А. Л. ГОРОДЕНЦЕВ*

АЛГЕБРА

ДЛЯ СТУДЕНТОВ-МАТЕМАТИКОВ

ЧАСТЬ II

Это вторая часть интенсивного двухгодичного курса алгебры для студентов, профессионально изучающих математику и физику. Основу курса составляют лекции, читавшиеся в Независимом Московском университете и на факультете математики Высшей школы экономики, а также материалы сопровождавших их семинарских занятий. Книга содержит большое число упражнений, снабжённых комментариями, а также задач для самостоятельного решения.

МОСКВА, 2015

---

*НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРУППА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИТЭФ
e-mail:gorod@itep.ru
http://gorod.bogomolov-lab.ru/

Оглавление

§1. Тензорные произведения

1.1. Полилинейные отображения. Рассмотрим модули $V_1, V_2, \dots, V_n$ и W над произвольным коммутативным кольцом K. Отображение множеств

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W \tag{1-1}$$

называется *полилинейным*[1], если оно линейно отдельно по каждому из своих аргументов при произвольным образом зафиксированных остальных:

$$\varphi(\dots, \lambda v' + \mu v'', \dots) = \lambda\,\varphi(\dots, v', \dots) + \mu\,\varphi(\dots, v'', \dots).$$

Например, 1-линейные отображения $V \to W$ это линейные операторы, а 2-линейные отображения $V \times V \to K$ это билинейные формы на модуле V.

Полилинейные отображения (1-1) можно складывать и умножать на числа из K, так что они тоже образуют K-модуль. Он называется *модулем полилинейных отображений* и обозначается через $\mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$ или, когда важно явно указать кольцо, — через $\mathrm{Hom}_K(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$.

Пример 1.1 (полилинейные отображения векторных пространств)
Если $K = \Bbbk$ — поле, а $V_1, V_2, \dots, V_n$ и W — векторные пространства размерностей $d_1, d_2, \dots, d_n$ и d, то $\dim \mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) = d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_n \cdot d$. Чтобы убедиться в этом, зафиксируем в каждом пространстве V_i некоторый базис $e^{(i)}_1, e^{(i)}_2, \dots, e^{(i)}_{d_i}$, а также базис $e_1, e_2, \dots, e_d$ в W. Отображение (1-1) однозначно определяется своими значениями

$$\varphi\left(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, e^{(n)}_{\alpha_n}\right) \in W \tag{1-2}$$

на всевозможных сочетаниях базисных векторов из пространств V_i, т. к. для произвольного набора векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$, раскладывающихся по базисам как

$$v_i = \sum_{\alpha_i=1}^{d_i} x^{(i)}_{\alpha_i} e^{(i)}_{\alpha_i}, \tag{1-3}$$

из полилинейности отображения φ вытекает равенство

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} x^{(1)}_{\alpha_1} \cdot x^{(2)}_{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot x^{(n)}_{\alpha_n} \cdot \varphi\left(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, e^{(n)}_{\alpha_n}\right). \tag{1-4}$$

Раскладывая векторы (1-2) по базису пространства W:

$$\varphi\left(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, e^{(n)}_{\alpha_n}\right) = \sum_{\nu=1}^{d} a^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_{\nu} \cdot e_\nu,$$

---

[1] или *n-линейным*, когда желательно точно указать количество аргументов

мы однозначно кодируем отображение φ набором из $d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_n \cdot d$ чисел

$$a_\nu^{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} \in \Bbbk\,,$$

которые организуются в $(n+1)$-мерную матрицу[1] размера $d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_n \times d$. Формула (1-4) переписывается через эти матричные элементы как

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\nu,\alpha_1,\dots,\alpha_n} a_\nu^{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} \cdot x_{\alpha_1}^{(1)} \cdot x_{\alpha_2}^{(2)} \cdot \cdots \cdot x_{\alpha_n}^{(n)} \cdot e_\nu\,.$$

При сложении полилинейных отображений и умножении их на числа соответствующие этим отображениям матрицы поэлементно складываются и умножаются на числа. Таким образом, пространство полилинейных отображений изоморфно пространству многомерных матриц, и базису пространства матриц, состоящему из матриц с единицей в позиции $(i_1, i_2, \dots, i_n, j)$ и нулями в остальных местах, отвечает базис пространства полилинейных отображений, состоящий из отображений $\delta^j_{(i_1,i_2,\dots,i_n)}$, которые действуют на набор векторов (1-3) по правилу

$$\delta^j_{(i_1,i_2,\dots,i_n)} : (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto x_{i_1}^{(1)} \cdot x_{i_2}^{(2)} \cdot \cdots \cdot x_{i_n}^{(n)} \cdot e_j\,, \tag{1-5}$$

а на базисные векторы (1-3) — по правилу

$$\delta^j_{(i_1,i_2,\dots,i_n)} : \left(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)} \right) \mapsto \begin{cases} e_j\,, & \text{если } \alpha_k = i_k \ \forall\, k \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1-6}$$

Замечание 1.1. Если всюду в предыдущем примере заменить слова «размерность» и «векторное пространство» словами «ранг» и «свободный модуль», то всё сказанное останется справедливым для любых *свободных* модулей конечного ранга над произвольным коммутативным кольцом K.

1.1.1. Универсальное полилинейное отображение. Рассмотрим полилинейное отображение модулей над коммутативным кольцом K

$$\tau : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to U\,. \tag{1-7}$$

Беря его композицию с линейными операторами $F : U \to W$ в произвольный K-модуль W, получаем *линейное* по F отображение модулей

$$\mathrm{Hom}(U, W) \xrightarrow{F \mapsto F \circ \tau} \mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)\,. \tag{1-8}$$

---

[1] при $n = 1$ получается обычная 2-мерная матрица (1-) линейного отображения $V \to W$ размера $k \times m$, где $k = \dim V$, $m = \dim W$

Определение 1.1
Полилинейное отображение (1-7) называется *универсальным*, если для каждого модуля W линейный оператор (1-8) является изоморфизмом. Иначе говоря, полилинейное отображение τ универсально, если для любого модуля W и любого полилинейного отображения $\varphi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$ существует единственный линейный оператор $F : U \to W$ такой, что $\varphi = F \circ \tau$, т. е. пара полилинейных сплошных стрелок в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dd, dashed, "F"] \\
V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
& W
\end{tikzcd}$$

всегда замыкается в коммутативный треугольник единственным пунктирным линейным отображением.

Лемма 1.1
Для любых двух универсальных полилинейных отображений

$$\tau_1 : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to U_1 \qquad \text{и} \qquad \tau_2 : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to U_2$$

имеется единственный линейный изоморфизм $\iota : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$, такой что $\tau_2 = \iota\tau_1$.

Доказательство. Поскольку и U_1, и U_2 оба универсальны, существуют единственные линейные операторы $F_{21} : U_1 \to U_2$ и $F_{12} : U_2 \to U_1$, которые встраиваются в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"'] \arrow[dr, dashed, "F_{21}"'] & & & & U_2 \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"] \arrow[dl, dashed, "F_{12}"] \\
& U_2 \arrow[dl, dashed, "F_{12}"] & V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[l, "\tau_2"'] \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[ull, "\tau_1"'] \arrow[dll, "\tau_1"] \arrow[urr, "\tau_2"] \arrow[drr, "\tau_2"'] & U_1 \arrow[dr, dashed, "F_{21}"'] & \\
U_1 & & & & U_2
\end{tikzcd}$$

Поскольку представления самих универсальных полилинейных отображений в виде $\tau_1 = \varphi \circ \tau_1$ и $\tau_2 = \psi \circ \tau_2$ в силу единственности таковых представлений возможны только с $\varphi = \mathrm{Id}_{U_1}$, $\psi = \mathrm{Id}_{U_2}$, мы заключаем, что $F_{21}F_{12} = \mathrm{Id}_{U_2}$ и $F_{12}F_{21} = \mathrm{Id}_{U_1}$. □

1.2. Тензорное произведение модулей. Универсальное полилинейное отображение называется *тензорным произведением векторов* и обозначается

$$\tau : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \,. \tag{1-9}$$

Единственный с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с тензорным произведением векторов, модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ называется *тензорным произведением* модулей $V_1, V_2, \dots, V_n$, а его элементы — *тензорами*. Тензорные произведения векторов принято записывать как

$$\tau(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n\,. \tag{1-10}$$

Они составляют образ универсального отображения (1-9) и называются *разложимыми* тензорами. Поскольку отображение (1-9) не линейно, а полилинейно, его образ, т. е. множество разложимых тензоров, обычно не образует подмодуля, и наугад взятый тензор, являющийся линейной комбинацией мономов (1-10), скорее всего не раскладывается в произведение векторов и не лежит в образе τ.

Упражнение 1.1. Выведите из универсального свойства тензорного произведения, что разложимые тензоры линейно порождают модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$.

1.2.1. Существование тензорного произведения. Предыдущее определение обеспечивает единственность универсального полилинейного отображения, но не даёт никаких гарантий его существования. Сейчас мы построим модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ в терминах образующих и соотношений. Рассмотрим свободный K-модуль $\mathcal{V}$, базисом в котором по определению являются всевозможные n-буквенные слова $[v_1 v_2 \,\dots\, v_n]$, i-той буквой которых может быть любой вектор $v_i \in V_i$. В этом большом модуле рассмотрим подмодуль $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$, порождённый всевозможными трёхчленными линейными комбинациями вида

$$[\,\cdots\,(\lambda u + \mu w)\,\cdots\,] - \lambda\,[\,\cdots\,u\,\cdots\,] - \mu\,[\,\cdots\,w\,\cdots\,]\,, \tag{1-11}$$

где обозначенные многоточиями соответственные фрагменты всех трёх слов одинаковы. Положим по определению

$$\begin{gathered} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n = \mathcal{V}/\mathcal{R} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n = [v_1 v_2 \,\dots\, v_n] \bmod(\mathcal{R})\,. \end{gathered} \tag{1-12}$$

Иными словами, $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ есть модуль, образованный конечными K-линейными комбинациями формальных тензорных мономов $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$, в которых $v_i \in V_i$ и которые подчиняются соотношениям дистрибутивности: если любой из сомножителей (при фиксированных остальных) записать в виде линейной комбинации векторов, то полученное произведение можно преобразовать по стандартному правилу для раскрытия скобок:

$$\cdots \otimes (\lambda u + \mu w) \otimes \cdots = \lambda \cdot (\,\cdots \otimes u \otimes \cdots\,) - \mu \cdot (\,\cdots \otimes w \otimes \cdots\,)\,. \tag{1-13}$$

Лемма 1.2
Отображение $\tau : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathcal{V}/\mathcal{R}$, $(v_1, \dots, v_n) \mapsto [v_1 \dots v_n] \bmod(\mathcal{R})$, является универсальным полилинейным отображением.

Доказательство. Полилинейность тавтологически следует из наложенных соотношений и выражается в точности формулой (1-13). Проверим универсальность. Для любого отображения множеств $\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to W$ существует единственное линейное отображение $F : \mathcal{V} \to W$, переводящее базисный вектор $[v_1 v_2 \dots v_n] \in \mathcal{V}$ в $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Для того, чтобы это отображение было корректно определено на фактор модуле $\mathcal{V}/\mathcal{R}$, достаточно проверить, что $\mathcal{R} \subset \ker F$. Для каждого соотношения (1-11) из полилинейности φ и линейности F получаем

$$\begin{aligned} F\big([\dots(\lambda u + \mu w)\dots] - \lambda\,[\dots u \dots] - \mu\,[\dots w \dots]\big) = \\ = F\big([\dots(\lambda u + \mu w)\dots]\big) - \lambda\, F\big([\dots u \dots]\big) - \mu\, F\big([\dots w \dots]\big) = \\ = \varphi(\dots, (\lambda u + \mu w), \dots) - \lambda\,\varphi(\dots, u, \dots) - \mu\,\varphi(\dots, w, \dots) = 0\,, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Теорема 1.1

Если каждый из модулей V_i свободен с базисом $e^{(i)}_1, e^{(i)}_2, \dots, e^{(i)}_{d_i}$, то их тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ также свободно с базисом

$$e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes e^{(2)}_{\alpha_2} \otimes \dots \otimes e^{(n)}_{\alpha_n}\,, \quad 1 \leqslant \alpha_i \leqslant d_i\,, \tag{1-14}$$

в частности, $\operatorname{rk} V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n = \prod \operatorname{rk} V_i$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{W}$ свободный модуль с базисом из выражений (1-14), которые мы временно будем воспринимать просто как формальные символы. Полилинейное отображение $\tau : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to \mathcal{W}$, переводящее каждый набор базисных векторов $\big(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, e^{(n)}_{\alpha_n}\big) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ в соответствующий базисный символ (1-14) модуля $\mathcal{W}$, является универсальным, поскольку для любого полилинейного $\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to W$ и линейного $F : \mathcal{W} \to W$ равенство $\varphi = F \circ \tau$ однозначно задаёт действие F на каждый базисный вектор: $F(e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes e^{(2)}_{\alpha_2} \otimes \dots \otimes e^{(n)}_{\alpha_n}) = \varphi(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, e^{(n)}_{\alpha_n})$ и тем самым однозначно задаёт F. По лем. 1.1 имеется единственный изоморфизм $\mathcal{W} \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$, переводящий формальные базисные векторы (1-14) пространства $\mathcal{W}$ в соответствующие тензорные произведения базисных векторов, лежащие в $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$. Тем самым, последние тоже образуют базис. □

Замечание 1.2. (о модулях бесконечного ранга) Предыдущая теорема верна и для свободных модулей *бесконечного* ранга: дословно то же рассуждение показывает, что свободный модуль, образованный всевозможными конечными линейными комбинациями базисных мономов[1] (1-14), обладает требуемым универсальным свойством. Например, если $V_i = \Bbbk[x_i]$, то

$$\Bbbk[x_1] \otimes \Bbbk[x_2] \otimes \dots \otimes \Bbbk[x_n] \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]\,.$$

---

[1] которых в бесконечномерном случае будет бесконечно много

Изоморфизм сопоставляет базисному разложимому тензору $x_1^{m_1} \otimes \dots \otimes x_n^{m_n}$ базисный моном $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$.

Пример 1.2 (многообразия Сегре)
Из теор. 1.1 вытекает, что тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ векторных пространств $V_1, V_2, \dots, V_n$ над полем $\Bbbk$ линейно порождается разложимыми тензорами. При этом само множество разложимых тензоров, как уже говорилось, векторным пространством обычно не является и образует внутри $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ нелинейное подмногообразие, проективизация которого называется *многообразием Сегре*. Говоря точнее, многообразие Сегре определяется как образ *отображения Сегре*

$$s : \mathbb{P}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{m_n} \to \mathbb{P}_m ,$$

которое действует из произведения проективных пространств $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$ в проективное пространство $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}\left(V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n\right)$ и переводит набор одномерных подпространств, натянутых на ненулевые векторы $v_i \in V_i$, в одномерное подпространство, порождённое тензором $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n$.

Упражнение 1.2. Проверьте, что это отображение корректно определено[1] и является вложением.

По построению, многообразие Сегре заметается n семействами проективных подпространств размерностей $m_1, m_2, \dots, m_n$.

1.2.2. Линейные операторы как тензоры. Для векторных пространств U и W имеется каноническое билинейное отображение $U^* \times W \to \mathrm{Hom}(U, V)$, переводящее пару $(\xi, w) \in U^* \times W$ в линейный оператор $U \to W$, действующий по правилу

$$U \ni u \mapsto \xi(u) w \in W . \tag{1-15}$$

Это оператор ранга 1, образом которого является 1-мерное подпространство в W, натянутое на вектор w, а ядром — подпространство $\mathrm{Ann}(\xi) \subset U$ коразмерности 1.

Упражнение 1.3. Покажите, что всякий оператор $F : U \to W$ ранга 1 представляется в виде (1-15) с подходящими ненулевыми $\xi \in U^*$ и $w \in W$, которые определяются по F однозначно с точностью до пропорциональности.

В силу универсальности тензорного произведения, существует единственное линейное отображение

$$U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}(U, V) \tag{1-16}$$

переводящее каждый разложимый тензор $\xi \otimes w$ в оператор (1-15). Если оба пространства U и V конечномерны, то это отображение является изоморфизмом. Чтобы убедиться в этом, зафиксируем в пространствах U и W базисы

$$u_1, u_2, \dots, u_n \quad \text{и} \quad w_1, w_2, \dots, w_m .$$

---

[1] т. е. тензор $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n$ отличен от нуля и заменяется на пропорциональный при замене векторов v_i на пропорциональные

По лем. 1.2 в качестве базиса в тензорном произведении $U^* \otimes V$ можно взять mn разложимых тензоров $u_i^* \otimes w_j$, в которых $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^* \in U^*$ составляют двойственный к $u_1, u_2, \dots, u_n$ базис пространства U^*. Соответствующие этим тензорам операторы действуют на базисные векторы пространства U по правилу

$$u_i^* \otimes w_j \,:\, u_k \mapsto \begin{cases} w_j & \text{при } k = i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

т. е. матрица оператора $u_i^* \otimes w_j$ в выбранных базисах имеет единицу в пересечении j-той строки и i-того столбца и нули в остальных местах. Тем самым, стандартный базис тензорного произведения $U^* \otimes V$ переводится в стандартный базис пространства операторов.

На геометрическом языке операторы ранга 1, рассматриваемые с точностью до пропорциональности, составляют многообразие Сегре

$$S \subset \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U, W))\,.$$

Оно линейно порождает всё пространство $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U, W))$. Если использовать в качестве однородных координат на $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V, W))$ матричные элементы (a_{ij}) операторов в каких-нибудь фиксированных базисах, то многообразие Сегре можно задать в этих координатах системой квадратичных уравнений — обращением в нуль всех миноров второго порядка:

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij}a_{\ell k} - a_{ik}a_{\ell j} = 0\,.$$

Отображение Сегре $\mathbb{P}_{n-1} \times \mathbb{P}_{m-1} = \mathbb{P}(U^*) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U, W))$ переводит пару точек (ξ, w) в точку $\xi \otimes w$ и устанавливает биекцию между произведением проективных пространств и многообразием Сегре. На координатном языке пара точек с однородными координатами $(x_1 : x_2 : \cdots : x_n)$ и $(y_1 : y_2 : \cdots : y_n)$ переводится в точку, однородными координатами которой являются mn всевозможных произведений $x_j y_i$, т. е. элементы матрицы $y^t \cdot x$ — произведения столбца y на строку x. Два семейства «координатных плоскостей» $\xi \times \mathbb{P}_{m-1}$ и $\mathbb{P}_{n-1} \times w$ при этом перейдут в два семейства проективных пространств, заметающих многообразие Сегре.

Пример 1.3 (квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3$)
При $\dim U = \dim W = 2$ мы получаем биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и детерминантной квадрикой Сегре в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)\right)$, состоящей из классов пропорциональных матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,:\, ad - bc = 0\,.$$

Эта биекция переводит пару точек $\xi = (\xi_0 : \xi_1) \in \mathbb{P}\left(U^*\right)$ и $w = (t_0 : t_1) \in W$ в матрицу

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 t_0 & \xi_1 t_0 \\ \xi_0 t_1 & \xi_1 t_1 \end{pmatrix} \tag{1-17}$$

и отображает два семейства координатных прямых $\mathbb{P}_1 \times v$ и $\xi \times \mathbb{P}_1$ на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ в два семейства проективных прямых на квадрике Сегре, образованных проективизациями двумерных подпространств из матриц ранга 1, у которых

$$([\text{строка } 1] : [\text{строка } 2]) = (t_0 : t_1)$$
$$([\text{столбец } 1] : [\text{столбец } 2]) = (\xi_0 : \xi_1)\,.$$

В каждом из двух семейств прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются. Каждая точка квадрики является точкой пересечения пары прямых из различных семейств, и никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Упражнение 1.4. Докажите все эти геометрические утверждения.

1.2.3. Тензорные произведения абелевых групп. Для произвольных модулей над произвольным коммутативным кольцом из данного в n° 1.2 описания тензорного произведения $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ в терминах образующих и соотношений не всегда ясно его строение и даже отлично ли оно от нуля. В этом разделе мы опишем тензорные произведения конечно порождённых $\mathbb{Z}$-модулей.

Покажем, что $\mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n) = 0$ при взаимно простых m и n. Поскольку класс $[n] = n \bmod(m)$ обратим в кольце $\mathbb{Z}/(m)$, каждый элемент $a \in \mathbb{Z}/(m)$ представляется в виде $a = n \cdot a'$, где $a' = [n]^{-1}a$. С другой стороны, для любого $b \in \mathbb{Z}/(n)$ произведение $nb = 0$ в $\mathbb{Z}/(n)$. В силу полилинейности тензорного произведения для любого разложимого тензора $a \otimes b \in \mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n)$ выполняется равенство $a \otimes b = (n \cdot a') \otimes b = n \cdot (a' \otimes b) = a' \otimes (n \cdot b) = \alpha' \otimes 0 = \alpha' \otimes (0 \cdot 0) = 0 \cdot (\alpha' \otimes 0) = 0$. Так как разложимые тензоры линейно порождают модуль $\mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n)$, он нулевой.

Вычислим теперь тензорное произведение $\mathbb{Z}/(p^n) \otimes \mathbb{Z}/(p^m)$ при $n \leqslant m$. Отображение $\mu : \mathbb{Z}/(p^n) \times \mathbb{Z}/(p^m) \to \mathbb{Z}/(p^n)$, переводящее пару вычетов $\left([a]_{p^n}, [b]_{p^m}\right)$ в вычет $[ab]_{p^n} = ab \cdot [1]_{p^n}$ билинейно. Покажем, что оно универсально. Для любого билинейного отображения $\varphi : \mathbb{Z}/(p^n) \times \mathbb{Z}/(p^m) \to W$ выполняется равенство $\varphi([a]_{p^n}, [b]_{p^m}) = ab \cdot \varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right)$, из которого вытекает, что линейное отображение $F : \mathbb{Z}/(p^n) \to W$, такое что $\varphi = F \circ \mu$, обязано переводить образующий элемент $[1]_{p^n} \in \mathbb{Z}/(p^n)$ в $\varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right)$. Таким образом, отображение F единственно, если существует. Единственным соотношением на образующую $e = [1]_{p^n} \in \mathbb{Z}/(p^n)$ является равенство $p^n \cdot e = 0$, и элемент $\varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right)$ удовлетворяет этому соотношению, т. к. $p^n \cdot \varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right) = \varphi\left(p^n \cdot [1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right) = \varphi\left(0, [1]_{p^m}\right) = 0$. Поэтому правило $[1]_{p^n} \mapsto \varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right)$ корректно определяет отображение $F : \mathbb{Z}/(p^n) \to W$, что доказывает универсальность. Итак, $\mathbb{Z}/(p^n) \otimes \mathbb{Z}/(p^m) \simeq \mathbb{Z}/\left(p^{\min(n,m)}\right)$.

