n - d)(d + 1)$. Поэтому множество не пересекающих X $(n - d - 1)$ -мерных подпространств содержит в себе открытое по Зарисскому всюду плотное подмножество грассманиана $\dim \text{Gr}(n - d, V)$.

Соображения размерности позволяют сказать и больше. Повторяя предыдущее рассуждение для $(n - d)$ -мерных подпространств H' вместо $(n - d - 1)$ -мерных, мы получим неприводимое проективное многообразие инцидентности

$$\Gamma' \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, H') \in X \times \text{Gr}(n - d + 1, V) \mid x \in H'\}$$

размерности $\dim X + \dim \text{Gr}(n - d, n) = d + d(n - d) = d(n - d + 1)$. Так как $X \cap H' \neq \emptyset$ для всех H' , проекция $\pi_2 : \Gamma' \rightarrow \text{Gr}(n - d + 1, V)$ эпиморфна, и её общий слой¹ имеет по теор. 12.1 размерность $\dim \Gamma' - \dim \text{Gr}(n - d + 1, n + 1) = d(n - d + 1) - (n - d + 1)d = 0$. Это означает, что общая d -мерная плоскость H' пересекает X по конечному числу точек.

Беря одну из таких плоскостей H' и проводя внутри неё $(n - d - 1)$ -мерную плоскость H через одну из точек пересечения $p \in X \cap H'$, мы видим, что $H \cap X$ конечно и непусто. Это означает, что у проекции $\pi_2 : \Gamma \rightarrow \text{Gr}(n - d, V)$ нашего первого многообразия инцидентности (12-10) имеется нульмерный слой. Тем самым, минимальная размерность непустого слоя этой проекции нулевая, откуда по теор. 12.1 вытекает, что $\dim \pi_2(\Gamma) = \dim \Gamma = \dim \text{Gr}(n - d, V) - 1$, т. е. пересекающие X подпространства размерности $(n - d - 1)$ образуют неприводимую гиперповерхность² в грассманиане.

УПРАЖНЕНИЕ 12.15. Выведите отсюда, что существует неприводимый многочлен от плюккеровых координат $(n - d - 1)$ -мерного подпространства в \mathbb{P}_n , обращение которого в нуль на данном подпространстве H равносильно тому, что $H \cap X \neq \emptyset$.

Проделанные рассуждения иллюстрируют стандартный метод подсчёта размерностей при помощи многообразий инцидентности, часто используемый в геометрии.

¹т. е. все слои над точками из некоторого плотного открытого подмножества в грассманиане

²т. е. подмногообразии коразмерности 1

ПРИМЕР 12.9 (РЕЗУЛЬТАНТ)

Фиксируем $d_0, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ и обозначим через $\mathbb{P}_{N_i} = \mathbb{P}(S^{d_i}V^*)$ пространство проективных гиперповерхностей степени d_i в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, как в н° 12.2.1 на стр. 184. Покажем, что результатное многообразие

$$\mathcal{R} = \{(S_0, S_1, \dots, S_n) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \mid \cap S_i \neq \emptyset\}$$

системы из $(n+1)$ однородных полиномиальных уравнений на $n+1$ неизвестных, является неприводимой гиперповерхностью¹ в $\mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$. Для этого рассмотрим многообразие $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{(S_1, S_2, \dots, S_n, p) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \times \mathbb{P}_n \mid p \in \cap S_i\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.16. Убедитесь, что G является проективным алгебраическим многообразием.

Поскольку уравнение $f(p) = 0$ линейно по f , проективные гиперповерхности степени d_i , проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_n$, образуют гиперплоскость в пространстве \mathbb{P}_{N_i} . Поэтому проекция $\pi_2 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_n$ сюръективна, а все её слои являются произведениями проективных гиперплоскостей и имеют одинаковую размерность $\sum(N_i - 1) = \sum N_i - n - 1$. Поэтому Γ является неприводимым проективным многообразием размерности $\sum N_i - 1$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.17. Предъявите в \mathbb{P}_n набор из $n+1$ гиперповерхностей S_i заданных степеней d_i , пересекающихся ровно в одной точке.

Из упражнения вытекает, что у проекции $\pi_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_{N_0} \times \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$ имеется нульмерный слой. Поэтому общий непустой слой тоже нульмерен, и $\dim \pi_1(\Gamma) = \dim \Gamma$. Тем самым, $\pi_1(\Gamma)$ является неприводимой гиперповерхностью в $\mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$.

