§8. Представления симметрических групп

8.1. Действие S_n на заполненных диаграммах Юнга. Будем называть диаграмму Юнга λ, в каждой клетке которой стоит какая-нибудь буква[1] алфавита $\{1, \dots, m\}$ *заполнением* формы λ. Заполнение T называется *стандартным*, если число букв совпадает с числом клеток диаграммы: $m = |\lambda|$, и каждая буква используется ровно один раз. Заполнение T называется *таблицей*, если его символы нестрого возрастают слева направо вдоль строк диаграммы и строго возрастают сверху вниз вдоль столбцов. Число всех таблиц формы λ в алфавите $\{1, \dots, m\}$ мы обозначаем через $d_\lambda(m)$, а число стандартных таблиц формы λ — через d_λ. Числа $d_\lambda(m)$ отличны от нуля только для диаграмм из $\leqslant m$ строк. Как мы видели в прим. 4.1 на стр. 50

$$\sum_\lambda d_\lambda \cdot d_\lambda(m) = m^n \quad \text{и} \quad \sum_\lambda d_\lambda^2 = n!\,, \tag{8-1}$$

где суммирование идёт по всем n-клеточным диаграммам Юнга. С каждым стандартным заполнением T формы $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ и веса $\sum \lambda_i = n$ связаны две подгруппы $R_T, C_T \subset S_n$, которые мы будем называть *строчной* и *столбцовой* подгруппами заполнения T. Строчная подгруппа R_T состоит из всех перестановок, сохраняющих содержимое каждой строки заполнения T. Аналогично, столбцовая подгруппа C_T состоит из всех перестановок, сохраняющих содержимое каждого столбца. Таким образом, $R_T \simeq S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_k}$ и $C_T \simeq S_{\lambda_1^t} \times S_{\lambda_2^t} \times \dots \times S_{\lambda_m^t}$, где $\lambda^t = (\lambda_1^t, \lambda_2^t, \dots, \lambda_m^t)$ здесь и всюду далее означает транспонированную к λ диаграмму.

Упражнение 8.1. Убедитесь в том, что симметрическая группа S_n транзитивно действует перестановками букв на стандартных заполнениях фиксированной формы λ и что $R_{gT} = gR_Tg^{-1}$ и $C_{gT} = gC_Tg^{-1}$ для любой перестановки $g \in S_n$.

Напомним[2], что диаграмма λ *доминирует* диаграмму μ, если

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \geqslant \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}\,.$$

В этом случае мы пишем $\lambda \trianglerighteq \mu$. Если диаграмма λ лексикографически больше диаграммы μ, мы пишем $\lambda > \mu$. Отметим, что в этом случае диаграмма μ не может доминировать диаграмму λ.

Лемма 8.1

Если форма μ стандартного заполнения U не является строго доминирующей над формой λ стандартного заполнения T одного и того же веса $|\mu| = |\lambda|$, то имеет место ровно одна из двух взаимоисключающих возможностей:

- либо найдутся два числа, стоящие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения U
- либо $\lambda = \mu$ и $pT = qU$ для некоторых $p \in R_T$ и $q \in C_U$.

[1] при этом могут использоваться не все буквы, а используемые буквы могут повторяться

[2] см. формулу (4-13) на стр. 54

Доказательство. Пусть все элементы каждой из строк заполнения T находятся в разных столбцах заполнения U. Из того, что все элементы первой строки T лежат в разных столбцах U, вытекает неравенство $\lambda_1 \leqslant \mu_1$ и существование перестановки $q_1 \in C_U$, переводящей все элементы из первой строки заполнения T в первую строку заполнения q_1U. Из того, что все элементы второй строки T тоже лежат в разных столбцах U, вытекает существование такой не затрагивающей элементов из первой строки заполнения T перестановки $q_2 \in C_{q_1U} = C_U$, что в заполнении q_2q_1U каждый элемент второй строки заполнения T стоит либо во второй строке, либо в первой[1], что влечёт неравенство $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \mu_1 + \mu_2$. Продолжая в эдаком духе, мы получим такую последовательность перестановок $q_1, q_2, \dots, q_k \in C_U$, где k — количество строк в диаграмме μ, что $q_i \in C_{q_{i-1}\cdots q_1U} = C_U$ оставляет на месте все элементы из первых $i-1$ строк заполнения T, а также все элементы i-той строки T, лежащие в заполнении $q_{i-1}\cdots q_1U$ в столбцах высоты $< i$, а все остальные элементы из i-той строки T переводит в i-тую строку заполнения $q_iq_{i-1}\cdots q_1U$. В частности, при каждом i будет выполняться неравенство $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i \leqslant \mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_i$, что по условию леммы возможно только при $\lambda = \mu$. В этом случае каждая перестановка q_i переводит элементы i-той строки заполнения T в точности в i-тую строку заполнения $q_iq_{i-1}\cdots q_1U$. Поэтому $q_k\cdots q_1U = pT$ для некоторого $p \in R_T$. □

Следствие 8.1

Перестановка $g \in S_n$ тогда и и только тогда имеет вид $g = pq$ для некоторых $p \in R_T$, $q \in C_T$, когда никакие два элемента из одной строки T не лежат в одном столбце gT, и в этом случае представление перестановки $g \in S_n$ в виде $g = pq$ с $p \in R_T$ и $q \in C_T$ единственно.

Доказательство. Если $U = pqT$, где $p \in R_T$, $q \in C_T$, то элементы из одной строки T очевидно лежат в разных столбцах U. Наоборот, пусть никакие два элемента из одной строки заполнения T не лежат в одном столбце $U = gT$. По лем. 8.1 найдутся перестановки $p \in R_T$ и $q \in C_U$, такие что $pT = qU = qgT$, откуда $p = qg$. Записывая $q \in C_{gT} = gC_Tg^{-1}$ как gq_1g^{-1} с $q_1 \in C_T$, получаем $g = pq_1^{-1}$, что и требовалось. Единственность разложения $g = pq$ вытекает из того, что $R_T \cap C_T = \{e\}$. □

8.2. Симметризаторы Юнга. Элементы групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$

$$r_T = \sum_{\sigma\in R_T} \sigma\,, \quad c_T = \sum_{\sigma\in C_T} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\sigma\,, \tag{8-2}$$

$$s_T = r_T\cdot c_T = \sum_{p\in R_T}\sum_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(q)\cdot pq \tag{8-3}$$

называются, соответственно, *строчным*, *столбцовым* и *полным симметризаторами Юнга*. Они обладают следующими очевидными свойствами:

$$\forall g \in S_n \quad r_{gT} = gr_Tg^{-1}\,, \quad c_{gT} = gc_Tg^{-1} \quad \text{и} \quad s_{gT} = gs_Tg^{-1} \tag{8-4}$$

$$\forall p \in R_T \; pr_T = r_Tp = r_T \quad \text{и} \quad \forall q \in C_T \; \operatorname{sgn}(q)\cdot qc_T = \operatorname{sgn}(q)\cdot c_Tq = c_T \tag{8-5}$$

[1] последнее происходит, когда этот элемент изначально находится в столбце высоты 1

$$\forall p \in R_T \quad \text{и} \quad \forall q \in C_T \quad \operatorname{sgn}(q) \cdot p s_T q = s_T\,. \tag{8-6}$$

Замечательно, что полный симметризатор $s_T \in \mathbb{C}[S_n]$ однозначно с точностью до пропорциональности *определяется* свойством (8-6).