Упражнение 1.5. Покажите, что $\mathbb{Z} \otimes A \simeq A$ для любой абелевой группы A.

Вычисление тензорных произведений произвольных конечно порождённых абелевых групп сводится к рассмотренным случаям при помощи канонических изоморфизмов коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, обсуждаемых ниже.

1.3. Канонические изоморфизмы. Всюду далее речь идёт о произвольных модулях над любым коммутативным кольцом K. Линейные отображения

$$f : V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \to W \tag{1-18}$$

часто хочется задавать указанием значений f на множестве разложимых векторов

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f(v_1, v_2, \dots, v_n), \tag{1-19}$$

а затем по линейности продолжать это правило на произвольные тензоры. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$, такое описание однозначно определяет f при условии, что оно корректно: множество разложимых тензоров, как правило, линейно зависимо[1], и все имеющиеся между ними линейные соотношения должны выполняться и между векторами (1-19) в модуле W. Поскольку эти соотношения линейно порождаются соотношениями полилинейности (1-13), мы приходим к следующему критерию.

Лемма 1.3
Если векторы $f(v_1, v_2, \dots, v_n)$ в (1-19) полилинейно зависят от векторов v_i (т. е. линейны по каждому v_i при фиксированных остальных), то существует единственное линейное отображение (1-18), действующее на разложимые тензоры по правилу $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f(v_1, v_2, \dots, v_n)$. ☐

Предложение 1.1
Имеется канонический изоморфизм $U \otimes W \simeq W \otimes U$, переводящий друг в друга разложимые тензоры $u \otimes w$ и $w \otimes u$.

Доказательство. Так как правило $u \otimes w \mapsto w \otimes u$ билинейно по u, w, оно по лем. 1.3 корректно определяет линейное отображение $U \otimes W \to W \otimes U$. По тем же причинам корректно определено линейное отображение $W \otimes U \to U \otimes W$, переводящее $w \otimes u$ в $u \otimes w$. Эти два отображения обратны друг другу, поскольку обе их композиции тождественно действуют на разложимых тензорах, а последние линейно порождают тензорное произведение. ☐

Предложение 1.2
Имеются канонические изоморфизмы $V \otimes (U \otimes W) \simeq V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$, переводящие друг в друга разложимые тензоры $v \otimes (u \otimes w)$, $v \otimes u \otimes w$ и $(v \otimes u) \otimes w$.

---

[1] например, если K — бесконечное поле, а V_i — конечномерные пространства, пространство $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ тоже конечномерно, а разложимых тензоров в нём бесконечно много

Доказательство. Тензор $v \otimes (u \otimes w) \in V \otimes (U \otimes W)$ трилинейно зависит от (v, u, w). Следовательно, по лем. 1.3 имеется линейное отображение $V \otimes U \otimes W \to V \otimes (U \otimes W)$, переводящее $v \otimes u \otimes w$ в $v \otimes (u \otimes w)$. Обратное отображение строится в два шага. При каждом $v \in V$ тензор $v \otimes u \otimes w$ билинейно зависит от u и w, и значит, по лем. 1.3 мы имеем линейное отображение

$$\tau_v : U \otimes W \xrightarrow{u\otimes w \mapsto v\otimes u\otimes w} V \otimes U \otimes W ,$$

которое само по себе линейно зависит от v, т. е. тензор $\tau_v(t) = v \otimes t$ билинеен по $v \in V$ и $t \in U \otimes W$. По лем. 1.3 существует линейное отображение

$$V \otimes (U \otimes W) \to V \otimes U \otimes W ,$$

переводящее $v \otimes (u \otimes w)$ в $v \otimes u \otimes w$, что и требовалось. Изоморфизм между $V \otimes U \otimes W$ и $(V \otimes U) \otimes W$ устанавливается аналогично. □

Предложение 1.3
Имеются канонические изоморфизмы

$$V \otimes (U \oplus W) \simeq (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \quad \text{и} \quad (U \oplus W) \otimes V \simeq (U \otimes V) \oplus (W \otimes V) ,$$

действующие на разложимые тензоры по правилам:

$$v \otimes (u \dotplus w) \leftrightarrows (v \otimes u) \dotplus (v \otimes w) \quad \text{и} \quad (u \dotplus w) \otimes v \leftrightarrows (u \otimes v) \dotplus (w \otimes v)$$

где через $a \dotplus b$ для $a \in A$ и $b \in B$ обозначено сложение элементов $(a, 0)$ и $(0, b)$ в прямой сумме модулей $A \oplus B$.

Доказательство. Достаточно построить первый изоморфизм — второй получится из него применением предл. 1.1. Отображение

$$V \otimes (U \oplus W) \xrightarrow{v\otimes(u\dotplus w)\mapsto(v\otimes u)\dotplus(v\otimes w)} (V \otimes U) \oplus (V \otimes W)$$

существует, поскольку $(v \otimes u) \dotplus (v \otimes w)$ билинеен по v и $u \dotplus w$. Обратное отображение снова строится в два шага: сначала убеждаемся в наличии линейных отображений

$$\varphi_1 : V \otimes U \to V \otimes (U \oplus W) \quad \text{и} \quad \varphi_2 : V \otimes W \to V \otimes (U \oplus W) ,$$

действующих на разложимые тензоры по правилам

$$v \otimes u \mapsto v \otimes (u \dotplus 0) \quad \text{и} \quad v \otimes w \mapsto v \otimes (0 \dotplus w) ,$$

затем комбинируем их в отображение

$$\psi : (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \xrightarrow{a\dotplus b\mapsto\varphi_1(a)+\varphi_2(b)} V \otimes (U \oplus W) ,$$

очевидно, линейное и обратное к построенному в начале доказательства. □

1.4. Тензорное произведение линейных отображений. Рассмотрим конечный набор линейных отображений $f_i : U_i \to W_i$ между произвольными модулями над любым коммутативным кольцом. Поскольку тензор

$$f_1(u_1) \otimes f_2(u_2) \otimes \dots \otimes f_n(u_n) \in W_1 \otimes W_2 \otimes \dots \otimes W_n$$

полилинеен по $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, правило

$$u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_n \mapsto f_1(u_1) \otimes f_2(u_2) \otimes \dots \otimes f_n(u_n)$$

корректно задаёт линейное отображение, которое обозначается

$$f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_n : U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_n \to W_1 \otimes W_2 \otimes \dots \otimes W_n$$

и называется *тензорным произведением* отображений $f_i : U_i \to W_i$.

Пример 1.4 (тензорное произведение с вложением)
Если отображение $f : U \hookrightarrow W$ инъективно, а модуль F свободен, то произведение

$$f \otimes \mathrm{Id}_F : U \otimes F \to W \otimes F \tag{1-20}$$

также инъективно: когда $F = K \cdot e$ имеет ранг 1, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} U \otimes F \arrow[r, "f \otimes \mathrm{Id}_F"] \arrow[d, "\wr"'] & W \otimes F \arrow[d, "\wr"] \\ U \arrow[r, "F"] & W \end{tikzcd}$$

в которой вертикальные изоморфизмы задаются правилами

$$u \otimes (\lambda e) \mapsto \lambda u \quad \text{и} \quad w \otimes (\mu e) \mapsto \mu w\,.$$

Свободный модуль F большего ранга является прямой суммой свободных модулей ранга 1, и по предл. 1.3 модули $U \otimes F \simeq U^{\oplus \operatorname{rk} F}$ и $W \otimes F \simeq W^{\oplus \operatorname{rk} F}$ суть прямые суммы $\operatorname{rk} F$ одинаковых копий исходных модулей, а отображение (1-20) действует на них по правилу $(v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \big(f_1(u_1), f_2(u_2), \dots, f_n(u_n)\big)$ и очевидно инъективно. Однако если модуль F не свободен, произведение (1-20) может оказаться не инъективным даже когда $f : U \hookrightarrow W$ это вложение свободных модулей. Например, вложение $\mathbb{Z}$-модулей $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $z \mapsto 2z$, при тензорном умножении на $\mathbb{Z}/(2)$ превращается в *нулевое* отображение

$$f \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}/(2)} : \mathbb{Z}/(2) \to \mathbb{Z}/(2)\,, \quad [1]_2 \mapsto [0]_2\,.$$

Упражнение 1.6. Покажите, что сюрьективность отображения $f : U \twoheadrightarrow W$ всегда влечёт сюрьективность отображения $f \otimes \mathrm{Id}_V : U \otimes V \to W \otimes V$ для любых модулей U, V, W над любым коммутативным кольцом K.

Теорема 1.2

Пусть $U \simeq F/R_U$ и $W \simeq G/R_W$, где F и G — свободные модули над произвольным коммутативным кольцом K, а $R_U \subset F$ и $R_W \subset G$ суть подмодули соотношений, определяющих модули U и W. Тогда

$$U \otimes W \simeq \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W},$$

где $R_U \otimes G + F \otimes R_W$ есть линейная оболочка подмодулей $R_U \otimes G$ и $F \otimes R_W$ свободного модуля $F \otimes G$, вложенных в него согласно прим. 1.4.

Доказательство. Сопоставление элементам

$$f\,(\mathrm{mod}\,R_U) \in F/R_U \quad \text{и} \quad g\,(\mathrm{mod}\,R_G) \in G/R_W$$

элемента $f \otimes g\,(\mathrm{mod}\,(R_U \otimes G + F \otimes R_W))$ корректно, т. к. при $u \in R_U$, $w \in R_W$

$$(f+u)\otimes(g+w) = f\otimes g+(u\otimes g+f\otimes w+u\otimes w) \equiv f\otimes g\,(\mathrm{mod}\,(R_U \otimes G + F \otimes R_W)),$$

и задаёт билинейное отображение

$$\overline{\tau} : U \times W \to \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W}, \tag{1-21}$$

которое включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F \times G \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi_U \times \pi_W"'] & F \otimes G \arrow[d, "\pi"] \\
U \times W \arrow[r, "\overline{\tau}"] & \frac{F\otimes G}{R_U\otimes G+F\otimes R_W}
\end{tikzcd} \tag{1-22}$$

где $\pi_U : F \twoheadrightarrow U$, $\pi_W : G \twoheadrightarrow W$ и $\pi : F \otimes G \twoheadrightarrow (F \otimes G)/(R_U \otimes G + F \otimes R_W)$ означают отображения факторизации, а $\tau : F \times G \to F \otimes G$ — универсальное билинейное отображение. Покажем, что билинейное отображение (1-21) тоже универсально.

Всякое билинейное отображение $\varphi : U\times W \to H$ индуцирует полилинейное отображение $\widehat{\varphi} : F \times G \to H$ по правилу

$$(f, g) \mapsto \varphi\left(f\,(\mathrm{mod}\,R_U)\,,\, g\,(\mathrm{mod}\,R_W)\right), \tag{1-23}$$

а значит, существует линейное отображение $\psi : F \otimes G \to H$, такое что

$$\psi(f \otimes g) = \varphi\left(f\,(\mathrm{mod}\,R_U)\,,\, g\,(\mathrm{mod}\,R_W)\right).$$

Поскольку ψ аннулирует подмодули $R_U \otimes G$ и $F \otimes R_W$, оно корректно спускается до линейного отображения

$$\overline{\psi} : \frac{F \otimes G}{R_U \otimes G + F \otimes R_W} \to H,$$

такого что $\overline{\psi}\circ\tau = \varphi$. С другой стороны, если линейное отображение

$$\eta : \frac{F\otimes G}{R_U\otimes G + F\otimes R_W} \to H$$

тоже удовлетворяет равенству $\eta\circ\tau = \varphi$, то его композиция со стрелками $\overline{\tau}$ и $\pi_U\times\pi_W$ из диаграммы (1-22) задаёт билинейное отображение

$$\eta\circ\overline{\tau}\circ(\pi_U\times\pi_W) : F\times G\to H \tag{1-24}$$

действующее на пару $(f,g)\in F\times G$ в точности по формуле (1-23) и, стало быть, совпадающее с $\widehat{\psi}$. В силу универсальности τ композиция (1-24) равна $\psi\circ\tau$, откуда в виду коммутативности диаграммы (1-22) вытекает равенство $\eta\circ\pi = \psi$, а с ним и равенство $\eta = \overline{\psi}$. □

Пример 1.5 (тензорные произведения $\mathbb{Z}$-модулей)

Все вычисления из n° 1.2.3 на стр. 12 при помощи теор. 1.2 укладываются в одну строчку: $\mathbb{Z}/(m)\otimes\mathbb{Z}/(n)\simeq\mathbb{Z}/\big(m,n\big)\simeq\mathbb{Z}/\big(\text{нод}(m,n)\big)$ для любых $m,n\in\mathbb{Z}$.

Задачи для самостоятельного решения к §1

Задача 1.1. Для модулей над произвольным коммутативным кольцом K с единицей постройте канонические изоморфизмы а) $\mathrm{Hom}(L\otimes M,N)\simeq\mathrm{Hom}(L,\mathrm{Hom}(M,N))$ б) $\mathrm{Hom}(L,M\oplus N)\simeq\mathrm{Hom}(L,M)\oplus\mathrm{Hom}(L,N)$в) $\mathrm{Hom}(L\oplus M,N)\simeq\mathrm{Hom}(L,M)\oplus\mathrm{Hom}(M,N)$.

Задача 1.2. Найдите каноническое представление абелевой группы $\mathbb{Z}/(270)\otimes\mathbb{Z}/(360)$ в виде прямой суммы циклических групп $\mathbb{Z}/(p^m)$.

Задача 1.3. Найдите аддитивную[1] группу: а) $\mathrm{Hom}\big(\mathbb{Z}/(p^m),\mathbb{Z}/(p^n)\big)$, где p — простое б) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/(m),\mathbb{Z}/(n)$, где $(m,n)=(1)$ в) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/(270),\mathbb{Z}/(360)$ г) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/(360),\mathbb{Z}/(270)$

Задача 1.4. Найдите мультипликативную[2] группу: а) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/(p^n))$, где p — простое б) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/(30))$ в) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/(2)\oplus\mathbb{Z})$

далее во всех задачах речь идёт про конечномерные векторные пространства
над произвольным полем 𝕜

Задача 1.5. Покажите, что в наборе векторов $v_i\in V_i$ тогда и только тогда присутствует нулевой вектор, когда на этом наборе векторов зануляются все полилинейные отображения $\varphi : \prod V_i\to W$.

Задача 1.6. Пользуясь каноническим изоморфизмом $U^*\otimes V\simeq\mathrm{Hom}(U,V)$, запишем операторы $A : U\to V$ и $B : V\to W$ в виде $A=\sum\alpha_\nu\otimes a_\nu$, $B=\sum\beta_\mu\otimes b_\mu$ с

---

[1] групповая операция — сложение гомоморфизмов

[2] групповая операция — композиция автоморфизмов

$\alpha_\nu \in U^*$, $a_\nu \in V$, $\beta_\mu \in V^*$, $b_\mu \in W$. Запишите аналогичным образом их композицию $BA \in \mathrm{Hom}(U,W) \simeq U^* \otimes W$.

Задача 1.7. Пусть $e_i \in V$ и $x_i \in V^*$ — двойственные базисы. В какой оператор переходит при изоморфизме из зад. 1.6 *тензор Казимира* $\sum x_i \otimes e_i \in V^* \otimes V$?

Задача 1.8. Отображение $\tau : \mathrm{Hom}(V,V) \simeq V^* \otimes V \to (V \otimes V^*)^* \simeq \mathrm{Hom}(V,V)^*$, переводящее $\xi \otimes v$ в линейную форму, значение которой на $v' \otimes \xi'$ равно $\xi(v') \cdot \xi'(v)$, задаёт на пространстве $\mathrm{Hom}(V,V)$ корреляцию. Какой билинейной форме на $\mathrm{Hom}(V,V)$ она отвечает? Вырождена ли эта форма? Симметрична ли? Как она записывается в терминах матриц? Что за квадратичная форма ей соответствует?

Задача 1.9. Постройте канонические изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}\big(\,U \otimes \mathrm{Hom}(U,W)\,,\,W\big) \simeq \mathrm{End}\big(\mathrm{Hom}(U,W)\big) \simeq \mathrm{Hom}\big(\,U\,,\,\mathrm{Hom}(U,W)^* \otimes W\big)$$

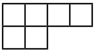
и выясните, какому эндоморфизму пространства $\mathrm{Hom}(U,W)$ отвечает при этом отображение $c : U \otimes \mathrm{Hom}(U,W) \to W$, действующее на разложимые тензоры по правилу $c(u \otimes \varphi) = \varphi(u)$. Может ли соответствующий c оператор $\tilde{c} : U \to \mathrm{Hom}(U,W)^* \otimes W$ иметь ненулевое ядро?

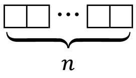
Задача 1.10. Постройте канонический изоморфизм

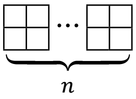
$$\mathrm{End}(U \otimes V \otimes W) \simeq \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Hom}(U,V) \otimes \mathrm{Hom}(V,W)\,,\,\mathrm{Hom}(U,W)\big)$$

и опишите линейное отображение $\mathrm{Hom}(U,V) \otimes \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(U,W)$ отвечающее тождественному эндоморфизму пространства $U \otimes V \otimes W$.

Задача 1.11. Опишите цикловой тип тензорного квадрата нильпотентного оператора в терминах диаграммы Юнга самого оператора. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для операторов циклового типа

а) 

б) 

в) 

.

Задача 1.12. Пусть операторы $f : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ и $g : \Bbbk^m \to \Bbbk^m$ диагонализуемы с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$. Найдите все собственные значения оператора $f \otimes g$.

Задача 1.13. Постройте изоморфизм пространства n – линейных форм $V^* \times \dots \times V^* \to \Bbbk$ а) с пространством $V^{\otimes n}$ б) с пространством, двойственным к $V^{*\otimes n}$.

Задача 1.14. Найдите размерность пространства билинейных форм $V \times V \xrightarrow{\varphi} \Bbbk$, удовлетворяющих при всех $u, v \in V$ равенствам а) $\varphi(v,v) = 0$ б) $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$.

Задача 1.15*. Найдите размерность пространства трилинейных форм $V \times V \times V \xrightarrow{\varphi} \Bbbk$, удовлетворяющих при всех $u, v, w \in V$ равенствам а) $\varphi(u,u,u) = 0$
б) $\varphi(u,v,w) = \varphi(v,u,w) = \varphi(u,w,v)$ в) $\varphi(u,v,w) = \varphi(v,u,w) = \varphi(u,w,w)$
г) $\varphi(u,v,w) = \varphi(v,u,w)$ д) $\varphi(u,v,w) = \varphi(v,w,u)$ е) $\varphi(u,v,v) = \varphi(u,u,v) = 0$
ж) $\varphi(u,v,w) + \varphi(v,w,u) + \varphi(w,u,v) = 0$.

§2. Тензорная алгебра

2.1. Тензорные степени векторного пространства. Тензорное произведение n экземпляров векторного пространства V с собой $V^{\otimes n} \overset{\text{def}}{=} V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$ называется n-той *тензорной степенью* пространства V. Мы также полагаем по определению $V^{\otimes 0} \overset{\text{def}}{=} \Bbbk$ и $V^{\otimes 1} \overset{\text{def}}{=} V$. Тензорное умножение векторов задаёт на бесконечной прямой сумме

$$TV \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geqslant 0} V^{\otimes n}$$

структуру ассоциативной (некоммутативной) градуированной алгебры. Фиксация в пространстве V какого-либо базиса $e_1, e_2, \dots, e_d$ отождествляет эту алгебру с алгеброй многочленов от d некоммутирующих друг с другом переменных e_ν: тензорные мономы $e_{\nu_1} \otimes e_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes e_{\nu_m}$ составляют базис векторного пространства TV над $\Bbbk$, а их умножение заключается в приписывании друг к другу через знак $\otimes$. Компонента $V^{\otimes n} \subset TV$ при такой интерпретации становится пространством однородных тензорных многочленов степени n.

Алгебра TV называется *тензорной алгеброй* пространства V. Это *свободная ассоциативая $\Bbbk$-алгебра*, порожденная пространством V, в том смысле, что вложение

$$\iota : V \hookrightarrow TV \tag{2-1}$$

в качестве подпространства $V^{\otimes 1}$ обладает универсальным свойством, аналогичным универсальному свойству базиса свободного модуля. А именно, для любых ассоциативной $\Bbbk$-алгебры A и $\Bbbk$-линейного отображения $f : V \to A$ существует единственный такой гомоморфизм алгебр $\alpha : TV \to A$, что $f = \alpha \circ \iota$, т. е. гомоморфизмы алгебр $TV \to A$ биективно соответствуют линейным отображениям $V \to A$.

Упражнение 2.1. Проверьте это и убедитесь, что алгебра TV вместе с вложением (2-1) определяется этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр, перестановочного с вложением ι.