УПРАЖНЕНИЕ 12.18. Покажите, что всякое неприводимое подмногообразие коразмерности 1 в произведении проективных пространств задаётся неприводимым многочленом от однородных координат, однородным по координатам каждого из проективных пространств.

ПРИМЕР 12.10 (ПРЯМЫЕ НА ПОВЕРХНОСТЯХ)

Множество всех поверхностей данной степени d в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ образует проективное пространство $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^dV^*)$ размерности $N = \frac{1}{6}(d+1)(d+2)(d+3) - 1$. Множество всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ представляет собою грассманиан $\text{Gr}(2, 4) = \text{Gr}(2, V)$, изоморфный гладкой 4-мерной квадрике в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(A^2V)$. Обозначим через

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{(S, \ell) \in \mathbb{P}_N \times \text{Gr}(2, 4) \mid \ell \subset S\}$$

¹т. е. существует такой неприводимый многочлен от коэффициентов уравнений, что его обращение в нуль на наборе многочленов f_0, f_1, \dots, f_n равносильно существованию ненулевого решения у системы полиномиальных уравнений $f_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$; этот многочлен называется *результантом* рассматриваемой системы

многообразии инцидентности между прямыми и поверхностями.

УПРАЖНЕНИЕ 12.19. Убедитесь, что $\Gamma \subset \mathbb{P}_N \times \text{Gr}(2, 4)$ является проективным алгебраическим многообразием.

Проекция $\pi_2 : \Gamma \rightarrow Q_P$ сюръективна и все её слои являются проективными пространствами одинаковой размерности: прямая ℓ , заданная уравнениями $x_0 = x_1 = 0$, тогда и только тогда лежит на поверхности $V(f)$, когда $f = x_2 \cdot g + x_3 \cdot h$ для некоторых $g, h \in S^{d-1}V^*$, т. е. когда f лежит в образе линейного отображения

$$\psi : S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^* \rightarrow S^dV^*, (g, h) \mapsto x_2g + x_3h,$$

который изоморфен фактору пространства $S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^*$, имеющего размерность $\frac{1}{3}d(d+1)(d+2)$, по подпространству $\ker \psi$, состоящему из всех пар $(g, h) = (x_3q, -x_2q)$ с $q \in S^{d-2}V^*$ и имеющему размерность $\frac{1}{6}(d-1)d(d+1)$. Поэтому содержащие ℓ поверхности составляют проективное пространство размерности

$$\frac{1}{6} \left(2d(d+1)(d+2) - (d-1)d(d+1) \right) - 1 = \frac{1}{6}d(d+1)(d+5) - 1.$$

Следовательно, Γ является неприводимым проективным многообразием, и

$$\dim \Gamma = \frac{1}{6}d(d+1)(d+5) + 3.$$

Проекция $\pi_1(\Gamma) \subset \mathbb{P}_N$ представляет собою множество поверхностей, содержащих хотя бы одну прямую. Из предыдущего вытекает, что это замкнутое неприводимое многообразие.

УПРАЖНЕНИЕ 12.20. Для каждого $d \geq 3$ предъявите поверхность степени d в \mathbb{P}_3 , содержащую конечное число прямых.

Из упражнения вытекает, что у проекции π_1 имеется непустой 0-мерный слой. Поэтому её общий непустой слой тоже нульмерен, и $\dim \pi_1(\Gamma) = \dim \Gamma$. Поскольку разность $N - \dim \Gamma = \frac{1}{6}((d+1)(d+2)(d+3) - d(d+1)(d+5)) - 4 = d - 3$, мы заключаем, что на каждой кубической поверхности в \mathbb{P}_3 есть прямая, причём на общей кубической поверхности лежит конечное число прямых, а на общей поверхности степени ≥ 4 прямых нет.

УПРАЖНЕНИЕ 12.21. Покажите, что на пространстве S^4V^* существует однородный неприводимый многочлен, обращение которого в нуль на данном $f \in S^4V^*$ равносильно тому, что кватрика $V(f) \subset \mathbb{P}_3$ содержит прямую.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 12.1. Если $x_i x_j \neq 0$, то $t_{j,v} = x_v / x_j = (x_v : x_i) / (x_j : x_i) = t_{i,v} / t_{i,j}$ (при $v = i$ надо считать $t_{i,i} = 1$). Поэтому $\varphi_{ji}^* : t_{j,v} \mapsto t_{i,v} / t_{i,j}$. Обратный к φ_{ji}^* гомоморфизм $\mathbb{k}[\mathcal{D}(t_{i,j})] \rightarrow \mathbb{k}[\mathcal{D}(t_{j,i})]$ действует по той же формуле $t_j^{(i)} \mapsto 1/t_i^{(j)}$, $t_{i,v} \mapsto t_{j,v} / t_{j,i}$.