Лемма 8.2
Векторное подпространство $E_T = \{\sigma \in \mathbb{C}[S_n] \,|\, \forall p \in R_T\ \forall q \in C_T\ \operatorname{sgn}(q) \cdot p\sigma q = \sigma\}$ одномерно и линейно порождается симметризатором s_T.

Доказательство. Покажем, что всякий элемент $\sigma = \sum\limits_{g \in S_n} x_g g \in E_T$ равен $x_e \cdot s_T$. Условие $\operatorname{sgn}(q) \cdot p\sigma q = \sigma$ означает, что $x_{pgq} = \operatorname{sgn}(q) \cdot x_g$ для любого $g \in S_n$. Полагая $g = e$, получаем $x_{pq} = \operatorname{sgn}(q) \cdot x_e$, откуда $\sigma = x_e \cdot s_T + \sum\limits_{g \notin R_T C_T} x_g g$. Проверим, что все коэффициенты x_g в последней сумме нулевые. Если $g \notin R_T C_T$, то по сл. 8.1 найдутся два элемента, лежащие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения $U = gT$. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит и в R_T, и в $C_U = gC_T g^{-1}$. Из второго вытекает, что $g^{-1}\tau g \in C_T$. Полагая $p = \tau$, $q = g^{-1}\tau g$ в равенстве $x_{pgq} = \operatorname{sgn}(q) \cdot x_g$, получаем $x_g = -x_g$, откуда $x_g = 0$. □

Лемма 8.3
$s_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T = \mathbb{C} \cdot s_T$, причём $s_T^2 = n_\lambda \cdot s_T$, где $n_\lambda = n!/\dim\left(\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T\right)$ — положительное рациональное число, зависящее только от формы λ заполнения T.

Доказательство. Из равенств (8-5) – (8-6) вытекает, что при любом $x \in \mathbb{C}[S_n]$ элемент $s_T \cdot x \cdot s_T$ обладает свойством (8-6) и, тем самым, лежит в одномерном пространстве $E_T = \mathbb{C} \cdot s_T$ из лем. 8.2. В частности, $s_T^2 = n_T \cdot s_T$ для некоторого $n_T \in \mathbb{C}$. Чтобы найти n_T, вычислим двумя способами след оператора $\mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n]$ правого умножения на элемент $s_T : x \mapsto x \cdot s_T$. С одной стороны, из формулы (8-3) вытекает, что для любого $g \in S_n$ коэффициент при g у произведения $g \cdot s_T$ равен единице, откуда $\operatorname{tr}(s_T) = |S_n| = n!$. С другой стороны, левый идеал $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ является S_n-подмодулем левого регулярного представления S_n. Поскольку последнее вполне приводимо, существует такой S_n-подмодуль $W \subset \mathbb{C}[S_n]$, что $\mathbb{C}[S_n] = W \oplus \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$. Правое умножение на s_T переводит $W \subset \mathbb{C}[S_n]$ внутрь $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$, а на идеале $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ действует как умножение на n_T. Поэтому $\operatorname{tr}(s_T) = n_T \cdot \dim\left(\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T\right)$. Следовательно, $n_T = n!/\dim\left(\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T\right)$ рационально и положительно. Поскольку $s_{gT} = g s_T g^{-1} \Rightarrow s_{gT}^2 = g s_T^2 g^{-1} = n_T g s_T g^{-1} = n_T s_{gT}$, число $n_T = n_{\lambda(T)}$ зависит только от формы $\lambda = \lambda(T)$ заполнения T. □

Лемма 8.4
Если форма заполнения T лексикографически больше формы заполнения U, то

$$r_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot c_U = c_U \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot r_T = s_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot s_U = 0\,.$$

Доказательство. Достаточно показать, что $r_T \cdot g \cdot c_U = c_U \cdot g \cdot r_T = 0$ для всех $g \in S_n$. Пусть для начала $g = e$. По лем. 8.1 какие-то два элемента из одной строки заполнения T лежат в одном столбце заполнения U. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит как в R_T, так и в C_U. Поэтому $r_T \cdot c_U = (r_T \cdot \tau) \cdot c_U = r_T \cdot (\tau \cdot c_U) = -r_T \cdot c_U$ и

$c_U \cdot r_T = -(c_U \cdot \tau) \cdot r_T = -c_U \cdot (\tau \cdot r_T) = -c_U \cdot r_T$, откуда $r_T \cdot c_U = c_U \cdot r_T = 0$. Теперь и для любого $g \in S_n$ получаем $r_T \cdot g \cdot c_U = r_T \cdot g c_U g^{-1} \cdot g = \left(r_T \cdot c_{gU}\right) \cdot g = 0$ и $c_U \cdot g \cdot r_T = c_U \cdot g r_T g^{-1} \cdot g = \left(c_U \cdot r_{gT}\right) \cdot g = 0$. □

Теорема 8.1

Представление S_n левыми умножениями в идеале $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ неприводимо. Два таких представления V_T и V_U изоморфны тогда и только тогда, когда заполнения T и U имеют одинаковую форму $\lambda = \lambda(T) = \lambda(U)$. Если для каждой n-клеточной диаграммы Юнга λ произвольным образом зафиксировать некоторое стандартное заполнение T_λ, то неприводимые представления $V_\lambda = V_{T_\lambda}$ составят полный список попарно неизоморфных неприводимых представлений S_n.

Доказательство. Пусть $W \subset V_T$ является S_n-инвариантным подмодулем. Перестановочный с левым умножением на S_n проектор $\pi_W : \mathbb{C}[S_n] \twoheadrightarrow W$ представляет собою оператор правого умножения на элемент $w = \pi(1) \in W$, поскольку $\pi_W(x) = \pi_W(x \cdot 1) = x \cdot \pi_W(1) = x \cdot w$ для всех $x \in \mathbb{C}[S_n]$. Так как $s_T \cdot W \subset s_T \cdot V_T = s_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T = \mathbb{C} \cdot s_T$, для левого действия элемента s_T на подмодуле W имеются ровно две возможности: либо $s_T \cdot W = 0$, либо $s_T \cdot W = \mathbb{C} \cdot s_T$. В первом случае $W \cdot W \subset V_T \cdot W = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T \cdot W = 0$, откуда $w \cdot w = 0$. Следовательно, правое умножение на w аннулирует левый идеал $W = \mathbb{C}[S_n] \cdot w$, а значит, $W = 0$. Во втором случае $s_T \in s_T \cdot W \subset W$, откуда $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T \subset W$, т. е. $W = V_T$. Таким образом, модуль V_T неприводим. Если заполнения T и U имеют разные формы — скажем, форма заполнения T лексикографически больше формы заполнения U, то по лем. 8.4 левое умножение на s_T аннулирует модуль V_U, тогда как на модуле V_T оно согласно лем. 8.3 действует нетривиально: элемент $s_T \in V_T$ является собственным вектором левого умножения на s_T с ненулевым собственным значением $n_{\lambda(T)}$. Поэтому представления V_T и V_U не изоморфны. Отсюда следует последнее утверждение теоремы: число попарно неизоморфных неприводимых представлений V_{T_λ} равно числу классов сопряжённости в S_n. Если заполнение U имеет ту же форму λ, что и T_λ, то неприводимое представление V_U, будучи неизоморфным ни одному из представлений V_{T_μ} с $\mu \neq \lambda$, изоморфно именно представлению V_{T_λ}. □