Предложение 2.1

Для конечномерного пространства V *полная свертка*, сопоставляющая паре разложимых тензоров $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ число

$$\langle\, v\,,\, \xi \,\rangle \overset{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i) \in \Bbbk\,, \tag{2-2}$$

является невырожденным спариванием между $V^{\otimes n}$ и $\left(V^*\right)^{\otimes n}$ и задаёт изоморфизм

$$\left(V^{\otimes n}\right)^* \simeq \left(V^*\right)^{\otimes n} \tag{2-3}$$

Доказательство. Поскольку правая часть (2-2) полилинейна по каждому v_i и ξ_i, правило $v \mapsto \langle\, v\,,\, \xi \,\rangle$ корректно задаёт линейный функционал $V^{\otimes n} \to \Bbbk$. Так как он полилинейно зависит от каждого ξ_i, сопоставление такого функционала разложимому тензору $\xi \in V^{*\otimes n}$ корректно задаёт линейное отображение $V^{*\otimes n} \to \left(V^{\otimes n}\right)^*$. Конечномерность V существенна для проверки его биективности: выбирая двойственные базисы $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in V^*$, видим, что отвечающие им базисы из тензорных мономов $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}$ и $x_{j_1} \otimes x_{j_2} \otimes \cdots \otimes x_{j_s}$ тоже двойственны. ☐

Следствие 2.1

Сопоставление разложимому тензору $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ полилинейной формы $V \times V \times \cdots \times V \to \Bbbk$, $(v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \prod\limits_{i=1}^{n} \xi_i(v_i)$, задаёт для любого конечномерного пространства V канонический изоморфизм

$$\left(V^*\right)^{\otimes n} \simeq \mathrm{Hom}(V, \dots, V; \Bbbk). \tag{2-4}$$

Доказательство. В силу универсального свойства тензорного произведения $V^{\otimes n}$ пространство $\left(V^{\otimes n}\right)^*$ линейных отображений $V^{\otimes n} \to \Bbbk$ изоморфно пространству n-линейных форм $V \times V \times \cdots \times V \to \Bbbk$. Остаётся взять композицию этого изоморфизма с изоморфизмом (2-3). ☐

2.1.1. Частичные свертки. Фиксируем пару инъективных не обязательно монотонных отображений $\{1, 2, \dots, p\} \xhookleftarrow{I} \{1, 2, \dots, m\} \xhookrightarrow{J} \{1, 2, \dots, q\}$ и положим $i_\nu = I(\nu)$, $j_\nu = J(\nu)$, так что $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ и $J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ являются словами одинаковой длины, состоящими из неповторяющихся в пределах каждого слова индексов. Линейный оператор, который для каждого $\nu = 1, 2, \dots, m$ сворачивает i_ν-тый сомножитель в $V^{*\otimes p}$ с j_ν-тым сомножителем в $V^{\otimes q}$, а все остальные тензорные сомножители оставляет в первоначальном порядке:

$$\begin{gathered} c^I_J : V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \to V^{*\otimes (p-m)} \otimes V^{\otimes (q-m)}, \\ \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q \mapsto \prod_{\nu=1}^{m} \xi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot \big(\bigotimes_{i \notin I} \xi_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{j \notin J} v_j\big), \end{gathered} \tag{2-5}$$

называется *частичной сверткой* по индексам I и J. Отметим, что разные отображения I и J приводят к *разным* отображениям свёртки.

Пример 2.1 (свертка вектора с полилинейной формой)

Интерпретируем n-линейную форму $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ как тензор из $V^{*\otimes n}$ посредством изоморфизма из сл. 2.1. Свёртка этого тензора по первому тензорному сомножителю с произвольно выбранным вектором $v \in V$ лежит в $V^{*\otimes (n-1)}$ и является таким образом $(n-1)$-линейной формой на V, которая получается из исходной формы φ фиксацией вектора v в качестве первого аргумента.

Упражнение 2.2. Убедитесь в этом.

Она называется *внутренним произведением* v и φ и обозначается $v \llcorner \varphi$ или $i_v \varphi$. Итак, $i_v\varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$.

2.1.2. Линейный носитель тензора. Для заданного тензора $t \in V^{\otimes n}$ пересечение всех таких векторных подпространств $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$, называется *линейным носителем* тензора t и обозначается $\mathrm{Supp}(t) \subset V$. Иначе его можно охарактеризовать как наименьшее по включению подпространство $U \subset V$, такое что $t \in U^{\otimes n}$, или как наименьшее по размерности подпространство с таким свойством. Тождественность этих описаний вытекает из того, что включения $t \in U^{\otimes n}$ и $t \in W^{\otimes n}$ для некоторых подпространств $U, W \subset V$ влекут включение $t \in (U \cap W)^{\otimes n}$, в чём легко убедиться, раскладывая t по базису из тензорных мономов, происходящему из такого базиса

$$e_1, \dots , e_p, u_1, \dots , u_q, w_1, \dots , w_r, v_1, \dots , v_s$$

пространства V, в котором e_i образуют базис в $U \cap W$, u_j и w_k дополняют его до базисов в U и W соответственно, а v_m дополняют объединение всех этих векторов до базиса в V: условие $t \in U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ означает, что в t входят только мономы, не содержащие никаких иных векторов, кроме e_i.

2.1.3. Ранг тензора $t \in V^{\otimes n}$ определяется как $\mathrm{rk}\, t \overset{\text{def}}{=} \dim \mathrm{Supp}(t)$. Тензор t с $\mathrm{Supp}(t) \subsetneq V$ называется *вырожденным*. Говоря неформально, такой t эффективно зависит от меньшего числа «координат», чем имеется в V, т. е. существует линейная замена базиса, уничтожающая в многочлене t часть переменных. Например, если $\dim \mathrm{Supp}(t) = 1$, то $t = c \cdot v^{\otimes n}$ для некоторого $c \in \Bbbk$ и $v \in V$, порождающего $\mathrm{Supp}(t)$.

2.1.4. Линейные порождающие носителя. Для нахождения ранга данного тензора t желательно иметь явное описание его носителя как линейной оболочки эффективно вычислимого по t конечного набора векторов. Такое описание даётся в терминах свёрток. Для каждой (не обязательно монотонной) последовательности $J = j_1 j_2 \dots j_{n-1}$ из $n-1$ неповторяющихся индексов $1 \leqslant j_\nu \leqslant n$ обозначим через

$$c_t^J : V^{*\otimes(n-1)} \to V , \quad \xi \mapsto c^{1,\,2,\,\dots\,,(n-1)}_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}}(\xi \otimes t) \tag{2-6}$$

полную свёртку с тензором t, вычисляющую ν-й сомножитель в $V^{*\otimes(n-1)}$ на j_ν-том сомножителе t для всех $1 \leqslant \nu \leqslant (n-1)$. Результатом такой свёртки является линейная комбинация векторов, стоящих в том тензорном сомножителе тензора t, номер которого не содержится в последовательности J . Очевидно, что эта линейная комбинация лежит в $\mathrm{Supp}(t)$.

Теорема 2.1

Пространство $\mathrm{Supp}(t)$ линейно порождается образами всех свёрток (2-6).

Доказательство. Пусть $\mathrm{Supp}(t) = W$. Чтобы убедиться в том, что образы свёрток (2-6) линейно порождают W, достаточно доказать, что каждая линейная форма $\xi \in V^*$, которая аннулирует все подпространства $\mathrm{im}\left(c_t^I\right)$, аннулирует и подпространство W. Предположим противное: пусть $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W, но аннулирует все $c_t^J\left(V^{*\otimes(n-1)}\right)$. Выберем в V^* такой базис $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_d$, чтобы $\xi_1=\xi$ и ограничения $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_k$ на W составляли базис в W^*. Обозначим через $w_1,w_2,\dots,w_k$ двойственный базис в W и разложим t по этому базису. Значение $\xi\left(c_t^I\left(\xi_{\nu_1}\otimes\xi_{\nu_2}\otimes\cdots\otimes\xi_{\nu_{n-1}}\right)\right)$ представляет собою полную свёртку тензора t с базисным тензорным мономом $\xi_1\otimes\xi_{\nu_1}\otimes\xi_{\nu_2}\otimes\cdots\otimes\xi_{\nu_{n-1}}$ по всем n сомножителям в том порядке, что предписан последовательностью J, и равно коэффициенту при соответствующем двойственном мономе в разложении t по базисным тензорным мономам. Выбирая надлежащие J, мы можем таким образом получить коэффициент при любом содержащем w_1 мономе из разложения t. Значит, все они нулевые, и w_1 не входит в $\mathrm{Supp}(t)$, что противоречит его выбору. □

2.2. Симметрические и внешние степени. Полилинейное отображение

$$\varphi\,:\,\underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{n}\to U \tag{2-7}$$

называется *симметричным*, если при перестановках аргументов оно не изменяет своего значения, и *кососимметричным*, если оно принимает нулевое значение, когда какие-то два из аргументов совпадают.

Упражнение 2.3. Покажите, что при перестановке любой пары аргументов значение кососимметричного полилинейного отображения меняет знак, и что над полем характеристики $\neq 2$ это свойство влечёт кососимметричность.

Симметричные и кососимметричные полилинейные отображения образуют в векторном пространстве $\mathrm{Hom}(V,\dots,V;U)$ всех полилинейных отображений подпространства, которые мы будем обозначать, соответственно, через

$$\mathrm{Sym}^n(V,U)\subset\mathrm{Hom}(V,\dots,V;U)\quad\text{и}\quad\mathrm{Skew}^n(V,U)\subset\mathrm{Hom}(V,\dots,V;U)\,.$$

Взятие композиции фиксированного (косо) симметричного отображения

$$\varphi\,:\,\underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{n}\to U$$

с линейными операторами $F\,:\,U\to W$ задаёт линейный оператор $F\mapsto F\circ\varphi$ из пространства $\mathrm{Hom}(U,W)$ в в пространства $\mathrm{Sym}^n(V,W)$ и $\mathrm{Skew}^n(V,W)$ соответственно. Если для всех W это отображение — изоморфизм, то (косо)симметричное полилинейное отображение φ называется *универсальным*.

Универсальное симметричное полилинейное отображение

$$\sigma\,:\,\underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{n}\to S^nV \tag{2-8}$$

называется *коммутативным произведением* векторов, а модуль S^nV, куда оно действует, называется n-той *симметрической степенью* модуля V. Произведение $\sigma(v_1,v_2,\dots,v_n)$ обычно обозначается через $v_1\cdot v_2\cdot\,\cdots\,\cdot v_n$ или просто $v_1v_2\,\dots\,v_n$.

Универсальное кососимметричное полилинейное отображение

$$\alpha : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{n} \to \Lambda^n V \tag{2-9}$$

называется *внешним*[1] произведением векторов, а модуль $\Lambda^n V$, куда оно действует, называется n-той *внешней степенью* модуля V. Кососимметричное произведение $\alpha(v_1, v_2, \dots, v_n)$ принято обозначать $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n$.

Упражнение 2.4. Покажите, что $S^n V$ и $\Lambda^n V$ (если они существуют) единственны с точностью до единственного изоморфизма, коммутирующего с (косо) коммутативным умножением.

Модули $S^n V$ и $\Lambda^n V$ являются фактор модулями тензорной степени $V^{\otimes n}$ по соотношениям (косо) коммутирования. Удобно проделать эту факторизацию одновременно для всех n, взяв фактор свободной ассоциативной алгебры $T(V)$ по надлежащим идеалам.

2.2.1. Симметрическая алгебра пространства V. Рассмотрим в $V \otimes V$ линейную оболочку всевозможных разностей

$$u \otimes w - w \otimes u \tag{2-10}$$

и обозначим порождённый ею двусторонний идеал в тензорной алгебре пространства V через $\mathcal{I}_{\text{sym}} \subset TV$. Он состоит из конечных линейных комбинаций тензоров, которые можно получить умножая разности (2-10) с обеих сторон на любые элементы тензорной алгебры. Пересечение этого идеала с однородной компонентой $V^{\otimes n}$ линейно порождается разностями разложимых тензоров вида

$$(\dots \otimes v \otimes w \otimes \dots) - (\dots \otimes w \otimes v \otimes \dots), \tag{2-11}$$

где обозначенные многоточиями фрагменты не меняются, а весь идеал является прямой сумой таких однородных компонент:

$$\mathcal{I}_{\text{sym}} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \left(\mathcal{I}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n} \right).$$

Фактор алгебра $SV \overset{\text{def}}{=} TV/\mathcal{I}_{\text{sym}}$ называется *симметрической алгеброй* векторного пространства V, а индуцированное в ней умножение называется *симметрическим умножением* и обозначается точкой (которую принято опускать). Симметрическая алгебра является прямой суммой своих однородных компонент:

$$SV = \bigoplus_{n \geqslant 0} S^n V, \quad \text{где} \quad S^n V \overset{\text{def}}{=} V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n}).$$

Выбор базиса $e_1, e_2, \dots, e_d \in V$ отождествляет алгебру SV с алгеброй многочленов $\Bbbk[e_1, e_2, \dots, e_d]$ от базисных векторов e_i, а подпространство $S^n V$ — с пространством однородных многочленов степени n.

Упражнение 2.5. Найдите $\dim S^n V$.

---

[1] или *суперкоммутативным*

Предложение 2.2
Композиция тензорного умножения с факторизацией по $\mathscr{I}_{\text{sym}}$:

$$\sigma : \underbrace{V\times V\times \cdots \times V}_{n} \overset{\tau}{\dashrightarrow} V^{\otimes n} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} S^n(V) \tag{2-12}$$

является универсальной симметрической полилинейной формой (т. е. коммутативным умножением (2-8)).

Доказательство. Любое полилинейное отображение $\varphi : V\times V\times \cdots \times V \to W$ единственным образом разлагается в композицию $\varphi = F\circ\tau$, где $F : V^{\otimes n}\to W$ линейно. При этом F пропускается через π тогда и только тогда, когда

$$F(\cdots \otimes v\otimes w\otimes \cdots) = F(\cdots \otimes w\otimes v\otimes \cdots),$$

что равносильно тому что $\varphi(\dots, v, w, \dots) = \varphi(\dots, w, v, \dots)$. □

Упражнение 2.6. Убедитесь, что SV является *свободной коммутативной алгеброй*, порождённой V, в том смысле, что для любой коммутативной $\Bbbk$-алгебры A и любого линейного отображения $f : V\to A$ существует единственный гомоморфизм алгебр $\widetilde{f} : SV\to A$ такой, что $f = \widetilde{\varphi}\circ\iota$, где $\iota : V\hookrightarrow SV$ вкладывает V в SV в качестве многочленов первой степени. Проверьте также, что SV и ι определяются этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр, перестановочного с ι.

2.2.2. Внешняя алгебра пространства V определяется как фактор алгебра

$$\Lambda V \overset{\text{def}}{=} TV/\mathscr{I}_{\text{skew}}$$

свободной ассоциативной алгебры TV по двустороннему идеалу $\mathscr{I}_{\text{skew}}\subset TV$, порожденному всеми тензорами вида

$$v\otimes v\in V\otimes V\,. \tag{2-13}$$

Упражнение 2.7. Покажите, что подпространство $\mathscr{I}_{\text{skew}}\cap V^{\otimes 2}$ содержит все суммы

$$v\otimes w + w\otimes v \quad (\text{с любыми } v, w\in V)\,,$$

и если $1+1$ обратимо в K, то $\mathscr{I}_{\text{skew}}\cap V^{\otimes 2}$ линейно порождается такими суммами.

Как и в симметричном случае, идеал $\mathscr{I}_{\text{skew}}$ является прямой суммой своих однородных компонент

$$\mathscr{I}_{\text{skew}} = \bigoplus_{n\geqslant 0}\left(\mathscr{I}_{\text{skew}}\cap V^{\otimes n}\right)$$

и его компонента n-той степени $\mathscr{I}_{\text{skew}}\cap V^{\otimes n}$ является линейной оболочкой разложимых тензоров вида $(\cdots\otimes v\otimes v\otimes\cdots)$ и по упр. 2.7 содержит все суммы вида

$$(\cdots \otimes v\otimes w\otimes \cdots) + (\cdots \otimes w\otimes v\otimes \cdots)\,. \tag{2-14}$$

Фактор алгебра ΛV называется *внешней*[1] алгеброй пространства V. Как и симметрическая алгебра, она является прямой суммой подпространств

$$\Lambda^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}) \,,$$

называемых *внешними степенями* пространства V.

Упражнение 2.8. Докажите, что композиция $\alpha : V \times \ldots \times V \overset{\tau}{\dashrightarrow} V^{\otimes n} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \Lambda^n(V)$, где τ — тензорное произведение, а π — факторизация по $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}$, является универсальным кососимметричным полилинейным отображением.

Индуцированное умножение в алгебре ΛV называется *внешним*[2] и обозначается $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$. Согласно упр. 2.7 оно меняет знак при перестановке любых двух последовательных сомножителей, и стало быть, при произвольной перестановке сомножителей внешнее произведение умножается на знак перестановки. Выбор базиса $e_1, e_2, \ldots, e_d \in V$ отождествляет внешнюю алгебру ΛV с алгеброй *грассмановых многочленов* $\Bbbk\langle e_1, e_2, \ldots, e_d\rangle$ от базисных векторов e_i. Так как $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$, каждый грассманов моном степени n линеен по всем входящим в него переменным и с точностью до знака записывается как

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} \,, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant d \,. \tag{2-15}$$

Лемма 2.1

Мономы (2-15), индекс $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ которых пробегает все строго возрастающие n-элементные последовательности в $\{1, 2, \ldots, d\}$, составляют базис пространства $\Lambda^n V$. В частности, $\Lambda^n V = 0$ при $n > \dim V$ и

$$\dim \Lambda^n V = \binom{\dim V}{n}, \quad \dim \Lambda V = 2^{\dim V} \,.$$

Доказательство. Рассмотрим $\binom{d}{n}$-мерное векторное пространство U с базисом из символов ξ_I и кососимметричное полилинейное отображение

$$\alpha : V \times V \times \cdots \times V \to U \,, \quad (e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n}) \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \xi_I \,,$$

где $I = (j_{\sigma(1)}, j_{\sigma(2)}, \ldots, j_{\sigma(n)})$ — единственная *возрастающая* перестановка индексов $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$. Оно универсально, поскольку для любого кососимметричного полилинейного отображения $\varphi : V \times V \times \cdots \times V \to W$ равенство

$$F\left(\alpha(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n})\right) = \varphi(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n})$$

корректно задаёт единственный линейный оператор $F : U \to W$ со свойством $\varphi = F \circ \alpha$. Тем самым, имеется канонический изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} \Lambda^n V$, переводящий ξ_I в $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} = e_I$. □

---

[1] или *грассмановой*

[2] а также *суперкоммутативным* или *грассмановым*

2.3. Симметрические и кососимметрические тензоры. Начиная с этого места и до конца параграфа мы будем заниматься конечномерными векторными пространствами над полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$. Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах. А именно, для каждого $g \in S_n$ положим

$$g(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{g(1)} \otimes v_{g(2)} \otimes \cdots \otimes v_{g(n)} . \tag{2-16}$$

Поскольку правая часть полилинейно зависит от $v_1, v_2, \dots, v_n$, эта формул корректно определяет линейный оператор $g : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$.

Определение 2.1
Подпространства $\operatorname{Sym}^n V \overset{\text{def}}{=} \{ t \in V^{\otimes n} \mid g(t) = t \quad \forall g \in S_n \}$ и $\operatorname{Skew}^n V \overset{\text{def}}{=} \{ t \in V^{\otimes n} \mid g(t) = \operatorname{sgn}(g) \cdot t \quad \forall g \in S_n \}$ в тензорной степени $V^{\otimes n}$ называются, соответственно, пространствами *симметричных* и *кососимметричных* тензоров.

2.3.1. Симметризация и альтернирование. Над полем характеристики нуль операторы *симметризации* и *альтернирования*

$$\operatorname{sym}_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} g(t) \; : \quad V^{\otimes n} \to \operatorname{Sym}^n(V) \tag{2-17}$$

$$\operatorname{alt}_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot g(t) \; : \quad V^{\otimes n} \to \operatorname{Skew}^n(V) \tag{2-18}$$

являются проекторами n-той тензорной степени $V^{\otimes n}$ на подпространства симметрических и кососимметрических тензоров соответственно.

Упражнение 2.9. Докажите для любых $t \in V^{\otimes n}$, $s \in \operatorname{Sym}^n(V)$ и $a \in \operatorname{Skew}^n(V)$ при всех $n \geqslant 2$ соотношения а) $\operatorname{sym}_n(t) \in \operatorname{Sym}^n(V)$ б) $\operatorname{alt}_n(t) \in \operatorname{Skew}^n(V)$ в) $\operatorname{sym}_n(s) = s$ г) $\operatorname{alt}_n(a) = a$ д) $\operatorname{sym}_n(a) = \operatorname{alt}_n(s) = 0$.

Пример 2.2 (разложение тензорного квадрата)
При $n = 2$ симметризация и альтернирование доставляют прямое разложение

$$V^{\otimes 2} = \operatorname{Sym}^2(V) \oplus \operatorname{Skew}^2(V) . \tag{2-19}$$

В самом деле, поскольку каждый разложимый тензор представляется в виде суммы

$$u \otimes w = \frac{u \otimes w + w \otimes u}{2} + \frac{u \otimes w - w \otimes u}{2} = \operatorname{sym}_2(u \otimes w) + \operatorname{alt}_2(u \otimes w) ,$$

образы проекторов sym_2 и alt_2 порождают $V^{\otimes 2}$, а т. к. каждый из них по упр. 2.9 аннулирует образ другого, эти образы имеют нулевое пересечение. Если интерпретировать $V^{\otimes 2}$ как пространство билинейных форм на V^*, разложение (2-19) будет ни чем иным, как каноническим разложением билинейной формы в сумму симметрической и кососимметрической.

Пример 2.3 (разложение тензорного куба)
Сравнение размерностей показывает, что при $n = 3$ тензор общего вида *не* является суммой своей симметризации и альтернирования. Чтобы найти в пространстве $V^{\otimes 3}$ дополнительное к $\mathrm{Sym}^3(V)\oplus\mathrm{Skew}^3(V)$ подпространство , рассмотрим разность

$$p = E - \mathrm{sym}_3 - \mathrm{alt}_3 = \left(2\,E - T - T^2\right)/\,3\,, \tag{2-20}$$

где через $T : V^{\otimes 3} \to V^{\otimes 3}$ обозначен оператор, отвечающий циклической перестановке $|123\rangle \in S_3$, а через $E = T^3$ — тождественный оператор. Поскольку

$$p^2 = \left(4E + T^2 + T - 4\,T - 4\,T^2 + 2\,E\right)/\,9 = \left(2E - T - T^2\right)/\,3 = p\,,$$

оператор p является проектором.

Упражнение 2.10. Убедитесь, что $p\circ\mathrm{alt}_3 = \mathrm{alt}_3\circ p = p\circ\mathrm{sym}_3 = \mathrm{sym}_3\circ p = 0$, выведите отсюда, что $V^{\otimes 3}$ является прямой суммой подпространств $\mathrm{Sym}^3(V)$, $\mathrm{Skew}^3(V)$ и $\mathrm{im}(p)$, и покажите, что $\mathrm{im}(p)$ состоит из 3-линейных форм $\varphi : V^*\times V^*\times V^* \to \Bbbk$, удовлетворяющих *тождеству Якоби* $\varphi(\xi,\eta,\zeta)+\varphi(\eta,\zeta,\xi)+\varphi(\zeta,\xi,\eta) = 0$ для всех $\xi,\eta,\zeta\in V^*$.