Упр. 12.2. В каждом таком W имеется единственный базис w_1, w_2, \dots, w_k , проектирующийся в стандартный базис $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ координатной k -плоскости. Матрица z , по строкам которой стоят координаты векторов w_i в стандартном базисе пространства \mathbb{k}^m , имеет $s_I(z) = E$. В GL_k -орбите каждой матрицы $x \in U_I$ также имеется единственная матрица z с $s_I(z) = E$ — именно, $z = s_I(x)^{-1} \cdot x$.

Упр. 12.3. Элементы $k \times m$ -матрицы $s_J^{-1}(\varphi_I(t)) \cdot \varphi_I(t)$ являются рациональными функциями от элементов матрицы t со знаменателями $\det s_J(\varphi_I(t))$ и, стало быть, регулярны в $\mathcal{D}(\det s_J(\varphi_I(t)))$. Поэтому отображение φ_{JI} , переводящее эту матрицу в её $k \times (m-k)$ -подматрицу, образованную столбцами с не лежащими в J номерами, регулярно. Обратное отображение задаётся той же формулой: $t \mapsto s_I(s_I^{-1}(\varphi_J(t)) \cdot \varphi_J(t))$ (удостоверьтесь в этом!).

Упр. 12.4. Это следует из определения локальной регулярной функции и зам. 11.2. на стр. 171.

Упр. 12.5. Отображение κ можно задать формулой $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1 x_2 : x_0 x_2 : x_0 x_1)$, из которой видно, что оно не определено только в точках $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ и образ κ тоже равен дополнению до этих трёх точек.

Упр. 12.6. В обозначениях из прим. 12.1 на стр. 177 пересечение множества нулей однородного многочлена $\bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ со стандартной картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ задаётся в аффинных координатах t_i карты U_i полиномиальным уравнением

$$\bar{f}(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}) = 0.$$

Упр. 12.12. Пусть $X_1, X_2 \subset X$ — два замкнутых неприводимых подмножества и $U \subset X$ — открытое множество, такое что оба пересечения $X_1 \cap U, X_2 \cap U$ непусты. Тогда $X_1 = X_2 \iff X_1 \cap U = X_2 \cap U$, поскольку $X_i = \overline{X_i \cap U}$.

Упр. 12.13. Докажите, что произведение конечных сюръекций $X \rightarrow \mathbb{A}^n, Y \rightarrow \mathbb{A}^m$ является конечной сюръекцией $X \times Y \rightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$.

Упр. 12.14. Выберите в H какой-нибудь базис, запишите координаты векторов этого базиса и координаты точки p по строкам $(n-d+1) \times (n+1)$ -матрицы. Условие $p \in H$ означает, что ранг этой матрицы равен $n-d$. Зануление всех миноров порядка $n-d+1$ является системой билинейных уравнений на плюккеровы координаты¹ подпространства H и однородные координаты точки p .

Упр. 12.16. Γ задаётся однородными по каждому f_i и по p уравнениями $f_0(p) = f_1(p) = \dots = f_n(p) = 0$.

Упр. 12.17. Возьмите $n+1$ гиперплоскостей, пересекающихся в одной точке, и возведите задающие их линейные формы в подходящие степени.

¹напомню, что плюккеровыми координатами подпространства являются старшие миноры матрицы, составленной из координат какого-нибудь базиса в этом подпространстве

Упр. 12.19. Вложим $\text{Gr}(2, 4)$ в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ по Плюккеру. Прямая (a, b) лежит на поверхности $V(f)$, если и только если многочлен f тождественно зануляется на линейной оболочке векторов a и b , которая является образом свёртки $V^* \rightarrow V$ с бивектором $a \wedge b$. Убедитесь, что условие тождественного по $\xi \in V^*$ зануления функции $\xi \mapsto f(\xi \lrcorner (a \wedge b))$ записывается системой однородных полиномиальных уравнений на коэффициенты f и плюккеровы координаты бивектора $a \wedge b$.