8.2.1. Симметризаторы $s'_T = c_T \cdot r_T$. Множества $R_T C_T$ и $C_T R_T$, вообще говоря, различны. Например, для стандартного заполнения

$$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

они различаются содержащимся в них циклом длины три: в $R_T C_T$ это цикл $|12\rangle \circ |13\rangle = |132\rangle$, а в $C_T R_T$ — цикл $|13\rangle \circ |12\rangle = |123\rangle$. Поэтому перестановка сомножителей в формуле (8-3) приводит к вообще говоря отличному от $s_T = r_T \cdot c_T$ симметризатору

$$s'_T = c_T \cdot r_T = \sum_{p \in R_T} \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) \cdot qp\,, \tag{8-7}$$

получающемуся из s_T применением *антиподального антиавтоморфизма*

$$\alpha : \mathbb{C}[S_n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[S_n]\,, \quad g \mapsto g^{-1} \quad \text{для } g \in G\,,$$

оставляющего r_T и c_T на месте и оборачивающего порядок сомножителей в произведениях.

Упражнение 8.2. Сформулируйте и докажите для симметризатора s'_T аналоги соотношений (8-6), лем. 8.4, лем. 8.3 и теор. 8.1.

Предложение 8.1
Представления S_n левыми умножениями в идеалах $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ и $V'_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s'_T$ изоморфны.

Доказательство. Операторы правого умножения на c_T и r_T являются гомоморфизмами левых S_n-модулей

$$V'_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot c_T r_T \underset{x \cdot r_T \leftarrow\!\shortmid x}{\overset{x \mapsto x \cdot c_T}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}[S_n] \cdot r_T c_T = V_T$$

Композиция $x \mapsto x \cdot r_T c_T = x \cdot s_T$ действует на $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ умножением на ненулевую константу $n_{\lambda(T)}$. Таким образом, операторы правого умножения на $n_\lambda^{-1/2} c_T$ и $n_\lambda^{-1/2} r_T$ являются взаимно обратными изоморфизмами представлений. □

Следствие 8.2
Неприводимые представления V_λ и V_{λ^t}, отвечающие транспонированным диаграммам λ и λ^t, получаются друг из друга тензорным умножением на одномерное знаковое представление.

Доказательство. Фиксируем какое-либо стандартное заполнение T формы λ и транспонированное заполнение T^t транспонированной диаграммы λ^t. Тогда $R_{T^t} = C_T$, $C_{T^t} = R_T$ и $s_{T^t} = \sum_{p \in R_T} \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(p) \cdot qp = \sum_{p \in R_T} \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) \cdot \operatorname{sgn}(pq) \cdot qp = \sigma\left(s'_T\right)$, где $\sigma : \mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n]$ обозначает *знаковый автоморфизм* групповой алгебры, действующий на базис g по правилу $g \mapsto \operatorname{sgn}(g) \cdot g$. Тензорное произведение представления V_λ на одномерное знаковое представление изоморфно представлению S_n в пространстве $V'_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s'_T$, заданному правилом $g : x \cdot s'_T \mapsto \operatorname{sgn}(g) \cdot gx \cdot s'_T$. Знаковый автоморфизм σ изоморфно отображает это пространство на $V_{\lambda^t} = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_{T^t}$, превращая последнее действие в левое умножение на $g : \sigma(x) \cdot s_{T^t} \mapsto g\sigma(x) \cdot s_{T^t}$. □

8.3. Модуль таблоидов. Орбита стандартного заполнения T под действием строчной подгруппы R_T называется *таблоидом* формы λ и обозначается через $\{T\}$. Действие симметрической группы $g : T \mapsto gT$ на заполнениях корректно спускается до действия $g : \{T\} \mapsto \{gT\}$ на таблоидах: $gR_T T = gR_T g^{-1} gT = R_{gT} gT$. Возникающее таким образом перестановочное представление S_n на пространстве формальных комплексных линейных комбинаций таблоидов формы λ называется *модулем таблоидов* и обозначается M_λ. Так как таблоиды формы λ биективно соответствуют левым смежным классам $gR_T \in S_n / R_T$ и действие S_n на таблоидах совпадает с действием на смежные классы, модуль таблоидов изоморфен представлению, индуцированному с тривиального одномерного представления подгруппы $R_T \subset S_n$: $M_\lambda \simeq \operatorname{ind}_{R_T}^{S_n} \mathbb{1}$.

Упражнение 8.3. Покажите, что представление S_n в пространстве M_λ изоморфно представлению S_n левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n] \cdot r_T$.

8.3.1. Характер модуля $\boldsymbol{M}_\lambda$ принято обозначать через ψ_λ. Чтобы его описать, рассмотрим класс сопряжённости $C_\mu \in \mathrm{Cl}(S_n)$, состоящий из всех перестановок циклового типа μ, и обозначим через m_j число строк длины j в диаграмме μ.

Предложение 8.2
Значение $\psi_\lambda(C_\mu)$ равно коэффициенту при m_λ в разложении симметрического многочлена Ньютона[1] $p_\mu(x) = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \cdots p_n(x)^{m_n}$ по стандартному мономиальному базису[2] m_λ .