При больших n разложение $V^{\otimes n}$ в прямую сумму подпространств тензоров с различными «типами симметрии» становится более сложным и является предметом теории представлений симметрических групп.

2.3.2. Стандартные базисы. В записи симметричного тензора $t\in\mathrm{Sym}^n V$ в виде линейной комбинации тензорных мономов, составленных из векторов некоторого базиса $e_1,e_2,\dots,e_d\in V$, все мономы, образующие одну орбиту группы S_n, участвуют с одинаковым коэффициентом, зависящим только от орбиты. Поэтому *полные симметрические тензоры*

$$e_{[m_1,m_2,\dots,m_d]} \overset{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c}\text{сумма всех различных тензорных мономов, состоящих из}\\ m_1 \text{ множителей } e_1,\ m_2 \text{ множителей } e_2,\ \dots,\ m_d \text{ множителей } e_d\end{array}\right) \tag{2-21}$$

образуют базис пространства $\mathrm{Sym}^n V$. Его элементы занумерованы наборами $(m_1,m_2,\dots,m_d)$ целых чисел $0\leqslant m_\nu\leqslant d$ с сумой $\sum_\nu m_\nu = n$.

Упражнение 2.11. Удостоверьтесь, что сумма в правой части (2-21) состоит из

$$\frac{n!}{m_1!\;m_2!\;\cdots\;m_d!}$$

различных слагаемых.

Аналогично, базис в $\mathrm{Skew}^n V$ образуют *полные кососимметрические тензоры*

$$e_I = e_{\langle i_1,i_2,\dots,i_n\rangle} \overset{\text{def}}{=} \sum_{g\in S_n}\mathrm{sgn}(g)\cdot e_{i_{g(1)}}\otimes e_{i_{g(2)}}\otimes\cdots\otimes e_{i_{g(n)}} \tag{2-22}$$

занумерованные наборами $I = (i_1,i_2,\dots,i_n)$ строго возрастающих натуральных чисел $1\leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_n\leqslant d$.

Предложение 2.3

Если $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$, то ограничение коммутативного умножения[1] $V^{\otimes n} \to S^n V$ на подпространство симметрических тензоров $\mathrm{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ и ограничение внешнего умножения[2] $V^{\otimes n} \to \Lambda^n V$ на подпространство кососимметрических тензоров $\mathrm{Skew}^n \subset V^{\otimes n}$ являются изоморфизмами векторных пространств. Их действие на стандартные базисные мономы (2-21) и (2-22) таково:

$$e_{[m_1,m_2,\dots,m_d]} \mapsto \frac{(m_1+m_2+\dots+m_d)!}{m_1!\cdot m_2!\,\cdots\, m_d!}\cdot e_1^{m_1}e_2^{m_2}\dots e_d^{m_d} \tag{2-23}$$

$$e_{\langle i_1,i_2,\dots,i_d\rangle} \mapsto n!\cdot e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\dots\wedge e_{i_d} \tag{2-24}$$

Доказательство. Каждое из $n!/(m_1!\,m_2!\cdots m_d!\,)$ слагаемых суммы (2-21) проектируется в коммутативный моном $e_1^{m_1}e_2^{m_2}\dots e_d^{m_d}$, а каждое из $n!$ слагаемых суммы (2-22) — в грассманов моном $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\dots\wedge e_{i_n}$. □

Предостережение 2.1. Не смотря на изоморфизмы из предл. 2.3, содержащиеся в $V^{\otimes n}$ *под*пространства $\mathrm{Sym}^n V$ и $\mathrm{Skew}^n V$ ни в коем случае не следует путать с *фактор* пространствами $S^n V$ и $\Lambda^n V$, получающимися из $V^{\otimes n}$ склейкой некоторых тензоров между собою. Над полем характеристики $p > 0$ многие симметричные тензоры и все кососимметричные тензоры, степень которых больше p, *аннулируются* проекциями $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ и $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$. Даже в характеристике нуль изоморфизмы из предл. 2.3 *не* отождествляют друг с другом стандартные базисные векторы тензорных и полиномиальных пространств, а выражают их друг через друга с поправочными множителями, которые приходится учитывать как при подъёме на (косо) симметричные тензоры имеющихся в алгебрах многочленов умножений, так и при спуске в пространства многочленов свёрток, которые бывают между тензорами.

2.4. Поляризация многочленов. По предл. 2.3 над полем нулевой характеристики для любого $f \in S^n V^*$ существует единственная симметричная n-линейная форма

$$\widetilde{f} : V\times V\times \dots \times V \to \Bbbk \tag{2-25}$$

которая отображается в f при факторизации $\left(V^*\right)^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V^*$. Она называется *полной поляризацией* однородного многочлена f . При $n = 2$, полная поляризация $\widetilde{f}$ представляет собою поляризацию квадратичной формы до до симметричной билинейной, обсуждавшуюся в курсе линейной алгебры. Для произвольного n полная поляризация базисного монома $f = x_1^{m_1}x_2^{m_2}\,\cdots\, x_d^{m_d}$ степени $\sum m_i = n$ имеет вид[3]

$$\widetilde{f} = \frac{m_1!\; m_2!\,\cdots\, m_d!}{n!}\cdot x_{[m_1,m_2,\dots,m_d]}\,. \tag{2-26}$$

---

[1] т. е. отображения факторизации по соотношениям коммутирования (2-11)

[2] т. е. отображения факторизации по соотношениям антикоммутирования (2-14)

[3] см. формулу (2-23) на стр. 28

Полная поляризация произвольного многочлена вычисляется отсюда по линейности отображения $f \mapsto \widetilde{f}$.

2.4.1. Значение многочлена на векторе. Каждый элемент $f \in S^n V^*$ канонически задаёт функцию $f : V \to \Bbbk$, переводящую вектор $v \in V$ в число

$$\mathrm{ev}_v(f) = f(v) \overset{\text{def}}{=} \widetilde{f}(v, v, \dots, v) \in \Bbbk\,, \tag{2-27}$$

называемое *значением* многочлена $f \in S^n V^*$ на векторе $v \in V$. Если зафиксировать двойственные друг другу базисы $e_1, e_2, \dots, e_d \in V$ и $x_1, x_2, \dots, x_d \in V^*$ и отождествить SV^* с алгеброй многочленов $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_d]$, значение многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на векторе $v = \sum \alpha_i e_i \in V$ будет равно результату подстановки в f численных значений координат вектора v

$$f(v) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)\,. \tag{2-28}$$

Действительно, полная свёртка (2-27) базисного симметричного тензора

$$\widetilde{f} = x_{[m_1, m_2, \dots, m_d]}$$

с тензором $v^{\otimes n}$ это сумма $n!/(m_1! \cdot m_2! \,\cdots\, m_d!)$ одинаковых произведений

$$x_1(v)^{m_1} \cdot x_2(v)^{m_2} \cdot \,\cdots\, \cdot x_d(v)^{m_d} = \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \,\cdots\, \alpha_d^{m_d}\,,$$

что равно результату подстановки $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ в одночлен

$$f = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \,\cdots\, m_d!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \,\cdots\, x_d^{m_d}\,.$$

Из сказанного вытекает, что результат подстановки координат вектора $v \in V$ в многочлен $f \in S^n V^*$ зависит только от v и f, но не от выбора пары двойственных базисов в V и V^*, используемых для явной записи многочлена и вектора в координатах, и что полная поляризация $\widetilde{f}$ однородного многочлена f однозначно характеризуется как единственная симметричная такая полилинейная форма от $\deg f$ аргументов, что $\widetilde{f}(v, v, \dots, v) = f(v)$ для всех $v \in V$.

2.4.2. Двойственность. Полная свёртка между $V^{\otimes m}$ и $V^{*\otimes m}$ индуцирует над полем характеристики нуль невырожденное спаривание между пространствами $S^m V$ и $S^m V^*$, сопоставляющее многочленам $f \in S^n V$ и $g \in S^n V^*$ полную свёртку их полных поляризаций $\widetilde{f} \in V^{\otimes m}$ и $\widetilde{g} \in V^{*\otimes m}$.

Упражнение 2.12. Проверьте, что ненулевые спаривания между мономами, составленными из элементов двойственных базисов пространств V и V^*, исчерпываются значениями

$$\left\langle e_1^{m_1} e_2^{m_2} \,\cdots\, e_d^{m_d}\,,\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \,\cdots\, x_d^{m_d} \right\rangle = \frac{m_1! \cdot m_2! \cdot \,\cdots\, \cdot m_d!}{n!}\,. \tag{2-29}$$

2.4.3. Частные производные. Внутренне произведение[1] с фиксированным вектором $v \in V$ задаёт отображение $i_v : V^{*\otimes n} \to V^{*\otimes(n-1)}$. Применяя его к полной поляризации $\widetilde{f}$ многочлена $f \in S^n(V^*)$ и затем проектируя результат из $V^{*\otimes(n-1)}$ в $S^{n-1}(V^*)$, мы получаем линейное отображение $\mathrm{pl}_v : S^nV^* \to S^{n-1}V^*$, которое включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
V^{*\otimes n} \supset \mathrm{Sym}^n V^* \arrow[r, "i_v"] \arrow[d] & V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d] \\
S^nV^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_v"] & S^{n-1}V^*
\end{tikzcd}$$

и переводит многочлен $f(x) = \widetilde{f}(x, x, \dots\, x) \in S^n(V^*)$ в билинейно зависящий от f и v многочлен $\mathrm{pl}_v f(x) \overset{\text{def}}{=} \widetilde{f}(v, x, \dots\, x) \in S^{n-1}(V^*)$, называемый *полярой* v относительно f. При $n = 2$ эта конструкция задаёт полярное преобразование относительно квадрики $f = 0$ в $\mathbb{P}(V)$ и сопоставляет вектору v уравнение его полярной гиперплоскости.

В двойственных базисах $e_1, e_2, \dots, e_d \in V$ и $x_1, x_2, \dots, x_d \in V^*$ свёртка первого тензорного сомножителя в $V^{*\otimes n}$ с вектором $e_i \in V$ переводит базисный симметрический моном (2-21) в точно такой же базисный моном, но только содержащий $(m_i - 1)$ множителей e_i, или в нуль, если $m_i = 0$. Поэтому, по формуле (2-23) из предл. 2.3

$$\mathrm{pl}_{e_i} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \,\cdots\, x_d^{m_d} = \frac{m_i}{n}\, x_1^{m_1} \cdots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i - 1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \cdots x_d^{m_d} = \; = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_i} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \,\cdots\, x_d^{m_d} \,.$$

В силу линейности $\mathrm{pl}_v f$ по v и f поляра любого вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ относительно любого многочлена f равна делённой на $\deg f$ *производной* многочлена f в направлении вектора v:

$$\mathrm{pl}_v f = \frac{1}{\deg(f)}\, \partial_v f = \frac{1}{\deg(f)} \sum \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \,.$$

В частности, правая часть этой формулы не зависит от выбора двойственных координат в V и V^*, а частные производные коммутируют: $\partial_u \partial_w = \partial_w \partial_u$ и удовлетворяют замечательному соотношению

$$m!\, \frac{\partial^m f}{\partial u^m}(w) = n!\, \widetilde{f}(\underbrace{u, u, \dots, u}_{m}, \underbrace{w, w, \dots, w}_{n}) = (n-m)!\, \frac{\partial^{n-m} f}{\partial w^{n-m}}(u)\,, \qquad \text{(2-30)}$$

справедливому для любых $u, w \in V$, $f \in S^nV^*$ и $0 \leqslant m \leqslant n$.

Упражнение 2.13. Докажите правило Лейбница: $\partial_v(f \cdot g) = \partial_v(f) \cdot g + f \cdot \partial_v(g)$.

---

[1] см. прим. 2.1 на стр. 20

2.4.4. Формула Тейлора. Поскольку полилинейная форма $\widetilde{f}$ симметрична, её аргументы можно писать в любом порядке. Условимся писать $\widetilde{f}(u^m, w^{n-m})$, когда какие-то m аргументов формы $\widetilde{f}$ равны u, а остальные $(n-m)$ равны w. Дословный повтор рассуждения, использованного при раскрытии скобок в биноме $(u+w)^n$, выводит из полилинейности и симметричности формы $\widetilde{f}$ равенство

$$\widetilde{f}(u+w,\, u+w,\, \dots,\, u+w) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \widetilde{f}(u^m, w^{n-m}), \quad \text{где} \quad n = \deg f\,.$$

Формула (2-30) позволяет переписать его как *разложение Тейлора*

$$f(u+w) = \sum_{m=0}^{\deg f} \frac{1}{m!}\, \partial_w^m f(u)\,. \tag{2-31}$$

Это *точное равенство*, справедливое для любого многочлена $f \in S^nV^*$ и произвольных векторов $u, w \in V$. Отметим, что правая часть (2-31) симметрична по u и w в виду соотношений (2-30).

Упражнение 2.14. Докажите для любого многочлена $f \in S^nV^*$ и любых n векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ равенство $\widetilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \dfrac{1}{n!}\, \partial_{v_1}\partial_{v_2}\, \dots\, \partial_{v_n} f$.

2.4.5. Поляры и касательные к проективной гиперповерхности. Рассмотрим проективную гиперповерхность $S \subset \mathbb{P}(V)$, заданную однородным уравнением $F(x) = 0$ степени n. Пересечение S с произвольной прямой $\ell = (pq)$ состоит из таких точек $\lambda p + \mu q \in \ell$, что отношение $(\lambda : \mu)$ удовлетворяет уравнению $f(\lambda, \mu) = 0$, которое получается подстановкой $x = \lambda p + \mu q$ в уравнение гиперповерхности $F(x) = 0$. Если основное поле алгебраически замкнуто, и прямая ℓ не лежит на S целиком (что означало бы тождественное обращение $f(\lambda, \mu)$ в нуль), то ℓ пересекает S в конечном наборе точек $a_1, a_2, \dots, a_k$, причём если учитывать каждую из них с надлежащей кратностью, то сумма этих кратностей будет равна n. Для этого кратность пересечения поверхности S с прямой ℓ в точке $a_i = (\alpha_i' : \alpha_i'')$ надо определить как показатель, с которым линейный множитель

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \alpha_i' & \alpha_i'' \end{pmatrix} = (\alpha_i''\lambda - \alpha_i'\mu)$$

входит в разложение $f(\lambda, \mu) = \prod (\alpha_i''\mu - \alpha_i'\lambda)^{s_i}$ однородного многочлена $f(\lambda, \mu)$ на линейные множители.

Показатель s_i называется *локальным индексом пересечения* поверхности S с прямой ℓ в точке a_i и обозначается $(S, \ell)_{a_i}$. Прямая ℓ называется *касательной* к S в точке $a \in \ell \cap S$, если $(S, \ell)_a \geqslant 2$ или $\ell \subset S$.

По формуле Тэйлора (2-31) коэффициент при $\lambda^{n-m}\mu^m$ в уравнении $f(\lambda, \mu) = 0$ равен

$$\binom{n}{m} \widetilde{f}(p^{n-m}, q^m) = \frac{1}{m!}\, \frac{\partial^m F}{\partial q^i}(p) = \frac{1}{(n-m)!}\, \frac{\partial^{n-m} F}{\partial p^{n-m}}(q)\,. \tag{2-32}$$

и если $p \in S$, то разложение Тейлора в окрестности p начинается как

$$F(p+tq) = t\binom{d}{1}\widetilde{F}(p^{n-1},q) + t^2\binom{d}{2}\widetilde{F}(p^{n-2},q^2) + \cdots \,.$$

Таким образом, прямая pq, проходящая через точку $p \in S$, касается S в этой точке тогда и только тогда, когда $\widetilde{F}(p^{n-1},q) = 0$.

Если $F(p^{n-1},x)\not\equiv 0$ как линейная форма от x, то точки q, для которых прямая (pq) касается S в точке p, заметут в $\mathbb{P}(V)$ гиперплоскость, задаваемую линейным уравнением $F(p^{n-1},x) = 0$. Она называется *касательным пространством* к S в p и обозначается T_pS. Точка p называется в этом случае *гладкой* точкой поверхности S . Поверхность называется *гладкой*, если все её точки гладкие.

Если $F(p^{n-1},x) \equiv 0$, то поверхность S называется *особой* в точке p, а p называется *особой точкой* поверхности S. Согласно (2-32), коэффициентами линейной формы

$$F(p^{n-1},x) = \partial_x F(p)$$

являются частные производные от F, вычисленные в точке p, так что особость p равносильна занулению в p всех частных производных от уравнения гиперповерхности. В этом случае любая проходящая через p прямая имеет с S как минимум двукратное пересечение в p, и касательное пространство T_pS, понимаемое как объединение всех прямых, касающихся S в точке p, совпадает со всем пространством $\mathbb{P}(V)$.

Если q — гладкая точка на S или любая точка вне S, то замыкание множества точек касания с S всевозможных касательных, опущенных на S из точки q образует на поверхности S фигуру, называемую *контуром* поверхности S, видимым из точки q. Видимый контур высекается из S полярной к q относительно S гиперповерхностью $(n-1)$-й степени

$$\mathrm{pl}_q S = \{y \in \mathbb{P}(V) \mid \widetilde{F}(q,y^{n-1}) = 0\}\,, \tag{2-33}$$

автоматически отличной от всего пространства. Действительно, условие касания прямой (qy) поверхности S в точке y — это $\widetilde{F}(y^{n-1},q) = 0$. Если многочлен $G(y) = \widetilde{F}(y^{n-1},q)$ тождественно нулевой (как многочлен от y), то, взяв $y = q$, мы получим $F(q) = 0$, откуда $q \in S$. С другой стороны, т. к. все производные от G в этом случае тоже нулевые, мы получаем равенство

$$\widetilde{F}(q^{n-1},y) = \widetilde{G}(q^{n-2},y) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial q^{n-2}}G(y) \equiv 0\,,$$

означающее, что q — особая точка поверхности S.

Гиперповерхность $\mathrm{pl}_q^{n-r} = \left\{ y \in \mathbb{P}(V) \mid \widetilde{F}(q^{n-r},y^r) = 0 \right\}$ называется *полярой r-й степени* поверхности S относительно точки q. Если $q \in S$ — гладкая точка, то поляра первой степени — эта касательная гиперплоскость T_qS к S в точке

q, а каждая поляра степени $r \geqslant 2$ — это поверхность степени r, которая проходит через q и имеет те же поляры степеней $< r$ относительно точки q, что и исходная поверхность S. Так, квадратичная поляра — это проходящая через q квадрика, имеющая в точке q ту же касательную гиперплоскость, что и S, кубическая поляра — это проходящая через q кубическая поверхность с той же касательной плоскостью и квадратичной полярой, что и S, и т. д.

2.4.6. Линейный носитель $\mathrm{Supp}(f)$ многочлена $f \in S^n V^*$ это минимальное такое подпространство $W \subset V^*$, что $f \in S^n W^*$. Он совпадает с линейным носителем полной поляризации $\widetilde{f} \in \mathrm{Sym}^n V^*$ многочлена f, которое по теор. 2.1 является образом полной свёртки[1] $V^{\otimes(n-1)} \to V^*$ с тензором $\widetilde{f}$. Тем самым, $\mathrm{Supp}(f)$ линейно порождается всеми частными производными $(n-1)$-го порядка

$$\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}}\frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}}\cdots\frac{\partial^{m_d}}{\partial x_d^{m_d}}f(x), \quad \text{где} \quad \sum m_\nu = n-1\,. \tag{2-34}$$

Вклад в коэффициент при x_i у линейной формы (2-34) вносит лишь тот коэффициент многочлена f, что стоит при $x_1^{m_1}\dots x_{i-1}^{m_{i-1}}x_i^{m_i+1}x_{i+1}^{m_{i+1}}\dots x_d^{m_d}$. Записывая многочлен f в виде

$$f = \sum_{\nu_1+\dots+\nu_d=n}\frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}\,a_{\nu_1\nu_2\dots\nu_d}\,x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\,\cdots\,x_d^{\nu_d}\,, \tag{2-35}$$

получаем для линейной формы (2-34) выражение

$$n!\cdot\sum_{i=1}^{d}a_{m_1\dots m_{i-1}(m_i+1)m_{i+1}\dots m_d}x_i\,. \tag{2-36}$$

Всего таких форм имеется[2] $\binom{n+d-2}{d-1}$.

Предложение 2.4

Однородный многочлен f вида (2-35) над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль тогда и только тогда является n-той степенью линейной формы, когда $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$-матрица из коэффициентов линейных форм (2-36) имеет ранг 1. В этом случае есть ровно n линейных форм φ, удовлетворяющих уравнению $\varphi^n = f$, все они пропорциональны формам (2-36) и получаются друг из друга умножением на корни n-той степени из единицы в поле $\Bbbk$.

Доказательство. Равенство $f = \varphi^n$ означает, что $\mathrm{Supp}(f)$ одномерен и порождён формой φ . В этом случае все формы (2-36) пропорциональны форме φ, и

---

[1] из-за симметричности тензора $\widetilde{f}$ такая свёртка не зависит от выбора последовательности индексов J, по которым она производится

[2] количество способов разложить $n-1$ в сумму d занумерованных целых неотрицательных слагаемых $m_1, m_2, \dots, m_d$

уравнение $t^n = f$ имеет в целостном кольце $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_d]$ ровно n корней вида $\zeta \cdot \varphi$, где ζ пробегает множество корней из единицы в поле $\Bbbk$. Наоборот, если все формы (2-36) пропорциональны, и $\psi \neq 0$ — одна из них, то $\mathrm{Supp}(f) = \Bbbk \cdot \psi$ и $f = \lambda\psi^n$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$, а $\varphi = \sqrt[n]{\lambda} \cdot \psi$. □

Пример 2.4 (бинарные формы ранга 1)
Однородный многочлен степени n от двух переменных

$$f(x_0, x_1) = \sum_k a_k \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^{n-k} x_1^k$$

представляется в виде $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$, если и только если $a_i : a_{i+1} = \alpha_0 : \alpha_1$ не зависит от i, что равносильно условию

$$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = 1\,,$$

или квадратичным соотношениям $a_i a_{j+1} = a_{i+1} a_j$ на коэффициенты f.

2.5. Поляризация грассмановых многочленов. По предл. 2.3 для каждого однородного грассманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V^*$ над полем $\Bbbk$ характеристики нуль имеется ровно одна n-линейная кососимметричная форма

$$\widetilde{\omega} : V^* \times V^* \times \cdots \times V^* \to \Bbbk\,,$$

проектирующаяся в ω при факторизации $V^{*\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V^*$. Она называется *полной поляризацией* грассманова многочлена ω. По форм. (2-24) на стр. 28 полная поляризация базисного грассманова монома $\omega = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ равна

$$\widetilde{\omega} = \frac{1}{n!}\, e_{\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle} = \mathrm{alt}_n \left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \right)\,. \tag{2-37}$$

Поляризации прочих многочленов вычисляются по линейности.

2.5.1. Двойственность. Как и в симметрическом случае, над полем характеристики нуль между пространствами грассмановых многочленов $\Lambda^n V^*$ и $\Lambda^n V$ имеется каноническое невырожденное спаривание, переводящее $\omega \in \Lambda^n V^*$ и $\tau \in \Lambda^n V$ в полную свёртку $\left\langle \widetilde{\omega}\,, \tilde{\tau} \right\rangle \in \Bbbk$ их полных поляризаций $\widetilde{\omega} \in V^{*\otimes n}$ и $\tilde{\tau} \in V^{\otimes n}$.

Упражнение 2.15. Покажите, что свёртка базисных грассмановых мономов $e_I \in \Lambda^n V$ и $x_J \in \Lambda^n V^*$ от двойственных базисных векторов пространств V и V^* отлична от нуля только при[1] $I = J$ и равна в этом случае $1/n!$.

---

[1] мы предполагаем, что обе последовательности индексов I, J строго возрастают

2.5.2. Частные производные в грассмановой алгебре. По аналогии с симметрическим случаем, определим *грассманову производную* кососимметричного многочлена $\omega \in \Lambda^n V^*$ в направлении вектора $v \in V$ формулой

$$\partial_v \omega \overset{\text{def}}{=} \deg \omega \cdot \mathrm{pl}_v \omega \,,$$

где $\mathrm{pl}_v : \Lambda^n V^* \to \Lambda^{n-1} V^*$ это нижняя горизонтальная стрелка коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
V^{*\otimes n} \supset \operatorname{Skew}^n V^* \arrow[r, "i_v"] \arrow[d] & V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d] \\
\Lambda^n V^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_v"] & \Lambda^{n-1} V^*
\end{tikzcd}$$

переводящая грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^n V^*$ в проекцию внутреннего произведения $i_v \widetilde{\omega} \in V^{*\otimes(n-1)}$ во внешнюю степень $\Lambda^{n-1} V^*$. Из билинейности $\mathrm{pl}_v \omega$ по v и ω мы заключаем, что производная в направлении вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ является линейной комбинацией производных в направлениях базисных векторов: $\partial_v = \sum \alpha_i \, \partial_{e_i}$. Из определения очевидно, что $\partial_{e_j} \omega = 0$, если ω не зависит от x_j, так что ненулевой вклад в $\partial_v x_I$ вносят только ∂_{e_i} с $i \in I$. Из формулы (2-37) вытекает, что $\partial_{e_{i_1}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n} = x_{i_2} \wedge x_{i_3} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}$ вне зависимости от того, образуют ли индексы $i_1, i_2, \dots, i_n$ строго возрастающую последовательность. Поэтому

$$\begin{aligned}
\partial_{e_{i_k}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n} &= \partial_{e_{i_k}} (-1)^{k-1} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} = \\
&= (-1)^{k-1} \partial_{e_{i_k}} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} = \\
&= (-1)^{k-1} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} \,,
\end{aligned}$$

т. е. дифференцирование грассманова монома в направлении базисного вектора, двойственного к k-той слева переменной, ведёт себя как $(-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}$. Это можно воспринимать как *грассманово правило Лейбница*

$$\partial_v (\omega \wedge \tau) = \partial_v(\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \partial_v(\tau) \tag{2-38}$$

Упражнение 2.16. Докажите формулу (2-38) для любых однородных грассмановых многочленов $\omega, \tau \in \Lambda V^*$ и любого вектора $v \in V$.

Кососимметричность полной поляризации $\widetilde{\omega}(u, w, *, \dots, *) = -\widetilde{\omega}(w, u, *, \dots, *)$ влечёт равенство $i_w i_v = -i_w i_v$ отображений $\operatorname{Skew}^n(V^*) \to \operatorname{Skew}^{n-2}(V^*)$. Поэтому грассмановы частные производные *антикоммутируют*: $\partial_u \partial_w = -\partial_w \partial_u$. В частности, $\partial_v^2 \omega \equiv 0$ для любых v и ω.

2.5.3. Линейный носитель грассманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V$ это наименьшее подпространство $W \subset V$, такое что $\omega \in \Lambda^n W$. Оно обозначается $\mathrm{Supp}(\omega)$ и совпадает с носителем поляризации $\widetilde{\omega}$. По теор. 2.1 носитель грассманова многочлена степени n является образом отображения $V^{*\otimes(n-1)} \to V$, задаваемого полной свёрткой[1] с тензором $\widetilde{\omega}$ и линейно порождается векторами

$$\partial_J \omega \overset{\text{def}}{=} \partial_{e_{j_1}} \partial_{e_{j_2}} \dots \partial_{e_{j_{n-1}}} \omega \,,$$

где $J = j_1 j_2 \dots j_{n-1}$ пробегает всевозможные последовательности из $n-1$ неповторяющихся[2] натуральных чисел $1 \leqslant j_\nu \leqslant d$. Если записать ω в виде суммы

$$\omega = \sum_I a_I e_I = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n} \tag{2-39}$$

в которой $I = i_1 i_2 \dots i_n$ пробегает произвольные последовательности неповторяющихся индексов и коэффициенты $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кососимметричны по $i_1 i_2 \dots i_n$, вклад в $\partial_J \omega$ дадут только мономы $a_I e_I$ с $I \supset J$. В итоге, с точностью до общего знака,

$$\partial_J \omega = \pm \sum_{i \notin J} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_{n-1} i} \, e_i \,. \tag{2-40}$$

Предложение 2.5

Следующие условия на грассманов многочлен (2-39) эквивалентны:

1) $\omega = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n$ для некоторых $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$

2) $u \wedge \omega = 0 \ \ \forall \, u \in \mathrm{Supp}(\omega)$

3) для любых двух наборов $i_1 i_2 \dots i_{m+1}$ и $j_1 j_2 \dots j_{m-1}$ из $n+1$ и $n-1$ неповторяющихся индексов выполняется *соотношение Плюккера*[3]

$$\sum_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu-1} a_{j_1 \dots j_{m-1} i_\nu} a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}} = 0 \,. \tag{2-41}$$

Доказательство. Условие (1) означает, что ω лежит в старшей внешней степени $\Lambda^{\dim \mathrm{Supp}(\omega)}$ своей линейной оболочки $\mathrm{Supp}(\omega)$. Его равносильность условию (2) вытекает из следующего общего факта:

Упражнение 2.17. Докажите, что $\omega \in \Lambda U$ тогда и только тогда однороден степени $\dim U$, когда $u \wedge \omega = 0$ для всех $u \in U$.

---

[1] в силу кососимметричности тензора $\widetilde{\omega}$ такая свёртка с точностью до знака не зависит от выбора последовательности сворачиваемых сомножителей

[2] в силу кососимметричности грассмановых частных производных можно было бы ограничиться только строго возрастающими последовательностями, но мы умышленного не делаем этого, чтобы упростить запись дальнейших формул

[3] «крышка» в $a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}}$ означает, что индекс i_ν следует пропустить

Соотношение (2-41) констатирует равенство нулю коэффициента при базисном мономе $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\dots\wedge e_{i_{m+1}}$ в произведении $\left(\partial_{j_1\dots j_{m-1}}\omega\right)\wedge\omega$ и представляет собою координатную запись условия (2) на вектор $u=\partial_{j_1\dots j_{m-1}}\omega$ из формулы (2-40). Поскольку такие векторы линейно порождают пространство $\mathrm{Supp}(\omega)$, соотношения Плюккера равносильны условию (2). □

Упражнение 2.18. Выпишите соотношения Плюккера для грассмановой квадратичной формы ω от четырёх переменных и выведите из них, что такая форма тогда и только тогда является произведением двух линейных, когда $\omega\wedge\omega=0$.

Задачи для самостоятельного решения к §2

Задача 2.1. Для любого векторного пространства V над полем $\Bbbk$ характеристики $\neq 2$ постройте канонический изоморфизм $V\otimes V\simeq S^2V\oplus\Lambda^2V$ и покажите, что $V\otimes V\otimes V\not\simeq S^3V\oplus\Lambda^3V$.

Задача 2.2. Явно предъявите тензор $t\in V^{\otimes 3}$, не являющийся суммой кососимметричного и симметричного.

Задача 2.3. Покажите, что порождающее идеал соотношений коммутирования подпространство[1] $\mathscr{I}_{\mathrm{sym}}\cap V\otimes V$ в тензорной алгебре TV и порождающее идеал соотношений антикоммутирования подпространство[2] $\mathscr{I}_{\mathrm{skew}}\cap V^*\otimes V^*$ в тензорной алгебре TV^* двойственного к V пространства V^* являются аннуляторами друг друга при каноническом спаривании между $V\otimes V$ и $V^*\otimes V^*$, задаваемом полной свёрткой.

Задача 2.4 (спинорное разложение). Пусть $\operatorname{char}\Bbbk\neq 2$, $\dim U_\pm=2$ и $V=\operatorname{Hom}(U_-,U_+)$. Покажите, что в разложении $V^{\otimes 2}\simeq S^2V\oplus\Lambda^2V$ из зад. 2.1 подпространства

$$\begin{aligned} S^2V&\simeq\left(S^2U_-^*\otimes S^2U_+\right)\oplus\left(\Lambda^2U_-^*\otimes\Lambda^2U_+\right)\\ \Lambda^2V&\simeq\left(S^2U_-^*\otimes\Lambda^2U_+\right)\oplus\left(\Lambda^2U_-^*\otimes S^2U_+\right)\,. \end{aligned}$$

Задача 2.5. Рассмотрим на пространстве $V=\mathbb{C}^4$ невырожденную квадратичную форму g с поляризацией $\widetilde{g}$ и обозначим через $G\subset\mathbb{P}_3=\mathbb{P}(V)$ квадрику, задаваемую уравнением $g(x)=0$. Определим на Λ^2V билинейную форму $\Lambda^2\widetilde{g}$ так, чтобы её значение на разложимых тензорах вычислялось по формуле

$$\Lambda^2\widetilde{g}(\,v_1\wedge v_2\,,\,w_1\wedge w_2\,)\overset{\text{def}}{=}\det\begin{pmatrix}\widetilde{g}(v_1,w_1)&\widetilde{g}(v_1,w_2)\\ \widetilde{g}(v_2,w_1)&\widetilde{g}(v_2,w_2)\end{pmatrix}\,.$$

а) Покажите, что эта форма симметрична и невырождена, и напишите её матрицу Грама в базисе $e_i\wedge e_j$, где e_i образуют ортонормальный базис в V

б) Напомним, грассманиан $\mathrm{Gr}(2,V)$, точки которого биективно соответствуют прямым в $\mathbb{P}_3=\mathbb{P}(V)$, можно вложить в $\mathbb{P}_5=\mathbb{P}(\Lambda^2V)$ как *квадрику Плюккера* $P=\{\omega\in\Lambda^2V\mid\omega\wedge\omega=0\}$. Покажите, что множество всех касательных прямых к квадрике

---

[1] см. формулу (2-10) на стр. 23

[2] см. формулу (2-13) на стр. 24

$G \subset \mathbb{P}_3$ изображается на квадрике P точками её пересечения с квадрикой $\Lambda^2 G \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, задаваемой формой $\Lambda^2 \widetilde{g}$.

Задача 2.6. Рассмотрим предыдущую задачу для специального четырёхмерного пространства $V = \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$ из зад. 2.4, возьмём в качестве g квадратичную форму det, задающую квадрику Сегре $G \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}\big(\mathrm{Hom}(U_-, U_+)\big)$, и, следуя зад. 2.5 (б), будем изображать прямые в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ точками квадрики Плюккера

$$P \simeq \mathrm{Gr}(2, V) \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)\,.$$

Покажите, что два семейства прямолинейных образующих квадрики Сегре G изображаются на квадрике Плюккера P двумя гладкими кониками, высекаемыми из P парой дополнительных 2-мерных плоскостей

$$\Lambda_- = \mathbb{P}\left(S^2 U_-^* \otimes \Lambda^2 U_+\right) \quad \text{и} \quad \Lambda_+ = \mathbb{P}\left(\Lambda^2 U_-^* \otimes S^2 U_+\right)\,,$$

канонически вложенных в $\mathbb{P}\left(\Lambda^2\,\mathrm{Hom}(U_-, U_+)\right)$ по зад. 2.4, причём эти коники являются образами прямых $\mathbb{P}_1^{\pm} = \mathbb{P}(U_{\pm})$ при квадратичных вложениях Веронезе

$$\mathbb{P}(U_{\pm}) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^2 U_{\pm}) = \mathbb{P}(S^2 U_{\pm} \otimes \Lambda^2 U_{\mp})\,.$$

Иными словами, имеется коммутативная диаграмма[1]:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_1^+ = \mathbb{P}(U_+) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"'] & & \mathbb{P}(S^2 U_+) \simeq \Lambda_+ \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}_1^+ \times \mathbb{P}_1^- \arrow[u, two heads, "\pi_+"] \arrow[d, two heads, "\pi_-"'] \arrow[r, "\text{Сегре}", "\sim"'] & G \subset \mathbb{P}\,\mathrm{Hom}(U_-, U_+) \arrow[r, dashed, "\text{Плюккер}"] & \mathbb{P}\begin{pmatrix} \Lambda^2 U_-^* \otimes S^2 U_+ \\ \oplus \\ S^2 U_-^* \otimes \Lambda^2 U_+ \end{pmatrix} \\
\mathbb{P}_1^- = \mathbb{P}(U_-^*) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"] & & \mathbb{P}(S^2 U_-^*) \simeq \Lambda_- \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Задача 2.7 (звёздочка Ходжа). В условиях предыдущих трёх задач, оператор Ходжа

$$* : \Lambda^2 V \to \Lambda^2 V\,, \quad \omega \mapsto \omega^*\,,$$

невырожденной квадратичной формы g на V определяется соотношением

$$\omega_1 \wedge \omega_2^* = \Lambda^2 \widetilde{g}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

в котором $\omega_{1,2} \in \Lambda^2$ произвольны, а $e_i \in V$ составляют фиксированный ортонормальный базис формы g. Покажите что это определение корректно (не зависит от выбора базиса), найдите собственные значения и собственные подпространства оператора Ходжа и укажите их место в предыдущей картинке.

Задача 2.8. Фиксируем базисный вектор η в одномерном пространстве $\Lambda^{\dim V} V$ и при $k + m = n$ зададим между пространствами $\Lambda^k V$ и $\Lambda^m V$ спаривание

$$\langle *, * \rangle : \Lambda^k V \times \Lambda^m V \to \Bbbk$$

---

[1] отображение Плюккера показано пунктиром, поскольку переводит прямые в точки

правилом $\omega_1 \wedge \omega_2 = \langle \omega_1 , \omega_2 \rangle \cdot \eta$. Покажите, что оно невырождено и выясните, как устроен оператор, двойственный относительно этого спаривания оператору левого внешнего умножения $\xi \mapsto v \wedge \xi$ на данный вектор $v \in V$.

Задача 2.9. Над полем $\Bbbk$ характеристики нуль постройте канонические изоморфизмы между пространствами а) $\mathrm{Sym}^n(V^*)$ б) $\mathrm{Sym}^n(V)^*$ в) $(S^nV)^*$ г) (S^nV^*)
д) симметричных n-линейных форм $\varphi : V \times V \times \cdots \times V \to \Bbbk$
е) функций $f : V \to \Bbbk$, задаваемых однородным многочленом степени n от линейных координат в каком-нибудь[1] базисе.

Задача 2.10. Над полем $\Bbbk$ характеристики нуль постройте канонические изоморфизмы между пространствами а) $\mathrm{Skew}^n(V^*)$ б) $\mathrm{Skew}^n(V)^*$ в) $(\Lambda^nV)^*$ г) $\Lambda^n(V^*)$
д) кососимметричных n-линейных форм $\varphi : V \times V \times \cdots \times V \to \Bbbk$.

Задача 2.11. Какие из изоморфизмов двух предыдущих задач остаются изоморфизмами и над полями конечной характеристики?

Задача 2.12 (принцип Аронгольда). Для конечномерного пространства V над бесконечным полем покажите, что подпространство $\mathrm{Sym}^n(V) \subset V^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами $v^{\otimes n} = v \otimes v \otimes \cdots \otimes v$ с $v \in V$ и явно выразите через них тензор $u \otimes w \otimes w + w \otimes u \otimes w + w \otimes w \otimes u \in \mathrm{Sym}^3(V)$.

Задача 2.13. Существует ли линейная обратимая замена координат, превращающая многочлен $9\,x^3 - 15\,yx^2 - 6\,zx^2 + 9\,xy^2 + 18\,z^2x - 2\,y^3 + 3\,zy^2 - 15\,z^2y + 7\,z^3$ в многочлен от $\leqslant 2$ переменных?

Задача 2.14. Выясните, разложима ли грассманова кубическая форма от четырёх переменных $-\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 + 2\,\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_4 + 4\,\xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 + 3\,\xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4$ (если да, то напишите какое-нибудь из разложений явно, если нет — объясните, почему).

Задача 2.15. Покажите, что разложение Тейлора многочлена $\det(A)$ на пространстве линейных операторов $A : V \to V$ имеет вид $\det(\lambda A + \mu B) = \sum\limits_{p+q=n} \lambda^p \mu^q \cdot \mathrm{tr}\left(\Lambda^p A \cdot \Lambda^q B^*\right)$, где $\Lambda^p A : \Lambda^p V \to \Lambda^p V$ и $\Lambda^q B^* : \Lambda^p V \simeq \Lambda^q V^* \to \Lambda^q V^* \simeq \Lambda^p V$ — внешние степени оператора A и оператора, двойственного к B относительно спаривания из зад. 2.8.

Задача 2.16. Обозначим через $S \subset \mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2V^*)$ множество всех вырожденных квадрик на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Покажите, что
а) S является алгебраической гиперповерхностью, и точка $Q \in S$ является неособой точкой поверхности S тогда и только тогда, когда соответствующая квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ имеет единственную особую точку $p \in Q$
б) касательная гиперплоскость $T_QS \subset \mathbb{P}_N$ в такой неособой точке $Q \in S$ состоит из всех квадрик на $\mathbb{P}_n$, проходящих через особую точку p квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$.

Задача 2.17. Найдите все особые точки следующих трёх кривых на[2] $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$:
а) $(x_0 + x_1 + x_2)^3 = 27\,x_0x_1x_2$ б) $x^2y + x\,y^2 = x^4 + y^4$ в) $(x^2 - y + 1)^2 = y^2(x^2 + 1)$.

Задача 2.18. Напишите явную рациональную параметризацию проективной плоской квартики $(x_0^2 + x_1^2)^2 + 3\,x_0^2x_1x_2 + x_1^3x_2 = 0$, воспользовавшись проекцией из её особой

---

[1] а значит, и в любом

[2] последние две кривые заданы аффинным уравнением в стандартной карте U_0 и речь в задаче идёт про их проективные замыкания

точки на какую-нибудь прямую.

Задача 2.19. Пусть оператор $F : V \to V$ диагонализуем с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Вычислите собственные значения всех тензорных его тензорных степеней $F^{\otimes n}$.

Задача 2.20. Покажите, что ни для какого набора ненулевых линейных операторов $F_1, F_2, \dots, F_m : V \to V$ не существует таких ненулевых констант $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \Bbbk$, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \lambda_1 F_1^{\otimes n} + \lambda_2 F_2^{\otimes n} + \dots + \lambda_m F_m^{\otimes n} = 0$.

Задача 2.21. Выразите через коэффициенты характеристического многочлена оператора $F : V \to V$ следующие величины: а) $\operatorname{tr} F^{\otimes 2}$ б) $\operatorname{tr} F^{\otimes 3}$ в) $\det F^{\otimes 2}$ г) $\det F^{\otimes 3}$
д) след и определитель действия F на $\operatorname{Hom}(V, V)$ по правилу $G \mapsto FGF^{-1}$
е) след и определитель действия F на S^2V^* по правилу $F\varphi(x) = \varphi\left(F^{-1}x\right)$.

Задача 2.22. Для диагонализуемого оператора F над полем $\Bbbk$ характеристики нуль выразите собственные числа S^nF и Λ^nF через собственные числа F и докажите, что а) $\det(E - tF)^{-1} = \sum\limits_{k \geqslant 0} \operatorname{tr}\big(S^kF\big) \cdot t^k$ б) $\det(E + tF) = \sum\limits_{k \geqslant 0} \operatorname{tr}\big(\Lambda^kF\big) \cdot t^k$ в $\Bbbk[[t]]$.

Задача 2.23 (принцип расщепления). Ответы к предыдущим двум задачам верны и для недиагонализуемых операторов F. В самом деле, все они имеют вид полиномиальных соотношений с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$ на матричные элементы f_{ij} оператора F в каком-нибудь базисе и могут восприниматься как равенства в кольце многочленов $\mathbb{Q}[f_{ij}]$ от независимых переменных f_{ij}, инвариантные относительно естественного действия полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ на $\mathbb{Q}[f_{ij}]$ линейными заменами переменных $F = \left(f_{ij}\right)$ по правилу $g : F \mapsto gFg^{-1}$. Докажите эти равенства, последовательно проверив справедливость следующих утверждений:

а) если многочлен $f \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ тождественно обращается в нуль как функция на $\mathbb{C}^n$, то это нулевой многочлен, так что достаточно проверить требуемые равенства для всех *комплексных* матриц F

б) диагонализуемые над $\mathbb{C}$ матрицы $F \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ всюду плотны[1] в $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$, так что в силу непрерывности многочленов требуемые равенства достаточно проверить только для *диагонализуемых* комплексных матриц F

в) равенства не меняют своего вида при заменах $F \mapsto gFg^{-1}$ с любым $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, так что их достаточно проверить только для всех *диагональных* комплексных матриц, что и было сделано в зад. 2.21.