Доказательство. Так как m_i-тая степень i-той степенной суммы Ньютона имеет вид

$$p_i(x)^{m_i} = \left(x_1^i + x_2^i + \cdots + x_n^i\right)^{m_i} = \sum_{\sum\limits_j \varrho_{ij} = m_i} \frac{m_i!}{\varrho_{i1}!\,\varrho_{i2}! \cdots \varrho_{in}!} x_1^{i\cdot\varrho_{i1}} x_2^{i\cdot\varrho_{i2}} \cdots x_n^{i\cdot\varrho_{in}}$$

коэффициент при $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}$ у $p_\mu(x) = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \cdots p_n(x)^{m_n}$ равен

$$\sum_{\varrho_{ij}} \frac{m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_n!}{\prod\limits_{ij} \varrho_{ij}!}\,, \tag{8-8}$$

где суммирование идёт по всем таким наборам целых чисел $\varrho_{ij} \geqslant 0$, что

$$\sum_j \varrho_{ij} = m_i \quad \text{и} \quad \sum_i i \cdot \varrho_{ij} = \lambda_j\,. \tag{8-9}$$

С другой стороны, согласно установленной в предл. 7.5 на стр. 95 формуле (7-23) для характера индуцированного представления,

$$\psi_\lambda(C_\mu) = [S_n : R_T] \cdot |C_\mu \cap R_T| / |C_\mu|\,, \tag{8-10}$$

где $[S_n : R_T] = n!/\prod\limits_j \lambda_j!\,$, $|C_\mu| = n!/\prod\limits_i i^{m_i} m_i!$, а пересечение $C_\mu \cap R_T$ состоит из непересекающихся классов R_T-сопряжёности D_ϱ, образованных всеми перестановками σ циклового типа μ, в которых ϱ_{ij} из m_i циклов длины i заполнены элементами из j-той строки заполнения T. Нумерующие эти классы наборы $\varrho = \{\varrho_{ij}\}$ состоят из неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих условиям (8-9).

Упражнение 8.4. Убедитесь, что каждое множество перестановок D_ϱ циклового типа μ и в самом деле представляет собою ровно один класс R_T-сопряжённости.

При сопряжении группой R_T стабилизатор перестановки $\sigma \in \Delta_\varrho$ состоит из $\prod \varrho_{ij}!$ независимых перестановок циклов одинаковой длины между собою и $\prod i^{m_i}$ независимых циклических перестановок внутри самих циклов, так что

$$|C_\mu \cap R_T| \sum_\varrho |D_\varrho| = \sum_\varrho \prod_j \lambda_j! / \prod_{ij} i^{m_i} \varrho_{ij}!\,.$$

Подставляя эти значения в (8-10), после сокращений получаем в точности сумму (8-8), что и требовалось. □

[1] см. формулу (3-14) на стр. 36
[2] см. формулу (3-3) на стр. 32

8.4. Модуль Шпехта. Для каждого заполнения T формы λ рассмотрим в модуле таблоидов M_λ вектор

$$v_T = c_T\{T\} = \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) \cdot \{qT\}\,. \tag{8-11}$$

Поскольку ни при каком $q \in C_T$ никакие два элемента из одного столбца T не могут оказаться в одной строке qT, равенство $q_1T = pq_2T$ невозможно ни при каких $q_1, q_2 \in C_T$ и $p \in R_{q_2T}$, т. е. все слагаемые в правой сумме (8-11) суть *различные* базисные векторы пространства таблоидов M_λ, взятые с коэффициентами ± 1. В частности, каждый из векторов v_T отличен от нуля.

Линейная оболочка векторов (8-11), полученных из всех возможных заполнений T формы λ, является S_n-подмодулем в M_λ, поскольку для всех $g \in S_n$

$$gv_T = gc_T\{T\} = gc_Tg^{-1}\{gT\} = c_{gT}\{gT\} = v_{gT}.$$

Этот подмодуль обозначается S_λ и называется *модулем Шпехта*.

Лемма 8.5

Если форма λ заполнения T не является строго доминирующей диаграмму μ, то

$$c_TM_\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \lambda \\ \mathbb{C} \cdot v_T & \text{при } \mu = \lambda\,. \end{cases}$$

Доказательство. Если в пересечении $R_U \cap C_T$ имеется хоть одна транспозиция τ, то

$$c_T\{U\} = c_T\{\tau U\} = c_T \cdot \tau\{U\} = -c_T\{U\}\,, \tag{8-12}$$

откуда $c_T\{U\} = 0$. Если в условиях нашей леммы такой транспозиции нет, то по лем. 8.1 на стр. 98 заполнения U и T имеют одинаковую форму λ и $pU = qT$ для некоторых $p \in R_U$ и $q \in C_T$. В этом случае $c_T\{U\} = c_T\{pU\} = c_T\{qT\} = \operatorname{sgn}(q) \cdot c_T\{T\} = \pm v_T$, что и утверждалось. □

Теорема 8.2

Модуль Шпехта S_λ изоморфен неприводимому представлению V_λ левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$, построенному по произвольному заполнению T формы λ.

Доказательство. Покажем сначала, что S_λ неприводим. Пусть имеется разложение $S_\lambda = V \oplus W$ в сумму S_n-подмодулей. Тогда оператор c_T, построенный по заполнению T формы λ, переводит каждое из слагаемых в себя. Поскольку по лем. 8.5

$$c_TS_\lambda \subset c_T \cdot M_\lambda = \mathbb{C} \cdot v_T\,,$$

ненулевой вектор v_T лежит ровно в одном из слагаемых — скажем, в V. Но тогда V содержит и все остальные векторы $v_{gT} = gv_T$, а значит, совпадает с S_λ. При $\mu \neq \lambda$ неприводимые представления S_λ и S_μ не изоморфны: скажем, если λ лексикографически меньше μ, то по лем. 8.5 оператор c_T аннулирует модуль $S_\mu \subset M_\mu$, а на модуле S_λ действует нетривиально, т. к. $c_Tv_T = c_Tc_T\{T\} = |C_T| \cdot c_T\{T\} = |C_T| \cdot v_T$. Из сказанного вытекает, что модуль S_λ изоморфен ровно одному из неприводимых представлений $V_\mu = \mathbb{C}[S_n] \cdot r_Uc_U$, где U — произвольное заполнение формы μ. Поскольку по лем. 8.4 левое умножение на c_T аннулирует все идеалы V_μ с лексикографически меньшими λ диаграммами μ, мы заключаем, что $S_\lambda \simeq V_\lambda$. □

Следствие 8.3
В разложении представления M_λ в прямую сумму неприводимых встречаются только модули S_μ с $\mu \rhd \lambda$, а также модуль S_λ, входящий в это разложение с кратностью 1.

Доказательство. Поскольку оператор c_T переводит M_λ внутрь S_λ и нетривиально действует на S_λ, никаких других прямых слагаемых, изоморфных S_λ, в M_λ нет, т. е. S_λ входит в M_λ с кратностью 1. Если существует инъективный гомоморфизм $S_\mu \to M_\lambda$, то оператор c_U, отвечающий произвольному заполнению U формы μ, должен нетривиально действовать на M_λ. Но если $\mu \neq \lambda$ не является строго доминирующим над λ, то $c_U M_\lambda = 0$ по лем. 8.5. □

8.4.1. Табличный базис модуля Шпехта. Назовём *столбцовой развёрткой* заполнения T диаграммы λ слово, которое получится при прочтении заполнения T по столбцам, так что каждый столбец читается снизу вверх, а сами столбцы перебираются слева направо. Например, столбцовая развёртка стандартной таблицы

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}$$

это слово 21534. Линейно упорядочим все стандартные заполнения T формы λ, полагая $T \succ U$, если наибольшее из чисел, стоящих в заполнениях T и U в разных клетках, встречается в столбцовой развёртке заполнения T раньше, чем в столбцовой развёртке заполнения U.