Задача 2.24. Следуя принципу расщепления, докажите тождество Гамильтона – Кэли $\chi_F(F) = 0$, сведя его к случаю диагональных комплексных F.

Задача 2.25. Докажите, что $e^{F \otimes E + E \otimes F} = e^F \otimes e^F$ в $\operatorname{Mat}_{n^2}(\mathbb{C})$, где F — любая, а E — единичная матрица.

Задача 2.26*. Покажите, что в кольце формальных степенных рядов с рациональными коэффициентами от матричных элементов $n \times n$ матрицы A выполняется равенство $\ln \det(E - A) = \operatorname{tr} \ln(E - A)$, причём над полем $\mathbb{C}$ для всех достаточно малых комплексных A оно выполняется также и численно.

Задача 2.27 (грассманова экспонента). Над полем *любой* характеристики положим $e^{\omega} \overset{\text{def}}{=} 1 + \omega$ для *разложимых* $\omega \in \Lambda^{2m}$ и продолжим это определение на всё про-

---

[1] жорданова клетка малым шевелением диагональных элементов сдвигается в диагонализуемую матрицу

странство $\Lambda^{2m}V$ полагая для $f = \sum \omega_i$, где все ω_i разложимы, $e^f \stackrel{\text{def}}{=} \prod e^{\omega_i}$. Покажите, что определение e^f корректно, т. е. не зависит ни от способа представления f в виде суммы разложимых мономов, ни от порядка расположения сомножителей в стоящем в правой части грассмановом произведении, и что экспоненциальное отображение $\Lambda^{\text{even}}V \hookrightarrow \Lambda^{\text{even}}V$ является инъективным гомоморфизмом из аддитивной группы всех чётных грассмановых многочленов в мультипликативную группу чётных грассмановых многочленов со свободным членом 1.

Задача 2.28. В условиях предыдущей задачи докажите над полем характеристики нуль равенства а) $\partial_\nu e^f = e^f \wedge \partial_\nu f$ б) $e^f = \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} f^{\wedge k}$.

Задача 2.29 (комплексы Кошуля и Де Рама). Зафиксируем базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ векторного пространства V и обозначим через x_i и ξ_i классы вектора e_i в алгебрах SV и ΛV соответственно. Покажите, что

а) линейные операторы $\Lambda^{k+1}V \otimes S^{m-1}V \xleftarrow{d} \Lambda^k V \otimes S^m V \xrightarrow{\partial} \Lambda^{k-1}V \otimes S^{m+1}V$, действующие на разложимые тензоры по правилам

$$\begin{gathered} d \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\nu \xi_\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x_\nu} \;:\; \omega \otimes f \mapsto \sum_\nu \frac{\partial \omega}{\partial \xi_\nu} \otimes x_\nu \cdot f \\ \partial \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} \otimes x_\nu \;:\; \omega \otimes f \mapsto \sum_\nu \xi_\nu \wedge \omega \otimes \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \end{gathered} \tag{2-42}$$

не зависят от выбора базиса и имеют нулевые квадраты: $d^2 = 0 = \partial^2$

б) оператор $d\partial + \partial d$ действует на $\Lambda^k V \otimes S^m V$ как гомотетия $(k+m)\cdot \mathrm{Id}$.

в) Вычислите $\ker d / \operatorname{im} d$ и $\ker \partial / \operatorname{im} \partial$.

§3. Симметрические функции

3.1. Симметрические и кососимметрические многочлены. Симметрическая группа S_n действует на кольце многочленов $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots , x_n]$ переставляя переменные:

$$gf(x_1, x_2, \dots , x_n) = f(x_{g(1)}, x_{g(2)}, \dots , x_{g(n)}) \qquad \forall\, g \in S_n\,. \tag{3-1}$$

Многочлен $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots , x_n]$ называется *симметрическим*, если $gf = f$ для всех $g \in S^n$, и *кососимметрическим*, если $g(t) = \operatorname{sgn}(g) \cdot t$ для всех $g \in S^n$. Симметрические многочлены образуют в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots , x_n]$ подкольцо, а кососимметрические — модуль над этим кольцом[1]. (Косо)симметрические многочлены можно иначе воспринимать как (косо)симметричные тензоры в n-той тензорной степени $\Bbbk[t]^{\otimes n}$ кольца многочленов $\Bbbk[t]$ от одной переменной: изоморфизм $\mathbb{Z}$-модулей

$$\varkappa : \mathbb{Z}[t]^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots , x_n]\,, \quad t^{m_1} \otimes t^{m_2} \otimes \cdots \otimes t^{m_n} \mapsto x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n} \tag{3-2}$$

(номера тензорных сомножителей слева соответствуют номерам переменных справа) перестановочен с действием S_n и отождествляет (косо)симметричные тензоры слева с (косо)симметрическими многочленами справа. Умножению многочленов в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots , x_n]$ отвечает покомпонентное умножение

$$\big(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n\big) \cdot \big(g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n\big) = (f_1 g_1) \otimes (f_2 g_2) \otimes \cdots \otimes (f_n g_n)\,.$$

Упражнение 3.1. Проверьте, что такое умножение наделяет $\mathbb{Z}[t]^{\otimes n}$ структурой коммутативного кольца с единицей $1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$.

Изоморфизм (3-2) переводит описанные в формулах (2-21) и (2-22) на 27 стандартные базисы $\mathbb{Z}$-модулей $\operatorname{Sym}^n(\mathbb{Z}[t])$ и $\operatorname{Skew}^n(\mathbb{Z}[t])$ в стандартные базисы $\mathbb{Z}$-модулей симметрических и кососимметрических многочленов, которые называются *мономиальным* и *детерминантным*.

3.1.1. Мономиальный базис модуля симметрических многочленов состоит из *мономиальных симметрических многочленов*

$$m_\lambda = (\text{сумма всех мономов из } S_n\text{-орбиты монома } x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n})\,, \tag{3-3}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots , \lambda_n)$ пробегает диаграммы Юнга из $\leqslant n$ строк. Поскольку любой симметрический многочлен вместе с каждым своим мономом содержит (с одинаковыми коэффициентами) все мономы из его S_n-орбиты, и каждая S_n-орбита однозначно определяется своим лексикографически старшим

---

[1] т. к. произведение симметрического многочлена на кососимметричнй — это кососимметрический многочлен

мономом, показатели которого слева направо не убывают, любой симметрический многочлен однозначно представляется в виде целочисленной линейной комбинации многочленов m_λ . Прообразом многочлена m_λ при изоморфизме (3-2) является стандартный базисный симметрический тензор (2-21), равный сумме всех различных тензорных произведений из $m_0(\lambda)$ сомножителей $t^0 = 1$, $m_1(\lambda)$ сомножителей t^1, $m_2(\lambda)$ сомножителей t^2 и т. д., где $m_i(\lambda)$ равно числу строк длины i в диаграмме λ .

3.1.2. Детерминантный базис в модуле кососимметрических многочленов образуют альтернированные S_n-орбиты

$$\Delta_\nu = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, x_{g(1)}^{\nu_1} x_{g(2)}^{\nu_2} \cdots x_{g(n)}^{\nu_n} . \tag{3-4}$$

Поскольку в кососимметрическом многочлене нет мономов, содержащих одинаковые степени разных переменных[1], индекс ν в (3-4) пробегает множество диаграмм Юнга с неповторяющимися длинами строк $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_n$. Такая диаграмма ν всегда содержит в себе минимальную треугольную диаграмму δ из n строк разной длины

$$\delta = ((n-1), (n-2), \dots , 1, 0) .$$

Разность $\lambda = \nu - \delta = ((\nu_1 - n + 1), (\nu_2 - n + 2), \dots , (\nu_{n-1} - 1), \nu_n)$ имеет $\lambda_i = \nu_i - n + i$ и представляет собою уже произвольную диаграмму Юнга из $\leqslant n$ строк без ограничений на их длины. Иногда бывает удобно нумеровать базис (3-4) именно такими диаграммами λ , и в этих случаях мы будем писать $\Delta_{\lambda+\delta}$ вместо Δ_ν .

Легко видеть, что многочлен (3-4) представляет собою определитель[2]

$$\Delta_\nu = \det(x_j^{\nu_i}) = \det \begin{pmatrix} x_1^{\nu_1} & x_2^{\nu_1} & \cdots & x_n^{\nu_1} \\ x_1^{\nu_2} & x_2^{\nu_2} & \cdots & x_n^{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{\nu_n} & x_2^{\nu_n} & \cdots & x_n^{\nu_n} \end{pmatrix} \tag{3-5}$$

Упражнение 3.2. Убедитесь в этом прямым раскрытием правой части (3-5).

В частности, при $\nu = \delta$ получаем *определитель Вандермонда*

$$\Delta_\delta = \det(x_j^{n-i}) = \det \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (x_i - x_j) . \tag{3-6}$$

---

[1] при транспозиции любых двух переменных многочлен должен менять знак

[2] здесь и далее запись $(f(i,j))$, где $f(i,j)$ некоторая функция от i, j, будет означать матрицу, в i-той строке и j-том столбце которой стоит результат применения функции f к данным значениям i и j

Упражнение 3.3. Убедитесь в справедливости равенства $\varDelta_\delta = \prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$.

3.1.3. Базис Шура. Поскольку любой кососимметрический многочлен f обращается в нуль при подстановке $x_i = x_j$, он делится в кольце $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ на $(x_i - x_j)$, а так как каждая из разностей $(x_i - x_j)$ неприводима, f делится на их произведение $\varDelta_\delta = \prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$, и частное $f/\varDelta_\delta \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ является симметрическим многочленом. Мы получаем

Предложение 3.1
Умножение на определитель Вандермонда $\varDelta_\delta$ задаёт биекцию между симметричными и кососимметричными многочленами. Эта биекция является изоморфизмом модулей над кольцом симметрических многочленов (и над $\mathbb{Z}$). □

Следствие 3.1
Многочлены[1] $s_\lambda = \varDelta_{\delta+\lambda}/\varDelta_\delta$, где λ пробегает все диаграммы Юнга из не более n строк, образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических многочленов.

3.2. Элементарные симметрические многочлены. Коэффициенты многочлена

$$E(t) = \prod_i (1 + x_i t) = \sum_{k=0}^{n} e_k(x) \cdot t^k \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n][t] \tag{3-7}$$

называются *элементарными симметрическими многочленами*. Раскрыв скобки в (3-7), получаем $e_0 = 1$ и

$$e_k(x) = \sum_{i_1<i_2<\dots<i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \tag{3-8}$$

(сумма всех произведений из k различных переменных, где $k \geqslant 1$). Эти же многочлены возникают в *формулах Виета*: если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ являются корнями приведённого многочлена

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i), \tag{3-9}$$

то $a_i = (-1)^i e_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

3.2.1. Разложение по мономиальному базису. Для любого набора неотрицательных целых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ положим

$$e_\lambda \overset{\text{def}}{=} e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_m} = \prod_{k=1}^{m} e_{\lambda_k}.$$

---

[1] многочлены $s_\lambda = \varDelta_{\delta+\lambda}/\varDelta_\delta$ называются (*детерминантными*) *многочленами Шура*

Если λ — диаграмма Юнга, а λ^t получена из неё транспонированием, то лексикографически старший мономом многочлена e_λ равен $x_1^{\lambda_1^t} x_2^{\lambda_2^t} \dots x_n^{\lambda_n^t}$ и возникает при перемножении монома $x_1 \dots x_{\lambda_1}$ из e_{λ_1}, монома $x_1 \dots x_{\lambda_2}$ из e_{λ_2} и т. д. вплоть до $x_1 \dots x_{\lambda_m}$ из e_{λ_m}. Это продуктивно представлять себе как результат перемножения букв $x_1, x_2, \dots , x_n$, расставленных в клетки диаграммы λ так, что x_1 стоит во всех клетках первого столбца, x_2 — во всех клетках второго и т. д. В результате показатель у переменной x_i будет равен длине i-того столбца диаграммы λ, т. е. длине i-той строки *транспонированной*[1] диаграммы λ^t.

Итак, разложение многочлена e_λ по базису m_λ из мономиальных симметрических многочленов (3-3) имеет вид:

$$e_\lambda = m_{\lambda^t} + (\text{лексикографически младшие члены}) \tag{3-10}$$

Предложение 3.2

Многочлены $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_m}$, где λ пробегает диаграммы Юнга, содержащие не более n столбцов, образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических функций.

Доказательство. Многочлены e_λ нумеруются диаграммами λ из не более n столбцов, элементы мономиального базиса m_μ модуля симметрических функций — диаграммами из не более n строк. Выпишем векторы m_μ в строку в порядке лексикографического возрастания диаграмм μ, а векторы e_λ — в порядке лексикографического возрастания транспонированных диаграмм λ^t. Формула (3-10) утверждает теперь, что матрица координат векторов e_λ в мономиальном базисе m_λ верхнетреугольная с единицами по главной диагонали. Поскольку такая целочисленная матрица обратима над $\mathbb{Z}$, многочлены e_λ также образуют базис. □

Следствие 3.2

Многочлены $e_1, e_2, \dots , e_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots , x_n]$ и любой симметрический многочлен однозначно записывается в виде многочлена от $e_1, e_2, \dots , e_n$.

Доказательство. Переписывая многочлен e_λ как $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_n^{m_n}$, где m_i — это число строк длины i в диаграмме λ, видим, что множество многочленов e_λ — это в точности множество всех различных мономов от $e_1, e_2, \dots , e_n$. □

Следствие 3.3

Всякий симметрический многочлен от корней приведённого многочлена $f(t)$ можно переписать как многочлен от коэффициентов f. □

---

[1] диаграммы Юнга, получающиеся друг из друга отражением относительно главной диагонали (как при транспонировании матрицы) называются *сопряжёнными* или *транспонированными*

3.3. Полные симметрические многочлены. Сумма всех мономов степени k в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ обозначается h_k и называется *полным симметрическим многочленом* степени k. Он равен коэффициенту при t^k у формального степенного ряда $H(t) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]\,[[t]]$, возникающего при перемножении n бесконечных геометрических прогрессий[1]

$$H(t) = \prod_i \frac{1}{1 - x_i t} = \prod_i \left(1 + x_i t + x_i^2 t^2 + x_i^3 t^3 + \cdots\right) = \sum_{k \geqslant 0} h_k(x) \cdot t^k\,. \qquad (3\text{-}11)$$

Поэтому $H(t)E(-t) = 1$. Вычисляя в этом равенстве коэффициент при t^k получаем рекурсивные формулы, выражающие e_i и h_i друг через друга:

$$(-1)^k h_k = e_k - e_{k-1} h_1 + e_{k-2} h_2 - \cdots + (-1)^{k-1} e_1 h_{k-1} \qquad (3\text{-}12)$$

$$(-1)^k e_k = h_k - h_{k-1} e_1 + h_{k-2} e_2 - \cdots + (-1)^{k-1} h_1 e_{k-1}\,. \qquad (3\text{-}13)$$

Предложение 3.3

Отображение ω, переводящее многочлен e_k в многочлен h_k (при $k = 1, \dots, n$) является инволютивным автоморфизмом кольца симметрических многочленов.

Доказательство. Так как кольцо симметрических функций изоморфно кольцу многочленов от $e_1, e_2, \dots, e_n$, отображение $e_k \mapsto h_k$ однозначно продолжается до гомоморфизма ω из кольца симметрических функций в себя. Из рекурсивных формул (3-12) и (3-13) вытекает, что этот гомоморфизм переводит h_k обратно в e_k, т. е. является инволюцией и, как следствие, автоморфизмом. □

Следствие 3.4

Многочлены $h_1, h_2, \dots, h_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и любой симметрический многочлен (в том числе h_m с $m > n$) однозначно записывается в виде многочлена от $h_1, h_2, \dots, h_n$.

3.4. Степенные суммы Ньютона. Сумма k-тых степеней всех переменных

$$p_k(x) = \sum_i x_i^k \qquad (3\text{-}14)$$

называется k-тым *симметрическим многочленом Ньютона*. Многочлены $p_k(x)$ с $k \geqslant 1$ удобно воспринимать как коэффициенты ряда

$$P(t) = \sum_{k \geqslant 1} p_k(x) \cdot t^{k-1} = \sum_i \sum_{k \geqslant 1} x_i^k \cdot t^{k-1} = \sum_i \frac{d}{dt} \sum_{k \geqslant 1} x_i^k \cdot \frac{t^k}{k} =$$

$$= -\frac{d}{dt} \sum_i \ln(1 - x_i \cdot t) = \frac{d}{dt} \ln \prod_i \frac{1}{1 - x_i \cdot t} = \frac{d}{dt} \ln H(t) \qquad (3\text{-}15)$$

---

[1] выбирая из i-той скобки m_i-тое слагаемое и перемножая их между собою, получаем моном $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$

который является логарифмической производной от ряда $H(t) = 1/E(-t)$. Таким образом,

$$P(t) = H'(t)/H(t) = E'(-t)/E(-t)\,.$$

Сравнивая коэффициенты при t^{k-1} в равенствах

$$H(t)P(t) = H'(t) \quad \text{и} \quad E(-t)P(t) = E'(-t)\,,$$

получаем рекурсивные *формулы Ньютона* для выражения p_k через h_k и e_k соответственно:

$$p_k = kh_k - h_{k-1}p_1 - h_{k-2}p_2 - \cdots - h_1p_{k-1} \tag{3-16}$$
$$(-1)^{k-1}p_k = ke_k - e_{k-1}p_1 + e_{k-2}p_2 - \cdots + (-1)^{k-1}e_1p_{k-1}\,. \tag{3-17}$$

Индукция по k показывает, что многочлен p_k является собственным вектором инволюции ω из предл. 3.3 с собственным значением $(-1)^{k-1}$:

$$\omega(p_k) = (-1)^{k-1}p_k\,. \tag{3-18}$$

Следствие 3.5

Многочлены $p_1, p_2, \dots, p_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и любой симметрический многочлен с рациональными коэффициентами (в том числе p_m с $m > n$) однозначно записывается в виде многочлена с рациональными коэффициентами от $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Доказательство. Из формулы (3-17) вытекает, что в пространстве многочленов с рациональными коэффициентами от $x_1, x_2, \dots, x_n$, степень которых не превышает N, где $N \in \mathbb{N}$ — любое, $\mathbb{Q}$-линейные оболочки всевозможных мономов $p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_n^{m_n}$ от $p_1, p_2, \dots, p_n$ и всевозможных мономов $e_1^{m_1}e_2^{m_2}\cdots e_n^{m_n}$ от $e_1, e_2, \dots, e_n$ совпадают. Поскольку количества этих мономов при фиксированном N одинаковы, и по сл. 3.4 мономы $e_1^{m_1}e_2^{m_2}\cdots e_n^{m_n}$ линейно независимы, мономы $p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_n^{m_n}$ также линейно независимы. □

3.4.1. Явное выражение e_k и h_k через p_k. Для конечного набора невозрастающих неотрицательных целых чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, состоящего из m_1 единиц, m_2 двоек, m_3 троек и т. д. положим[1] $m(\lambda) \overset{\text{def}}{=} (m_1, m_2, \dots) \in \mathbb{Z}^{|\lambda|}$ и

$$\begin{aligned} p_\lambda &\overset{\text{def}}{=} p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}p_{\lambda_3}\cdots = p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3^{m_3}\cdots \\ \varepsilon_\lambda &\overset{\text{def}}{=} (-1)^{\sum(k-1)m_k} = (-1)^{|\lambda|}(-1)^{\sum m_k} = (-1)^{\sum(\lambda_i-1)} \\ z_\lambda &\overset{\text{def}}{=} \prod_k \left(m_k!\cdot k^{m_k}\right)\,. \end{aligned} \tag{3-19}$$

---

[1] отметим, что $\sum\limits_k k\cdot m_k = |\lambda|$

а также условимся в дальнейшем не различать между собою наборы λ, получающиеся друг из друга приписыванием справа любого количества нулей. Множество многочленов вида p_λ это в точности множество всевозможных мономов от p_i. Переход от нумерации мономов диаграммами Юнга к их обычному представлению при помощи набора показателей степеней это переход от невозрастающей последовательности $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ длин строк диаграммы к целочисленному вектору $m(\lambda)$, i-тая компонента которого равна количеству строк длины i в λ. В частности, все многочлены p_λ являются собственными векторами инволюции ω:

$$\omega(p_\lambda) = \varepsilon_\lambda \cdot p_\lambda\,. \tag{3-20}$$

Упражнение 3.4. Покажите, что для любой диаграммы Юнга λ число z_λ равно количеству перестановок в симметрической группе $S_{|\lambda|}$, коммутирующих с произвольным образом фиксированной перестановкой циклового типа λ, и что всего в $S_{|\lambda|}$ имеется $|\lambda|!/z_\lambda$ перестановок циклового типа λ.

Предложение 3.4

Многочлены e_k и h_k выражаются через $\mathbb{Q}$-базис p_λ по формулам:

$$h_k = \sum_{|\lambda|=k} z_\lambda^{-1} p_\lambda \tag{3-21}$$

$$e_k = \sum_{|\lambda|=k} \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda \tag{3-22}$$

(суммирование по всем k-клеточным диаграммам Юнга).