Упражнение 8.5. Проверьте, что это отношение транзитивно.

Например, 120 стандартных заполнений формы $\begin{array}{|c|c|}\hline \ &\ \\\hline \ &\ \\\hline \ \\\cline{1-1}\end{array}$ выстроятся по убыванию так:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 4&2\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\\hline 4&1\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 4&3\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 4&3\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 4&1\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 4&2\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 4&1\\\hline 3&2\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array} \succ \cdots$$

$$\cdots \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 4&5\\\hline 2&3\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&5\\\hline 2&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\\hline 1&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\\hline 3&4\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&5\\\hline 3&4\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\\hline 1&4\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\\hline 2&4\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}.$$

Главная особенность введённого порядка состоит в том, что для любой *стандартной таблицы*[1] T и любых $p \in R_T$ и $q \in C_T$ выполняются строгие неравенства $pT \succ T \succ qT$, ибо самое большое число в любом цикле перестановки p сдвигается влево, а самое большое число в любом цикле перестановки q сдвигается вверх. В частности, каждая стандартная таблица T является минимальным элементом своей R_T-орбиты $R_T T$. Из этого вытекает, что для любого заполнения $U \prec T$ таблоид $\{U\} \neq \{T\}$ в модуле M_λ.

Упражнение 8.6. Покажите, что $c_T\{U\} = 0$ для любых двух стандартных таблиц U, T, таких что $U \succ T$.

Теорема 8.3
Векторы v_T, где T пробегает множество стандартных таблиц формы λ, образуют базис модуля Шпехта S_λ. В частности, $\dim S_\lambda = d_\lambda$.

[1] см. n° 8.1 на стр. 98

Доказательство. Покажем, что d_λ векторов v_T, построенных по всем стандартным таблицам T, линейно независимы. Выражение вектора $v_T = \sum\limits_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(q)\cdot\{qT\}$ через базисные векторы $\{U\}$ пространства M_λ имеет вид $v_T = \{T\} + \sum\limits_{U\prec T} \varepsilon_U\cdot\{U\}$, где $\varepsilon_U = -1, 0, 1$, а всякая линейная зависимость между ними может быть записана в виде[1] $v_T = \sum\limits_{U\prec T} x_U\cdot v_U$. Раскладывая векторы v_T и v_U по базису из таблоидов, мы получаем равенство вида $\{T\} = \sum\limits_{U\prec T} y_U\cdot\{U\}$, невозможное в силу того, что $\{T\}\neq\{U\}$ ни для какого $U\prec T$. Из линейной независимости векторов v_T вытекает неравенство $\dim S_\lambda \geqslant d_\lambda$. С другой стороны, второе равенство из форм. (8-1) на стр. 98 и соотношение на сумму квадратов размерностей неприводимых представлений из сл. 5.6 на стр. 74 влекут равенство $\sum d_\lambda^2 = n! = \sum \dim^2 S_\lambda$. Поэтому $\dim S_\lambda = d_\lambda$. □

8.5. Кольцо представлений симметрических групп. Обозначим через $\mathfrak{R}_n$ аддитивную абелеву группу классов изоморфных представлений симметрической группы S_n, т. е. свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом $[V_\lambda]$, где V_λ пробегает множество представителей всех классов изоморфных *неприводимых* представлений S_n, так что каждое неприводимое представление S_n изоморфно одному и только одному представлению V_λ. Иначе $\mathfrak{R}_n$ можно описать как целочисленную линейную оболочку неприводимых характеров S_n в пространстве функций $S_n \to \mathbb{C}$. Положим также $\mathfrak{R}_0 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Z}$. Мы собираемся снабдить прямую сумму

$$\mathfrak{R} \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathfrak{R}_n$$

структурой *градуированного*[2] коммутативного кольца с единицей. Подчеркнём, что градуированное умножение на кольце $\mathfrak{R}$, которое мы сейчас введём, будет *отличаться* от обсуждавшегося в n° 7.2.2 на стр. 92 умножения $[U], [W] \mapsto [U\otimes W]$, имеющегося на каждом из $\mathfrak{R}_n$ в отдельности.

8.5.1. Умножение в кольце $\mathfrak{R}$. Каждая пара представлений $\varphi : S_k \to \mathrm{GL}(U)$ и $\psi : S_m \to \mathrm{GL}(W)$ задаёт представление

$$\varphi\times\psi : S_k\times S_m \to \mathrm{GL}(U\otimes W)\,, \quad (g,h) : u\otimes w \mapsto gu\otimes hw\,. \tag{8-13}$$

Вложим $S_k\times S_m$ в S_{k+m} в качестве подгруппы, сохраняющей разбиение

$$\{1,\,2,\,\dots\,,\,k+m\} = \{1,\,2,\,\dots\,,\,k\}\sqcup\{k+1,\,k+2,\,\dots\,,\,k+m\}\,, \tag{8-14}$$

образуем представление $\operatorname{ind}(\varphi\times\psi)$ группы S_{k+m}, индуцированное представлением (8-13), и положим $[\varphi]\cdot[\psi] \overset{\text{def}}{=} [\operatorname{ind}(\varphi\times\psi)]$. Если вместо разбиения (8-14) воспользоваться другим разбиением $\{1,\dots,k+m\} = I\sqcup J$ на непересекающихся подмножества из k и m элементов, получится другая подгруппа $S_k\times S_m \subset S_{k+m}$, сопряжённая к использованной выше, и представление $\operatorname{ind}(\varphi\times\psi)$, индуцированное с этой подгруппы, будет изоморфно предыдущему.

Упражнение 8.7. Убедитесь в этом.

[1] для этого надо оставить слева ненулевой член с максимальным индексом T, а все остальные члены перенести направо

[2] т. е. такого, что $\mathfrak{R}_k\cdot\mathfrak{R}_m \subset \mathfrak{R}_{k+m}$

Таким образом, класс $[\varphi]\cdot[\psi]$ не зависит от выбора разбиения (8-14), используемого для его построения. В частности, умножение (8-13) коммутативно. Его ассоциативность вытекает из того, что для любых трёх представлений ξ, η и ζ групп S_k, S_ℓ и S_m, оба класса $([\xi]\cdot[\eta])\cdot[\zeta]$ и $[\xi]\cdot([\eta]\cdot[\zeta])$ совпадают с классом представления S_{m+n+k}, индуцированного с представления подгруппы $S_k\times S_\ell\times S_m \subset S_{m+n+k}$ в тензорном произведении пространств представлений ξ, η и ζ по правилу

$$(g_1,g_2,g_3)\mapsto \xi(g_1)\otimes\eta(g_2)\otimes\zeta(g_3).$$

Упражнение 8.8. Убедитесь в этом.

Дистрибутивность умножения по отношению к прямым суммам представлений следует из дистрибутивности тензорных произведений.

Лемма 8.6
Кольцо $\mathfrak{R}$ изоморфно кольцу многочленов с целыми коэффициентами от счётного числа переменных, отвечающих классам тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_k]$ групп S_k для всех $k\in\mathbb{N}$. При этом классы модулей таблоидов

$$[M_\lambda]=[\mathbb{1}_{\lambda_1}]\cdot[\mathbb{1}_{\lambda_2}]\cdot\,\cdots\,\cdot[\mathbb{1}_{\lambda_n}]=[\mathbb{1}_1]^{\ell_1}[\mathbb{1}_2]^{\ell_2}\cdots[\mathbb{1}_n]^{\ell_n},$$

где ℓ_i обозначает количество строк длины i в диаграмме λ, образуют базис кольца $\mathfrak{R}$ как модуля над $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Из сл. 8.3 вытекает, что классы таблоидных представлений $[M_\lambda]$ выражаются через неприводимые классы $[S_\lambda]$ при помощи верхней треугольной матрицы с целыми коэффициентами и единицами по главной диагонали. Поэтому классы $[M_\lambda]$ образуют базис $\mathfrak{R}$ как модуля над $\mathbb{Z}$. Поскольку представление M_λ, отвечающее диаграмме $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$, индуцировано с тривиального одномерного представления подгруппы $S_{\lambda_1}\times S_{\lambda_2}\times\cdots S_{\lambda_n}\subset S_{|\lambda|}$, класс $[M_\lambda]$ является произведением классов тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_{\lambda_i}]$ групп S_{λ_i}. Вместе с тем $[\mathbb{1}_{\lambda_i}]=[M^{(\lambda_i)}]$ это тоже модуль таблоидов, состоящих из одной строки длины λ_i. Поэтому совокупность мономов от классов тривиальных представлений в точности совпадает с совокупностью классов модулей таблойдов, а их формальное перемножение как мономов, совпадает с умножением в кольце $\mathfrak{R}$. □

8.5.2. Скалярное произведение в кольце $\mathfrak{R}$. Обозначим через $([U],[W])$ евклидово скалярное произведение на $\mathfrak{R}$, для которого базис из классов неприводимых представлений $[V_\lambda]$ является ортонормальным. Сумма $\mathfrak{R}=\bigoplus\mathfrak{R}_k$ является ортогональной относительно такого скалярного произведения, а для любых двух классов

$$[U]=\sum_{|\lambda|=n}k_\lambda\cdot[V_\lambda]\quad\text{и}\quad[W]=\sum_{|\lambda|=n}m_\lambda\cdot[V_\lambda],$$

лежащих в одной и той же компоненте $\mathfrak{R}_n$, выполняется равенство

$$([U],[W])=\sum_{|\lambda|=n}k_\lambda m_\lambda=\dim\operatorname{Hom}_{S_n}(U,W)=\left(\chi_U,\chi_W\right)_n, \tag{8-15}$$

где $\left(\chi_U, \chi_W\right)_n$ означает скалярное произведение характеров в алгебре функций $\mathbb{C}^{S_n}$. Для каждой диаграммы μ обозначим через m_i число её строк длины i и положим

$$z_\mu = \prod_i m_i! \cdot i^{m_i}, \tag{8-16}$$

так что число элементов в классе сопряжённости $C_\mu \subset S_n$, состоящем из всех перестановок циклового типа μ, равно $|C_\mu| = n!/z_\mu$. В силу зам. 7.2. на стр. 90 скалярное произведение характеров в правой части (8-15) переписывается в виде

$$\frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n}\chi_U(g)\chi_W(g) = \frac{1}{n!}\sum_\mu |C_\mu|\cdot\chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu) = \sum_\mu z_\mu^{-1}\cdot\chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu).$$

Таким образом, скалярное произведение классов представлений $[U], [W] \in \mathfrak{R}_n$ равно

$$([U],[W]) = \sum_\mu z_\mu^{-1}\cdot\chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu). \tag{8-17}$$

8.5.3. Изоморфизм кольца $\mathfrak{R}$ с кольцом симметрических функций. В n° 4.6 на стр. 59 мы ввели на кольце Λ симметрических функций с целыми коэффициентами скалярное произведение $\langle *, * \rangle$, для которого базис из полиномов Шура s_λ является ортонормальным, базис из полных симметрических функций h_λ является двойственным к мономиальному базису m_λ, а полиномы Ньютона p_λ образуют ортогональный базис векторного пространства $\mathbb{Q}\otimes\Lambda$ со скалярными квадратами $\langle p_\lambda, p_\lambda \rangle = z_\lambda$. Согласно предл. 8.2 на стр. 103 значения $\psi_\lambda(C_\mu)$ характера ψ_λ таблоидного представления M_λ совпадают с коэффициентами разложения ньютоновской симметрической функции p_μ по мономиальному базису m_λ:

$$p_\mu = \sum_\lambda \psi_\lambda(C_\mu)\cdot m_\lambda,$$

а значит, равны скалярным произведениям симметрических функций p_λ с элементами двойственного к мономиальному базиса из полных симметрических многочленов: $\psi_\lambda(C_\mu) = \left\langle p_\mu, h_\lambda \right\rangle$, которые в свою очередь являются коэффициентами разложения полных симметрических многочленов h_λ по ортогональному базису $z_\mu^{-1}\cdot p_\mu$:

$$h_\lambda = \sum_\mu z_\mu^{-1}\left\langle p_\mu, h_\lambda \right\rangle p_\mu = \sum_\mu z_\mu^{-1}\cdot\chi_{M_\lambda}(C_\mu)\cdot p_\mu. \tag{8-18}$$

Сравнение равенств (8-18) и (8-17) подсказывает следующий результат:

Теорема 8.4
Существует изометрический изоморфизм колец $\mathrm{ch} : \mathfrak{R} \xrightarrow{\sim} \Lambda$, переводящий классы таблоидных представлений $[M_\lambda]$ в полные симметрические многочлены h_λ, классы неприводимых представлений $[S_\lambda]$ — в многочлены Шура s_λ, а инволюцию на классах представлений, заданную тензорным умножением на одномерное знаковое представление, — в каноническую инволюцию[1] ω на Λ, переводящую друг в друга s_λ и s_{λ^t},

[1] см. сл. 4.2 на стр. 58

а также h_λ и e_λ. Этот изоморфизм корректно задаётся формулой[1]

$$\operatorname{ch}([U]) \overset{\text{def}}{=} \sum_\mu z_\mu^{-1} \cdot \chi_U(C_\mu) \cdot p_\mu \,. \tag{8-19}$$

Доказательство. Отображение (8-19) очевидно линейно по $[U]$:

$$\operatorname{ch}([U]+[W]) = \operatorname{ch}([U \oplus W]) = \sum_\mu z_\mu^{-1} \cdot \chi_{U\oplus W}(C_\mu) \cdot p_\mu =$$
$$= \sum_\mu z_\mu^{-1} \cdot \big(\chi_U(C_\mu) + \chi_W(C_\mu)\big) \cdot p_\mu = \operatorname{ch}([U]) + \operatorname{ch}([W])\,.$$