Доказательство. Достаточно доказать формулу (3-21), формула (3-22) получается из неё применением инволюции ω из предл. 3.3. Согласно (3-15)

$$H(t) = e^{\int P(t)\,dt} = e^{\sum p_i t^i/i} = \prod e^{p_i t^i/i} = \prod_{i\geqslant 1} \sum_{m\geqslant 0} \frac{p_i^m}{i^m m!}\, t^{im}\,.$$

Коэффициент при t^k в правой части возникает при выборе в i-той перемножаемой скобке m_i-того слагаемого так, чтобы $\sum\limits_i i\cdot m_i = k$. Такие выборы биективно соответствуют диаграммам Юнга λ веса k, имеющих m_1 строк длины 1, m_2 строк длины 2 и т. д., а произведение слагаемых, отвечающих такому выбору, равно p_λ / z_λ. □

3.5. Формула Джамбелли выражает детерминантные многочленами Шура s_λ через полные симметрические многочлены h_k в кольце $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Для её получения обозначим через $e_k^{(p)}(x)$ результат подстановки в $e_k(x)$ значения $x_p = 0$. Таким образом, $e_k^{(p)}$ — это элементарная симметрическая функция от $(n-1)$ переменных

$$(x_1, \dots, \widehat{x}_p, \dots, x_n)\,,$$

где «крышка» означает пропуск переменной x_p . Производящая функция для многочленов $e_k^{(p)}$ с фиксированным p имеет вид

$$E^{(p)}(t) = \sum_k e_k^{(p)}(x) \cdot t^k = \prod_{i \neq p} (1 + x_i t) \, .$$

Поэтому $H(t)E^{(p)}(-t) = (1 - x_p t)^{-1}$. Сравнивая коэффициенты при t^k в обеих частях, получаем соотношение

$$h_0 \cdot (-1)^k e_k^{(p)} + h_1 \cdot (-1)^{k-1} e_{k-1}^{(p)} + \cdots + h_k \cdot e_0^{(p)} = x_p^k \, ,$$

справедливое для всех целых неотрицательных k, если положить $e_j^{(p)} = 0$ при $j > n - 1$. С учётом этого замечания предыдущую формулу можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_p^k = h_{k-n+1} \cdot (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(p)} + h_{k-n+2} \cdot (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(p)} + \cdots + h_k \cdot e_0^{(p)} = \\ = \sum_{j=1}^{n} h_{k-n+j} \cdot (-1)^{n-j} e_j^{(p)} \, . \end{aligned} \tag{3-23}$$

и воспринимать как произведение строки $(h_{k-n+1}, h_{k-n+2}, \ldots , h_k)$ длины n на столбец

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(p)} \\ \vdots \\ e_2^{(p)} \\ -e_1^{(p)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

высоты n. Если организовать h-строки, отвечающие каким-нибудь n фиксированным строго убывающим значениям $k = \nu_1, \nu_2, \ldots , \nu_n$, $\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_n$, в матрицу[1]

$$H_\nu = \left(h_{\nu_i - n + j} \right) = \begin{pmatrix} h_{\nu_1 - n+1} & h_{\nu_1 - n+2} & \cdots & h_{\nu_1} \\ h_{\nu_2 - n+1} & h_{\nu_2 - n+2} & \cdots & h_{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{\nu_n - n+1} & h_{\nu_n - n+2} & \cdots & h_{\nu_n} \end{pmatrix}$$

а e-столбцы, отвечающие n различным значениям $p = 1, 2, \ldots , n$, — в матрицу

$$M = \left((-1)^{n-i} e_{n-i}^{(j)} \right) = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(1)} & (-1)^{n-1} e_{n-i}^{(2)} & \cdots & (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(n)} \\ (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(1)} & (-1)^{n-2} e_{n-i}^{(2)} & \cdots & (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

---

[1] в которой мы полагаем $h_0 = 1$ и $h_j = 0$ при $j < 0$

то формула (3-23) превратится в матричное равенство $D_\nu = H_\nu \cdot M$, где

$$D_\nu = (x_j^{\nu_i}) = \begin{pmatrix} x_1^{\nu_1} & x_2^{\nu_1} & \cdots & x_n^{\nu_1} \\ x_1^{\nu_2} & x_2^{\nu_2} & \cdots & x_n^{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{\nu_n} & x_2^{\nu_n} & \cdots & x_n^{\nu_n} \end{pmatrix}$$

Таким образом, для любой диаграммы Юнга ν со строго убывающими длинами строк

$$\Delta_\nu = \det D_\nu = \det H_\nu \cdot \det M\,.$$

При $\nu = \delta$ матрица H_δ верхняя унитреугольная. Поэтому $\det H_\delta = 1$ и

$$\det M = \det D_\delta = \Delta_\delta\,.$$

Мы получаем искомое выражение полиномов Шура через полные симметрические функции:

$$s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta = \det D_{\delta+\lambda}/\det M = \det H_{\delta+\lambda} = \det\left(h_{\lambda_i+j-i}\right) \tag{3-24}$$

Предложение 3.5 (формула Джамбелли)

$$s_\lambda = \det \begin{pmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \ddots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & h_{\lambda_{n-1}+1} \\ h_{\lambda_n-n+1} & \ddots & h_{\lambda_n-1} & h_{\lambda_n} \end{pmatrix} \tag{3-25}$$

где по главной диагонали стоят $h_{\lambda_1}, h_{\lambda_2}, \dots, h_{\lambda_n}$, и в каждой строке индексы у h увеличиваются слева направо на единицу от клетки к клетке. ☐

3.5.1. Примеры. При $n = 2$ в $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$ получаем соотношение

$$s_{(2,1)} = \det \begin{pmatrix} h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix} = h_1 h_2 - h_3 = e_1 e_2 - e_3\,.$$

При $n = 3$ в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ получаем соотношение

$$s_{(2,1)} = s_{(2,1,0)} = \det \begin{pmatrix} h_2 & h_3 & h_4 \\ 1 & h_1 & h_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix}$$

что приводит к тому же самому выражению $s_{(2,1)}$ через h_i, что и при $n = 2$.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что выражение s_λ через h_k, полученное при числе переменных n, равном высоте диаграммы λ, сохраняется и при любом большем числе переменных.

Беря $\lambda = (k)$, т. е. одну строку длины k , получаем равенство $s_{(k)} = h_k$, очевидное при $n = 1$ и по упр. 3.5 справедливое для всех n. Отметим, что при непосредственном вычислении определителей $\Delta_{\delta+(n)}$ и Δ_δ произвольного размера $n \times n$ равенство $\Delta_{\delta+(n)} = h_k \cdot \Delta_\delta$ не вполне очевидно.

3.6. Формула Пьери выражает произведение $s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)}$ через многочлены s_μ. Для её вывода нам придётся слегка обобщить сказанное в n° 3.1. Рассмотрим кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{Z}[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$, а в нём — симметрические и кососимметрические ряды (первые образуют подкольцо, вторые — модуль над этим подкольцом). То же рассуждение, что и в n° 3.1.2 показывает, что всякий кососимметричный ряд A однозначно записывается в виде бесконечной целочисленной линейной комбинации альтернированных S_n-орбит мономов

$$A = \sum_{\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_n} c_\nu \cdot \Delta_\nu \tag{3-26}$$

где суммирование происходит по всем диаграммам Юнга $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ из n строк строго убывающей длины, коэффициенты $c_\nu \in \mathbb{Z}$, и

$$\Delta_\nu = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, x_{g(1)}^{\nu_1} x_{g(2)}^{\nu_2} \cdots x_{g(n)}^{\nu_n}\,.$$

Лемма 3.1

Разложение (3-26) для произведения базисного кососимметрического многочлена Δ_ν на симметрический ряд

$$H(x) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)^{-1} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + x_i + x_i^2 + x_i^3 + \cdots\right) = \sum_{k \geqslant 0} h_k(x)$$

имеет вид $\Delta_\nu \cdot\ = \sum\limits_{\eta} \Delta_\eta$, где суммирование идёт по всем $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ с

$$\eta_1 \geqslant \nu_1 > \eta_2 \geqslant \nu_2 > \cdots \eta_n \geqslant \nu_n\,.$$

Доказательство. Для любых n рядов $f_1(t)$, $f_2(t)$, …, $f_n(t) \in \mathbb{Z}[[t]]$ положим

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) f_1\left(x_{g(1)}\right) f_2\left(x_{g(2)}\right) \cdots f_n\left(x_{g(n)}\right)\,.$$

Ряд $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n \in \mathbb{Z}[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$ кососимметричен и полилинейно и кососимметрично зависит от $f_1, f_2, \dots, f_n$. В частности, $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$ не изменяется при добавлении к любому из рядов любой линейной комбинации остальных.

Упражнение 3.6. Убедитесь, что $t^{\nu_1} \wedge t^{\nu_2} \wedge \ldots \wedge t^{\nu_n} = \Delta_\nu$.

В этих обозначениях

$$\Delta_\nu \cdot H = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \prod_{i=1}^{n} x_{g(i)}^{\nu_i} \left(1 - x_{g(i)}\right)^{-1} = f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n\,,$$

где $f_i(t) = t^{\nu_i}/(1 - t) = t^{\nu_i} + t^{\nu_i + 1} + t^{\nu_i + 2} + \cdots$. Вычитая f_1 из всех остальных рядов, мы обрезаем их до многочленов степени $< \nu_1$. Вычитая второй из тих многочленов из всех последующих, мы обрезаем последние до многочленов степени $< \nu_2$. Действуя в таком духе, приходим к равенству $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n = = \overline{f}_1 \wedge \overline{f}_2 \wedge \cdots \wedge \overline{f}_n$, где $\overline{f}_1 = f_1 = \sum\limits_{j \geqslant \nu_1} t^j$ и $\overline{f}_i = t^{\nu_i} + t^{\nu_i+1} + \cdots + t^{\nu_{i-1}-1}$ при $2 \leqslant i \leqslant n$. В силу полилинейности $\wedge$-произведения $\overline{f}_1 \wedge \overline{f}_2 \wedge \cdots \wedge \overline{f}_n = \sum\limits_{\eta} t^{\eta_1} \wedge t^{\eta_2} \wedge \ldots \wedge t^{\eta_n} = \sum\limits_{\eta} \varDelta_\eta$, где суммирование идёт по всем $\eta_1 \geqslant \nu_1 > \eta_2 \geqslant \nu_2 > \eta_3 \geqslant \nu_3 > \cdots \eta_n \geqslant \nu_n$. ☐

Следствие 3.6 (формула Пьери)

$$s_\lambda \cdot h_k = \sum_{\mu} s_\mu ,$$

где суммирование происходит по всем диаграммам μ из $\leqslant n$ строк, которые можно получить, добавляя к диаграмме λ ровно k клеток так, чтобы никакие две из них не попали в один столбец.

Доказательство. По лем. 3.1 имеем равенство $\varDelta_{\delta+\lambda} \sum\limits_{k \geqslant 0} h_k = \sum\limits_{\tau} \varDelta_{\delta+\mu}$, где суммирование происходит по всем диаграммам μ, таким что[1] $\mu_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots$. Деля обе части на $\varDelta_\delta$ и беря в полученном равенстве однородную компоненту степени $|\lambda| + k$ по x, получаем требуемую формулу. ☐

Замечание 3.1. Если диаграмма λ состоит из $k < n$ строк, что отвечает значениям $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \cdots = \lambda_n = 0$, диаграммы μ в формуле Пьери могут содержать на одну строку больше, чем в диаграмме λ. Например, при $n = 2$ получаем $s_{(2)} \cdot h_1 = s_{(2,1)} + s_{(3)}$, что вновь приводит к выражению $s_{(2,1)} = h_2 h_1 - h_3$ из n° 3.5.1 на стр. 50.

3.7. Кольцо симметрических функций. Удобно думать про симметрические многочлены не привязываясь к конкретному числу переменных, но считая, что их достаточно много для того, чтобы все нужные функции были определены. Формализуется это так. Условимся не различать между собою две диаграммы λ', λ'', а также два набора показателей m', m'', если они получаются друг из друга дописыванием справа любого числа нулей. Для каждого набора занумерованных натуральными числами букв q_i, $i \in \mathbb{N}$, положим

$$q_\lambda = q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} q_{\lambda_3} \cdots \quad \text{и} \quad q^m = q_1^{m_1} q_2^{m_2} q_1^{m_3} \cdots .$$

Запись $\lambda = \big(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\big) = \big(1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \ldots\big)$ всегда будет означать, что λ содержит m_i строк длины i для всех $i \in \mathbb{N}$. Это происходит тогда и только тогда, когда $q_\lambda = q^m$. Наконец, положим $m_\lambda = s_\lambda = 0$ всякий раз, когда число

---

[1] напомним (см. n° 3.1.2), что $\lambda_i = \nu_i - n + i$, $\mu_i = \eta_i - n + i$, поэтому неравенства $\eta_i \geqslant \nu_i > \eta_{i+1}$ равносильны неравенствам $\mu_i \geqslant \lambda_i \geqslant \mu_{i+1}$

переменных меньше количества строк в диаграмме λ, и $e_\lambda = 0$, когда число переменных меньше количества столбцов в диаграмме λ. При таких соглашениях каждый из симметрических многочленов $m_\lambda(x)$, $s_\lambda(x)$, $e_\lambda(x)$, $h_\lambda(x)$ и $p_\lambda(x)$ становится определён для переменной $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ любой размерности r, причём при $r > s$ подстановка

$$x_{s+1} = x_{s+2} = \cdots = x_r = 0 \tag{3-27}$$

превращает каждый из этих многочленов в одноимённый многочлен от меньшего набора переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$. Подстановка (3-27) задаёт сюрьективный гомоморфизм колец

$$\zeta_{sr} : \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_r] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_s]\,. \tag{3-28}$$

Будем называть последовательность симметрических многочленов

$$f^{(n)} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

(по одному многочлену для каждого числа переменных $n \in \mathbb{N}$) *симметрической функцией степени* d и обозначать такую функцию просто через f, если выполняются два условия:

- при всех n многочлен $f^{(n)}$ однороден степени d
- $\zeta_{rs}\left(f^{(r)}\right) = f^{(s)}$ при любых $r > s$

При этом запись $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ означает $f^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, но так как верхний индекс равен числу подставляемых переменных, писать его нет смысла. Например, для фиксированной диаграммы λ веса $|\lambda| = d$ последовательность мономиальных многочленов $m_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, образует симметрическую функцию степени d, которая обозначается m_λ. Скажем, кубическая симметрическая функция $m_{(2,1)}$ на наборах из одной, двух и трёх переменных имеет вид

$$\begin{aligned} m_{(2,1)}(x_1) &= 0 \\ m_{(2,1)}(x_1, x_2) &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \\ m_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2\,. \end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются и симметрические функции s_λ, e_λ, h_λ и p_λ степени $|\lambda|$.

Симметрические функции степени d образуют $\mathbb{Z}$-модуль. Его принято обозначать Λ_d. Из сказанного в предыдущих разделах вытекает, что симметрические функции m_λ, s_λ, e_λ и h_λ, занумерованные всевозможными диаграммами Юнга веса $|\lambda| = d$, являются базисами в Λ_d, а симметрические функции p_λ составляют базис векторного пространства $\mathbb{Q} \otimes \Lambda_d$ симметрических функций с рациональными коэффициентами. Таким образом, Λ_d является свободным модулем *конечного* ранга, равного количеству диаграмм Юнга веса d. Это количество принято обозначать $p(d)$ и называть *числом разбиений* натурального числа d. Произведение симметрических функций степеней d_1 и d_2 это симметрическая функция степени $d_1 d_2$, так что прямая сумма

$$\Lambda = \bigoplus_{d\geqslant 0} \Lambda_d$$

является градуированным кольцом. Оно называется *кольцом симметрических функций*. Все доказанные выше соотношения между функциями m_λ, s_λ, e_λ, h_λ и рекурсивные выражения p_i через e_j и h_j являются тождествами в кольце Λ, а выражения h_i и e_i через p_λ — тождествами в кольце $\mathbb{Q}\otimes\Lambda$ симметрических функций с рациональными коэффициентами.

Задачи для самостоятельного решения к §3

Задача 3.1. Сумма неких двух из трёх комплексных корней многочлена $2x^3-x^2-7x+\lambda$ равна 1. Найдите λ.

Задача 3.2. Найдите все комплексные решения системы уравнений

$$x_1+x_2+x_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2=0\,,\quad x_1^3+x_2^3+x_3^3=24\,.$$

Задача 3.3. Выразите через элементарные симметрические многочлены e_i функции

а) $(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_4)(x_1+x_3)(x_2+x_4)(x_1+x_4)$

б) $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$

в) $\sum\limits_{i\neq j} x_i^2 x_j$ г) $\sum\limits_{i\neq j\neq k\neq i} x_i(x_j+x_k)$

Задача 3.4. Выразите дискриминант[1] D_f кубического трёхчлена $f=x^3+px+q$ через p и q.

Задача 3.5. Покажите, что при $p,q\in\mathbb{R}$ в предыдущей задаче неравенство $D_f<0$ равносильно тому, что у f есть ровно один (некратный) вещественный корень, а неравенство $D_f>0$ — тому, что ровно три, и в последнем случае уравнение $f=0$ приводится перескалированием переменной к виду $4t^3-3t=a$ и решается в тригонометрических функциях.

Задача 3.6. Найдите все $\lambda\in\mathbb{C}$, при которых многочлен $x^4-4x+\lambda$ имеет кратный корень.

Задача 3.7 (циркулянт). Выразите определитель матрицы, строки которой являются последовательными циклическими перестановками строки $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$,

---

[1] *дискриминантом* приведённого многочлена $f(x)=\prod(x-x_i)$ степени n называется произведение $\binom{n}{2}$ квадратов разностей его корней $D_f=\Delta_\delta^2(x_1,x_2,\dots,x_n)=\prod\limits_{i<j}(x_i-x_j)^2$, выраженное через коэффициенты многочлена f

через значения полинома $f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n$ на комплексных корнях n-той степени из единицы.

Задача 3.8*. Вычислите дискриминант n-того кругового многочлена[1] $\Phi_n(x)$. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для всех $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$.

Задача 3.9. Многочлен $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ имеет корни $x_1, x_2, \dots, x_n$. Всякий ли симметрический многочлен от $x_2,\ \dots\ ,\ x_n$ переписывается в виде многочлена от x_1 и $a_1, a_2, \dots, a_n$?

Задача 3.10. Обозначим через $\zeta \in \mathbb{C}$ какой-нибудь первообразный корень m-той степени из единицы.

а) Для каждого $a \in \mathbb{C}$ раскройте скобки и приведите подобные в $\prod\limits_{\nu=1}^{m}(a - \zeta^{\nu-1}x)$.

б) Покажите, что $\forall\, f \in \mathbb{C}[x]\ \exists\, h \in \mathbb{C}[x]$: $\prod\limits_{\nu=1}^{m} f(\zeta^{\nu-1}x) = h(x^m)$.

в) Выразите корни многочлена h через корни многочлена f.

Задача 3.11. Найдите в $\mathbb{C}[x]$ многочлен 4-й степени, корнями которого являются

а) квадраты всех комплексных корней многочлена $x^4 + 2\,x^3 - x + 3$

б) кубы всех комплексных корней многочлена $x^4 - x - 1$.

Задача 3.12. Выразите а) $s_{(1^n)}$ через e_ν б) $s_{(n)}$ через h_ν .

Задача 3.13. Представьте а) $s^2_{(1)}$ б) $s_{(1,1)}{\cdot}s_{(2)}$ в виде целочисленных линейных комбинаций многочленов s_λ.

Задача 3.14. Пусть $h_0 = e_0 = 1$ и $h_k = e_k = 0$ при $k < 0$. Покажите, что матрицы $\left(h_{i-j}\right)$ и $\left((-1)^{i-j}e_{i-j}\right)$ обратны друг другу и получите отсюда соотношение

$$\det\left(h_{\lambda_i+j-i}\right) = \det\left(e_{\lambda^t_i+j-i}\right)$$

на дополнительные миноры этих матриц.

Задача 3.15 (вторая формула Джамбелли). Покажите, что

$$s_{\lambda^t} = \det\begin{pmatrix} e_{\lambda_1} & e_{\lambda_1+1} & \ddots & e_{\lambda_1+n-1} \\ e_{\lambda_2-1} & e_{\lambda_2} & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & e_{\lambda_{n-1}+1} \\ e_{\lambda_n-n+1} & \ddots & e_{\lambda_n-1} & e_{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

(по главной диагонали стоят $e_{\lambda_1},\ e_{\lambda_2},\ \dots,\ e_{\lambda_n}$, и при движении вдоль строк слева направо индексы у e с каждым шагом увеличиваются на единицу).

---

[1] *n-тым круговым многочленом* называется приведённый многочлен степени $\varphi(n)$, корнями которого являются все примитивные комплексные корни степени n из единицы

§4. Исчисление массивов, таблиц и диаграмм

4.1. Массивы и элементарные операции над ними. Зафиксируем два конечных упорядоченных множества из n и m элементов:

$$I = \{1,\,2,\,\dots\,,\,n\}\,,\quad J = \{1,\,2,\,\dots\,,\,m\} \tag{4-1}$$

и будем рассматривать прямоугольные таблицы из n столбцов и m строк, занумерованных элементами I и J соответственно. Такую таблицу a мы будем называть *массивом* и размещать в *первом* квадранте декартовой системы координат так, чтобы элементы из I росли слева направо по горизонтальной оси, а элементы из J росли снизу вверх по вертикальной оси. Содержимое $a(i,j)$ клетки с координатами (i,j) у нас всегда будет целым неотрицательным числом, которое стоит воспринимать как «количество» или «массу». Весь массив удобно представлять себе как набор шариков одинаковой массы, наделенных двумя группами признаков и в соответствии с этим разложенных по ячейкам массива. Мы никогда не будем вычислять с числами $a(i,j)$, но будем перекладывать шарики из ячейки в ячейку, меняя тем самым их принадлежность к тому или иному признаку каждой из двух групп.

С массивом a связан *столбцовый вес*(или *I-вес*)

$$w^I = \Big(\sum_j a(1,j)\,,\,\sum_j a(2,j)\,,\,\dots\,,\,\sum_j a(n,j)\Big) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}\,. \tag{4-2}$$

Это n-мерный целочисленный вектор, i-тая координата которого равна общему количеству шариков в i-том столбце. Аналогично определяется *строчный вес* (или *J-вес*)

$$w^J = \Big(\sum_i a(i,1)\,,\,\sum_i a(i,2)\,,\,\dots\,,\,\sum_i a(i,m)\Big) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}\,. \tag{4-3}$$

Массивы можно транспонировать относительно диагонали $i = j$:

$$a \mapsto a^t \;:\; a^t(i,j) = a(j,i)\,. \tag{4-4}$$

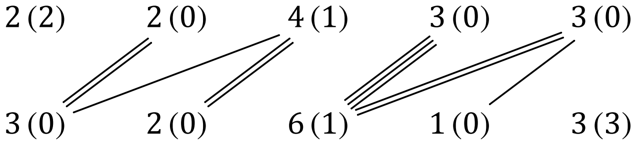
На множестве $\mathcal{M}$ всех массивов действуют четыре набора *уплотняющих операций*

$$D_j\,,\quad U_j\,,\quad L_i\,,\quad R_i\,,\quad \text{где } 1 \leqslant i \leqslant n-1,\, 1 \leqslant j \leqslant m-1.$$

При применении любой из этих операций к данному массиву $a \in \mathcal{M}$ массив a либо никак не меняется, либо ровно один его шарик перемещается ровно на одну клетку вниз (Down), вверх (Up), влево (Left) или вправо (Right) в соответствии с обозначением для операции.