Согласно лем. 8.6 на стр. 107 и сл. 3.4 на стр. 36 оба кольца $\mathfrak{R}$ и Λ являются кольцами многочленов от счётного числа переменных: первое — от классов тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_k]$ групп S_k, второе — от простейших полных симметрических многочленов[2] h_k (в обоих случаях k пробегает $\mathbb{N}$). В силу соотношения (8-18) отображение ch переводит каждый базисный моном

$$[M_\lambda] = [\mathbb{1}_{\lambda_1}] \cdot [\mathbb{1}_{\lambda_2}] \cdot \cdots \cdot [\mathbb{1}_{\lambda_n}] = [\mathbb{1}_1]^{\ell_1}[\mathbb{1}_2]^{\ell_2} \cdots [\mathbb{1}_n]^{\ell_n}$$

(где ℓ_i есть количество строк длины i в диаграмме λ) в базисный моном

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdot h_{\lambda_2} \cdot \cdots \cdot h_{\lambda_n} = h_1^{\ell_1} h_2^{\ell_2} \cdots h_n^{\ell_n}$$

с сохранением мультипликативной структуры, ибо $\operatorname{ch}\big([\mathbb{1}_k]\big) = h_k$. Тем самым, отображение (8-19) является корректно определённым изоморфизмом колец. Ортогональность отображения ch вытекает из формулы (8-17) и того, что полиномы Ньютона p_λ образуют в ортогональный базис $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ со скалярными квадратами $\langle\, p_\lambda \,,\, p_\lambda \,\rangle = z_\lambda$:

$$\langle\, \operatorname{ch}([U])\,,\, \operatorname{ch}([W]) \,\rangle = \sum_{\lambda,\mu} z_\lambda^{-1} z_\mu^{-1} \cdot \chi_U(C_\lambda)\chi_W(C_\mu) \cdot \big\langle\, p_\mu \,,\, p_\lambda \,\big\rangle =$$
$$= \sum_\mu z_\mu^{-1} \cdot \chi_U(g)\chi_W(g) = ([U],[W])\,.$$

Из сл. 8.3 на стр. 105 вытекает, что ортонормальный базис $[S_\lambda]$ выражается через таблоидный базис $[M_\lambda]$ при помощи нижней унитреугольной матрицы:

$$[S_\lambda] = [M_\lambda] + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda}[M_\mu]\,.$$

Согласно форм. (4-21) на стр. 58 полные симметрические многочлены h_λ выражаются через многочлены Шура s_λ также при помощи нижней унитреугольной матрицы[3]

$$h_\lambda = \sum_\mu K_{\mu,\lambda} \cdot s_\mu = s_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} K_{\mu,\lambda} \cdot s_\mu\,.$$

[1] не смотря на то, что она содержит знаменатели

[2] напомню, что $h_k(x)$ представляет собою сумму всех мономов полной степени k (см. n° 3.3 на стр. 35)

[3] напомню, что *число Костки* $K_{\mu,\lambda}$ равно количеству таблиц формы μ, заполненных λ_1 единицами, λ_2 двойками, и т. д. и отлично от нуля только при $\mu \trianglerighteq \lambda$, а все $K_{\lambda,\lambda} = 1$ (см. формулы (4-12) – (4-13) на стр. 54)

Поэтому выражение ch $([S_\lambda])$ через полиномы Шура тоже задаётся некой нижней унитреугольной матрицей:

$$\mathrm{ch}\,([S_\lambda]) = \mathrm{ch}\big([M_\lambda] + \sum_{\mu\rhd\lambda} x_{\mu\lambda}[M_\mu]\big) = h_\lambda + \sum_{\mu\rhd\lambda} x_{\mu\lambda}h_\mu = s_\lambda + \sum_{\mu\rhd\lambda} y_{\mu\lambda}s_\mu \,.$$

Из равенств $1 = ([S_\lambda],[S_\lambda]) = \langle\, \mathrm{ch}([S_\lambda])\,,\, \mathrm{ch}([S_\lambda])\,\rangle = \langle\, s_\lambda\,,\, s_\lambda\,\rangle + \sum_{\mu\rhd\lambda} y_{\mu\lambda}^2 \,\langle\, s_\mu\,,\, s_\mu\,\rangle = 1 + \sum_{\mu\rhd\lambda} y_{\mu\lambda}^2$ вытекает, что все $y_{\mu\lambda} = 0$, т. е. ch $([S_\lambda]) = s_\lambda$. Утверждение об инволюциях вытекает из сл. 8.2 на стр. 102 и сл. 4.2 на стр. 58. □

Следствие 8.4 (правило Юнга)
Кратность вхождения неприводимого представления S_μ в модуль таблоидов M_λ равна числу Костки $K_{\mu,\lambda}$.

Следствие 8.5 (правило Литлвуда – Ричардсона)
Кратность вхождения неприводимого представления $[S^\nu]$ в представление $[S_\lambda]\cdot[S_\mu]$ равна коэффициенту Литтлвуда – Ричардсона[1] $c^\nu_{\lambda\mu}$ из разложения $s_\lambda \cdot s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu}\cdot s_\nu$.

Следствие 8.6 (правило ветвления индуцированных представлений)
Представление группы S_{n+1}, индуцированное неприводимым представлением S_λ подгруппы $S_n \subset S_{n+1}$, является прямой суммой однократных неприводимых представлений S_μ, диаграмма μ которых получается добавлением одной клетки к диаграмме λ.

Доказательство. Поскольку $[\mathrm{ind}(S_\lambda)] = [S_\lambda]\cdot[\mathbb{1}_1]$, утверждение вытекает из предыдущего следствия и формулы Пьери[2] для вычисления $s_\lambda \cdot h_1$. □

Следствие 8.7 (правило ветвления ограниченных представлений)
Ограничение неприводимого представления S_λ группы S_n на подгруппу $S_{n-1} \subset S_n$ является прямой суммой однократных неприводимых представлений S_μ, диаграмма μ которых получается выкидыванием одной клетки из диаграммы λ.

Доказательство. Это получается из предыдущего следствия по двойственности Фробениуса: кратность вхождения неприводимого представления S_μ в res S_λ равна кратности вхождения неприводимого представления S_λ в ind S_μ. □

Следствие 8.8 (формула Фробениуса для характеров S_n)
Значение характера χ_λ неприводимого представления S_λ симметрической группы S_n на классе сопряжённости $C_\mu \subset S_n$ равно каждому из следующих трёх чисел:

- коэффициенту при $z_\mu^{-1}\cdot p_\mu(x)$ в разложении многочлена Шура $s_\lambda(x)$ по базису $z_\mu^{-1}\cdot p_\mu(x)$ в векторном пространстве $\mathbb{Q}\otimes\Lambda$

[1] см. теор. 4.2 на стр. 56
[2] см. упр. 4.5 на стр. 57

- коэффициенту при $s_\lambda(x)$ в разложении многочлена Ньютона $p_\mu(x)$ по базису Шура $s_\lambda(x)$ в $\mathbb{Z}$-модуле Λ
- коэффициенту при одночлене $x^{\lambda+\delta} = x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \cdots x_n^{\lambda_n}$ в многочлене

$$p_\mu(x) \cdot \Delta_\delta(x) = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \cdots p_n(x)^{m_n} \cdot \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

где $p_k(x) = \sum\limits_i x_i^k$ суть степенные суммы Ньютона, число m_i равно количеству строк длины i в диаграмме μ, а $\Delta_\delta(x) = \det\left(x_j^{n-i}\right)$ это определитель Вандермонда.

Доказательство. Первое вытекает прямо из теор. 8.4. Поскольку система многочленов p_μ ортогональна со скалярными квадратами z_μ, коэффициент при $z_\mu^{-1} \cdot p_\mu(x)$ в разложении s_λ по базису p_μ равен скалярному произведению $\left\langle s_\lambda \, , \, p_\mu \right\rangle$, которое в свою очередь равно коэффициенту при s_λ в разложении p_μ по ортонормальному базису s_λ, что даёт второе представление. Записывая s_λ по формуле Якоби – Труди как отношение определителей $s_\lambda(x) = \Delta_{\lambda+\delta}(x) \,/\, \Delta_\delta(x)$ и умножая обе части разложения

$$p_\mu(x) = \sum_\lambda \chi_\lambda(C_\mu) \cdot \Delta_{\lambda+\delta}(x) \,/\, \Delta_\delta(x)$$

на Δ_δ, получаем разложение $p_\mu(x) \cdot \Delta_\delta(x) = \sum_\lambda \chi_\lambda(C_\mu) \cdot \Delta_{\lambda+\delta}(x)$, означающее, что $\chi_\lambda(C_\mu)$ равен коэффициенту разложения кососимметрического многочлена $p_\mu(x) \cdot \Delta_\delta(x)$ по стандартному детерминантному базису[1] $\Delta_{\lambda+\delta}(x)$. □

8.5.4. Размерности неприводимых представлений. Размерность модуля Шпехта S_λ равна значению неприводимого характера χ_λ на единице, то есть — по формуле Фробениуса — коэффициенту при $x^{\lambda+\delta} = x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \cdots x_n^{\lambda_n}$ в многочлене

$$p_1^n \cdot \Delta_\delta = \left(\sum x_i\right)^n \cdot \det\left(x_j^{n-i}\right) =$$
$$= \sum_{m_1 m_2 \dots m_n} \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_n!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot x_1^{n-\sigma(1)} x_2^{n-\sigma(2)} \cdots x_n^{n-\sigma(n)}$$

Обозначим длины строк строго убывающей диаграммы $\eta = \lambda + \delta$ через $\eta_i = \lambda_i + n - i$. Коэффициент при $x^\eta = x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \cdots x_n^{\eta_n}$ в написанном произведении равен

$$\sum_\sigma \frac{\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot n!}{\prod\limits_j \left(\eta_j - n + \sigma(j)\right)!} =$$
$$= \frac{n!}{\eta_1! \cdot \eta_2! \cdot \cdots \cdot \eta_n!} \cdot \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_j \eta_j \cdot \left(\eta_j - 1\right) \cdot \cdots \cdot \left(\eta_j - n + \sigma(j) + 1\right),$$

где суммирование происходит по всем перестановкам $\sigma \in S_n$, для которых каждое из n чисел $\eta_j - n + \sigma(j) \geqslant 0$, и j-тый сомножитель в последнем произведении в свою

[1] см. n° 3.1.2 на стр. 33

очередь является произведением $n - \sigma(j)$ последовательно убывающих чисел, начинающихся с η_j. Такая сумма представляет собою определитель

$$\det\begin{pmatrix} \eta_1 \cdots (\eta_1 - n + 1) & \eta_2 \cdots (\eta_2 - n + 1) & \cdots & \eta_n \cdots (\eta_n - n + 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_1(\eta_1 - 1) & \eta_2(\eta_2 - 1) & \cdots & \eta_n(\eta_n - 1) \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 8.9. Покажите, что он равен $\prod\limits_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$.

Таким образом, нами установлено

Следствие 8.9 (формула Фробениуса для $\dim S_\lambda$)
Пусть $\eta = \lambda + \delta$, т. е. $\eta_i = \lambda_i + n - i$. Тогда

$$\dim S_\lambda = \frac{n!}{\eta_1! \cdot \eta_2! \cdot \dots \cdot \eta_n!} \cdot \prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j).$$

□

Упражнение 8.10 (формула крюков). Назовём *крюком* клетки a в диаграмме Юнга Г-образную поддиаграмму с углом в клетке a, состоящую из клетки a и всех клеток ниже a в том же столбце и всех клеток правее a в той же строке. Количество клеток в таком крюке обозначим через $\Gamma(a)$ и назовём *длиной крюка* клетки a. Докажите, что

$$\dim S_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{a\in\lambda} \Gamma(a)}.$$

Например, для диаграммы $\lambda = (4, 2, 1)$ длины крюков суть

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

откуда размерность модуля Шпехта $S_{(4,2,1)}$ группы S_7 равна

$$\frac{7!}{6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 = 35.$$

Нетривиальным следствием упр. 8.10 и теор. 8.3 на стр. 105 является возможность подсчитать количество стандартных таблиц формы λ по формуле крюков. Скажем, только что проделанное вычисление показывает, что имеется ровно 35 стандартных таблицы формы $\ydiagram{4,2,1}$.

Упр. 8.5. Будем писать $T \underset{a}{\succ} U$, если $T \succ U$, и наибольшее из чисел, стоящих в заполнениях T и U в разных клетках, равно a. Если $T \underset{a}{\succ} U$ и $U \underset{b}{\succ} W$, то $T \underset{a}{\succ} W$ при $a \geqslant b$ и $T \underset{b}{\succ} W$ при $a \leqslant b$.

Упр. 8.6. Для всех $q \in R_T$ и $p \in C_U$ выполнено строгое неравенство $pU \succ qT$. По лем. 8.1 существует транспозиция $\tau \in R_U \cap C_T$, и вычисление (8-12) показывает, что $c_T\{U\} = 0$.

Упр. 8.9. Вычисление аналогично вычислению определителя Вандермонда: в кольце многочленов $\mathbb{Z}[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]$ определитель делится на каждую из разностей $\eta_i - \eta_j$, а значит, и на $\prod\limits_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$. Сравнение лексикографически старших мономов показывает, что частное равно 1.

Упр. 8.10. Индукцией по количеству столбцов покажите, что произведение длин крюков любой диаграммы λ равно $\prod\limits_i \eta_i! / \prod\limits_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$, где $\eta = \lambda + \delta$, и воспользуйтесь формулой Фробениуса. Индуктивный переход основан на том, что длины крюков клеток первого столбца равны $\eta_i - n + \ell$, где ℓ — число строк в диаграмме.