4.1.1. Вертикальные операции D_j и U_j перемещают шар по вертикали в пределах соседних j-той и $(j+1)$-ой строки. Чтобы узнать, какой именно шар следует передвинуть (или убедиться в том, что такого шара нет), следует вначале установить между j-той и $(j+1)$-ой строкой *устойчивое паросочетание*[1]. Делается это следующим образом.

Будем последовательно перебирать шарики в $(j+1)$-ой строке двигаясь слева направо и либо назначать им партнёров в j-той строке, либо объявлять *свободными*. Пусть очередной шарик ***ш*** лежит в клетке $(i, j+1)$. Его партнёром называем *самый правый* шар из тех, что лежат в строке j *строго левее* i-того столбца и ещё не назначены никому партнёрами. Если таких шаров нет, шар ***ш*** объявляется свободным. После того, как все шары $(j+1)$-ой строки будут разделены на свободные и имеющие партнёров, все шары j-той строки, не являющиеся ни чьими партнёрами, также объявляются свободными. Вот пример такого паросочетания (в скобках указано число свободных шаров):



(4-5)

По определению, операция D_j опускает на одну клетку вниз самый правый свободный шар $(j+1)$-ой строки или ничего не делает, если свободных шаров в $(j+1)$-ой строчке нет. Операция U_j поднимает на одну клетку вверх самый левый свободный шар j-той строки или ничего не делает, если в j-ой строке нет свободных шаров. Так, в примере (4-5) операция D_j (соотв. U_j) опускает вниз (соотв. поднимает вверх) верхний (соотв. нижний) свободный шар в третьей колонке.

Если операция изменяет массив, мы будем говорить, что она действует на этот массив *эффективно*. Из конструкции устойчивого паросочетания ясно, что все свободные шары j-той строки лежат нестрого правее свободных шаров $(j+1)$-ой строки. Поэтому, когда операция D_j действует на массив a эффективно, опущенный ею шар становится самым левым свободным шаром j-той строки в устойчивом паросочетании между преобразованными строками. Стало быть, операция U_j, применённая к массиву $D_j a$ поднимет этот опущенный шар назад, т. е. $U_j D_j a = a$ всякий раз, когда D_j действует на a эффективно. Аналогично, если U_j действует эффективно, то $D_j U_j a = a$.

Говоря неформально, набор вертикальных операций D, U образует структуру, близкую к групповой — исходный массив a однозначно восстанавливается из результата применения к нему слова $D = D_{j_1} \cdots D_{j_k}$ по формуле $a = U_{j_k} \cdots U_{j_1}\big(D_{j_1} \cdots D_{j_k}(a)\big)$ при условии, что каждая буква D_j действует эффективно. Мы будем называть такие D-слова *a-эффективными* (или просто *эффективными*, если понятно, о каком a речь).

---

[1] по-английски: *stable matching*

4.1.2. Горизонтальные операции L_i и R_i определяются симметричным образом: они действуют в i-м и $(i+1)$-м столбцах и превращаются в операции D и U при транспонировании массива, т. е. $L_i(a) = \left(D_i(a^t)\right)^t$ и $R_i(a) = \left(U_i(a^t)\right)^t$.

Упражнение 4.1. Проговорите это определение явно: объясните, как установить устойчивое паросочетание между i-тым и $(i+1)$-тым столбцом, и какой шар будут перемещать операции R_i и L_i.

Отметим, что операции D, L сохраняют столбцовый вес, а операции R, L — строчный.

Лемма 4.1 (лемма о коммутировании)
Каждая из горизонтальных операций L_i, R_i перестановочна с каждой из вертикальных операций D_j, U_j.

Доказательство. Мы покажем, что D_j и U_j перестановочны с L_i — остальные случаи разбираются аналогично. Пусть действие операции L_i заключается в перемещении шара ***ш*** на одну клетку влево. Достаточно убедиться, что эта процедура не изменяет устойчивого паросочетания между $(j+1)$-ой и j-той строкой в том смысле, что после применения L_i связанными в пары будут в точности те же самые шары, что и до применения. Это очевидно, когда ***ш*** лежит вне $(j+1)$-ой и j-той строк. Рассмотрим оставшиеся два случая.

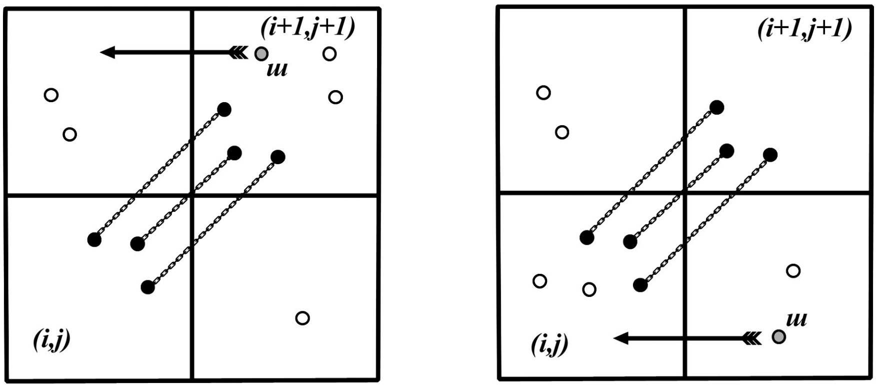


Рис. 4◇1. Действие L_i не меняет устойчивого вертикального паросочетания.

Пусть ***ш*** лежит в $(j+1)$-ой строчке, т. е. в клетке $(i+1, j+1)$, как на левой картинке с рис. 4◇1. Тогда все шары из клетки (i, j) имеют партнёров в клетке $(i+1, j+1)$, иначе шар ***ш*** получил бы себе партнёра в клетке (i, j) в паросочетании между i-тым и $(i+1)$-м столбцом. Поэтому, если в строчном паросочетании у шара ***ш*** был партнёр, то он был строго левее клетки (i, j), а значит и останется партнёром после перемещения ***ш*** на клетку влево. А если партнёра у ***ш*** не было, то он и не появится. Таким образом, при перемещении ***ш*** строчное паросочетание не изменяется.

Пусть ***ш*** лежит в j-той строчке, как на правой картинке с рис. 4◇1. Поскольку он является самым верхним свободным шаром в столбцовом паросочетании, все шары из клетки $(i+1, j+1)$ имеют партнёров в клетке (i, j). Но тогда и в строчном паросочетании все шары из $(i+1, j+1)$-той клетки получат партнёров в клетке (i, j). Поэтому перемещение шара $\boldsymbol{ш}$ на клетку влево и в этом случае не изменит ни его статуса, ни партнёра (если таковой был). □

Следствие 4.1

Слово H, составленное из горизонтальных операций, тогда и только тогда эффективно действует на массив a, когда оно эффективно действует на любой массив, получающийся из a вертикальными операциями. Аналогично, слово V, составленное из вертикальных операций, эффективно действует на a , если и только если оно эффективно действует на любой массив, получающийся из a горизонтальными операциями.

Доказательство. Мы докажем первое утверждение, второе устанавливается аналогично. Достаточно проверить, что для любых i, j операция L_i эффективно действует на a тогда и только тогда, когда она эффективно действует на $D_j a$, и только тогда, когда она эффективно действует на $U_j a$. Если $L_i a = a$, то $L_i D_j a = D_j L_i a = D_j a$, и $L_i U_j a = U_j L_i a = U_j a$. Наоборот, если $L_i a \neq a$, то i-тая компонента столбцового веса $w^I(L_i a)$ будет строго больше i-той компоненты $w^I(a)$, а так как D_j и U_j не меняют столбцовый вес, то $L_i D_j a = D_j L_i a \neq D_j a$, и $L_i U_j a = U_j L_i a \neq U_j a$. □

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 1&1\\\hline 1&2\\\hline\end{array} \arrow[dl, "D_1"'] \arrow[dr, "D_2^3"] & \\
\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 0&1\\\hline 2&2\\\hline\end{array} \arrow[d, "D_2^4"'] & & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 4&1\\\hline 1&2\\\hline\end{array} \arrow[d, "D_1^4"] \\
\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 3&2\\\hline 2&2\\\hline\end{array} \arrow[dr, "D_1^3"'] & & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 0&1\\\hline 5&2\\\hline\end{array} \arrow[dl, "D_2"] \\
 & \begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 0&2\\\hline 5&2\\\hline\end{array} &
\end{tikzcd}$$

Рис. 4◇2. Два пути уплотнения вниз

4.2. Уплотнение массивов. Будем называть массив D-, L-, R- или U-*плотным* (т. е. плотным вниз, влево, вправо или вверх), если все элементарные операции соответствующего типа действуют на него тождественно. Применение к произвольному массиву достаточно большого числа операций одного из типов приводит к плотному в соответствующую сторону массиву. Такое уплотнение, как правило, можно производить многими разными способами. На рис. 4◇2 на стр. 59 показаны два пути уплотнения случайно взятого массива 3×2. Обратите внимание, что результат уплотнения оказался не зависящим от способа уплотнения. Мы докажем это фундаментальное свойство уплотнений в предл. 4.1, но прежде сделаем одно важное замечание о связи массивов с диаграммами Юнга.

4.2.1. Биплотные массивы и диаграммы Юнга. Из сл. 4.1 вытекает, что при действии вертикальных операций на плотный влево или вправо массив этот массив будет оставаться плотным в ту же сторону. То же самое справедливо для действия горизонтальных операций на массив, который плотен вниз или вверх. Поэтому любой массив можно сделать плотным одновременно в каком-нибудь вертикальном и в каком-нибудь горизонтальном направлении. Мы будем называть такие массивы DL-плотными, DR-плотными, и т. п. Поскольку далее мы будем заниматься в основном DL-уплотнениями, условимся называть просто *биплотными* массивы, плотные одновременно *вниз* и *влево*. Все шары в биплотном массиве лежат лишь в клетках главной диагонали $i = j$, причём их количества нестрого убывают с ростом i. Поэтому столбцовый вес биплотного массива равен строчному и представляет собой диаграмму Юнга $\lambda = w^I(b) = w^J(b)$, т. е. биплотные массивы b взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга[1]. Диаграмма Юнга, отвечающая биплотному массиву, который получается DU-уплотнением данного массива a, называется *формой* массива a и обозначается $\Phi(a)$. Докажем теперь, что это понятие корректно.

Предложение 4.1
Результат D-, L-, R- или U- уплотнения не зависит от выбора последовательности уплотняющих операций.

Доказательство. Мы рассмотрим только случай D-уплотнения. Если массив a плотен влево, то результат его D-уплотнения — это биплотный массив, отвечающий диаграмме Юнга $w^I(a)$. Поскольку $w^I(a)$ не меняется при вертикальных уплотняющих операциях, результат D-уплотнения L-плотного массива не зависит от способа уплотнения. Пусть теперь a произволен. Зафиксируем какое-нибудь слово $L = L_{i_1} L_{i_2} \dots L_{i_k}$, эффективно уплотняющее a влево до L-плотного массива $a' = La$. Тогда для любого слова $D = D_{j_1} D_{j_2} \dots D_{j_k}$, такого что Da плотен вниз, действие L на Da тоже будет эффективным, а массив $LDa = DLa$ будет биплотен (поскольку применение L сохраняет свойство массива Da быть плот-

---

[1] здесь и далее в этом параграфе мы отождествляем между собою две конечных последовательности неотрицательных целых чисел, получающиеся одна из другой приписыванием справа любого числа нулей; например, мы считаем равными диаграммы $(2, 1, 1)$ и $(2, 1, 1, 0, 0, 0)$

ным вниз, а применение D сохраняет свойство массива La быть плотным влево). Таким образом, мы можем записать Da как $L^{-1}DLa$. Так как массив DLa, по уже доказанному, не зависит от выбора уплотняющего слова D (ибо DLa есть D-уплотнение L-плотного массива La), массив $Da = L^{-1}DLa$ тоже не зависит от выбора D . □

4.2.2. Плотные массивы и таблицы Юнга. Из любого массива высоты m и ширины n можно изготовить m слов (по одному слову из каждой строки массива), записанных алфавитом $\{1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n\}$. Делается это при помощи процедуры, которая называется *строчной развёрткой* массива и состоит в следующем. Интерпретируем все шарики массива как буквы, равные номеру того столбца, где стоит шарик. После этого пройдём по каждой строке слева направо, выписывая подряд все встречающиеся нам буквы. В результате j-тая строка массива развернётся в слово

$$\underbrace{11\ldots1}_{a(1,j)}\ \underbrace{22\ldots2}_{a(2,j)}\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \underbrace{nn\ldots n}_{a(n,j)}\ .$$

Получающиеся m слов запишем друг под другом в столбик, *сверху вниз*[1], выровняв их по левому краю. Например:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\ \hline 0&0&1&1&0\\ \hline 0&4&0&0&0\\ \hline 3&1&0&0&1\\ \hline \end{array} \ \rightsquigarrow\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&2&5\\ \hline 2&2&2&2&\multicolumn{1}{c}{}\\ \cline{1-4} 3&4&\multicolumn{1}{c}{}&\multicolumn{1}{c}{}&\multicolumn{1}{c}{}\\ \cline{1-2} 5&\multicolumn{1}{c}{}&\multicolumn{1}{c}{}&\multicolumn{1}{c}{}&\multicolumn{1}{c}{}\\ \cline{1-1} \end{array}\ ,\qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2&0&3&0&1\\ \hline 0&2&1&1&0\\ \hline 0&1&0&2&3\\ \hline 1&1&2&0&1\\ \hline \end{array} \ \rightsquigarrow\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&3&3&3&5\\ \hline 2&2&3&4&\multicolumn{1}{c}{}&\multicolumn{1}{c}{}\\ \hline 2&4&4&5&5&5\\ \hline 1&2&3&3&5&\multicolumn{1}{c}{}\\ \cline{1-5} \end{array}\ .$$

Очевидно, что буквы в каждом слове строчной развёртки нестрого возрастают. Условие плотности массива вниз (как в левом примере выше) означает, что под каждой буквой «i» в j-том слове (т. е. под шариком, пришедшим из клетки $a(i,j)$) стоит строго большая, чем «i», буква $(j+1)$-го слова (партнёр этого шарика при устойчивом паросочетании между j-той и $(j+1)$-ой строками массива). Следовательно, длины слов строчной развёртки плотного вниз массива нестрого убывают сверху вниз, т. е. образуют диаграмму Юнга, а буквы $\{1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n\}$ заполняют эту диаграмму нестрого возрастая по строкам и *строго* возрастая по столбцам. Такие заполнения данной диаграммы λ называются *таблицами Юнга* формы λ на алфавите $I = \{1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n\}$. Мы доказали следующий комбинаторный факт:

Лемма 4.2
Строчная развёртка задаёт биекцию между плотными вниз массивами размера $m \times n$ и таблицами Юнга из $\leqslant m$ строк на алфавите $\{1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n\}$. □

---

[1] таким образом из нижней строки массива получается верхнее слово и т. д.

4.2.3. Плотные массивы и тексты Яманучи. L-плотность массива a можно воспринимать как D-плотность транспонированного массива a^t и формулировать в терминах столбцовой развёртки: плотные влево массивы биективно соответствуют таблицам Юнга из $\leqslant n$ строк в алфавите J. Полезно, однако, охарактеризовать L-плотность и в терминах строчной развёртки. Для этого будем читать слова *строчной* развёртки L-плотного массива *a справа налево* одно за другим, сверху вниз. Условие плотности влево означает тогда, что в любом начальном куске получающейся последовательности букв единиц будет не меньше, чем двоек, двоек — не меньше, чем троек, и т. д. для всех пар последовательных букв «i» и «$(i+1)$» из I. В комбинаторике такой текст называют *текстом Яманучи*. Например, левая из двух строчных развёрток

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\cline{1-1} 1 & \multicolumn{2}{c}{} \\
\cline{1-2} 1 & 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-3} 1 & 1 & 2 \\
\cline{1-3} 3 & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-2}
\end{array}
\quad , \qquad
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline 2 & 2 & 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-3} 2 & 3 & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-3} 1 & 2 & \multicolumn{2}{c}{} \\
\cline{1-2}
\end{array}$$

является текстом Яманучи, а правая — нет. Итак, нами установлена

Лемма 4.3
Строчная развёртка задаёт биекцию между плотными влево массивами размера $m \times n$ и текстами Яманучи из $\leqslant m$ слов на алфавите $\{1, 2, \dots, n\}$. □

4.2.4. Послойное произведение. Дизъюнктное объединение прямых произведений слоёв отображений множеств $\varphi : X \to Z$ и $\psi : Y \to Z$ над всеми точками $z \in Z$ обозначается

$$X \underset{Z}{\times} Y \overset{\text{def}}{=} \bigsqcup_{z \in Z} \varphi^{-1}(z) \times \psi^{-1}(z)$$

и называется *послойным* (или *расслоенным*) произведением множеств X и Y над Z. Послойные проекции $\pi_X : (x, y) \mapsto x$ и $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$ включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & X \underset{Z}{\times} Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
X \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\
 & Z &
\end{tikzcd} \tag{4-6}$$

которая называется *декартовым квадратом*. Она универсальна в том смысле, что для любого другого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "\xi"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\
X \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

имеется единственное отображение $\alpha : M \to X \underset{Z}{\times} Y$, такое что $\xi = \pi_X \circ \alpha$ и $\eta = \pi_Y \circ \alpha$.

Упражнение 4.2. Убедитесь в этом и покажите, что универсальное свойство определяет верхний угол квадрата (9-25) однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми стрелками квадрата.

Теорема 4.1
Множество всех массивов $\mathcal{M}$ является послойным произведением множеств плотных влево массивов $\mathcal{L}$ и плотных вниз массивов $\mathcal{D}$ над множеством биплотных массивов $\mathcal{B}$, т. е. коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{M} \arrow[dl, "L"'] \arrow[dr, "D"] & \\
\mathcal{L} \arrow[dr, "D"'] & & \mathcal{D} \arrow[dl, "L"] \\
& \mathcal{B} &
\end{tikzcd}$$

в котором стрелки L и D переводят массив в его уплотнения влево и вниз, является декартовым.

Доказательство. По предл. 4.1 стрелки L и D корректно определены и перестановочны друг с другом. Надо показать, что отображение $\mathcal{M} \to \mathcal{L} \underset{\mathcal{B}}{\times} \mathcal{D}$, сопоставляющее массиву a пару (La, Da) со свойством $DLa = LDa \in \mathcal{B}$, взаимно однозначно. Докажем его инъективность. Пусть массивы a и a' таковы, что $La = La'$ и $Da = Da'$, а слово Λ эффективно уплотняет массив $Da = Da'$ влево. Тогда Λ эффективно действует на a и a' так, что $\Lambda a = La = La' = \Lambda a'$, откуда $a = \Lambda^{-1}La = \Lambda^{-1}La' = a'$. Теперь докажем сюрьективность. Для любой пары массивов (a_ℓ, a_d), в которой a_ℓ плотен влево, a_d плотен вниз, и $Da_\ell = La_d$, рассмотрим слово Λ, эффективно уплотняющее a_d влево до La_d. Обратное слово Λ^{-1} эффективно действует на $La_d = Da_\ell$, а значит, и на a_ℓ. Массив $a = \Lambda^{-1}a_\ell$ таков, что $La = a_\ell$ и $Da = D\Lambda^{-1}a_\ell = \Lambda^{-1}Da_\ell = \Lambda^{-1}La_d = a_d$. □

Пример 4.1 (графики отображений и стандартные таблицы) График отображения множеств $a : I \to J$ — это массив, в каждом столбце которого имеется ровно один шарик. По теор. 4.1 такие массивы взаимно однозначно параметризуются парами (a_ℓ, a_d) в которой a_ℓ плотен влево, a_d плотен вниз, причём оба этих массива имеют одинаковую форму $Da_\ell = La_d$, и $w^I(a_d) = (1, 1, \dots , 1)$. По n° 4.2.2 каждая такая пара однозначно описывается следующим набором данных:

- форма $\Phi(a)$ массива a, т. е. диаграмма Юнга $\lambda = DLa$ веса $|\lambda| = n$
- строчная развёртка D-уплотнения a_d массива a, т. е. таблица Юнга формы λ на алфавите I, в которой каждая буква встречается ровно один раз
- столбцовая развёртка L-уплотнения[1] a_ℓ массива a — таблица Юнга формы λ на алфавите J

Число всех таблиц Юнга формы λ на m-буквенном алфавите принято обозначать через $d_\lambda(m)$. Таблицы формы λ заполненные без повторений числами от 1 до $|\lambda|$ называются *стандартными таблицами* формы λ, и их число обозначается просто через d_λ. Так как всего имеется m^n отображений $I \to J$, мы получаем соотношение

$$\sum_\lambda d_\lambda \cdot d_\lambda(m) = m^n \,, \tag{4-7}$$

где суммирование идёт по всем n-клеточным диаграммам Юнга и числа $d_\lambda(m)$ отличны от нуля только для диаграмм из $\leqslant m$ строк.

В ситуации, когда $\#J = \#I = n$ и рассматриваются только взаимно однозначные отображения $I \xrightarrow{\sim} J$, предыдущая конструкция устанавливает биекцию между $n!$ элементами симметрической группы S_n и парами стандартных таблиц одинаковой формы веса n, откуда

$$\sum_\lambda d_\lambda^2 = n! \;, \tag{4-8}$$

где сумма идёт о всем n-клеточным диаграммам. Эта биекция индуцирует взаимно однозначное соответствие между инволютивными перестановки[2] $\sigma \in S_n$ в самосопряжёнными массивами $a = a^t$, которым в по теор. 4.1 отвечают пары одинаковых стандартных таблиц. Поэтому

$$\sum_\lambda d_\lambda = \#\{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = 1\} \,. \tag{4-9}$$

---

[1] т. е. строчная развёртка транспонированного массива a_ℓ^t

[2] т. е. такие, что $\sigma^2 = 1$

4.3. Действие симметрической группы на DU-множествах. Всякое множество массивов, которое переводится в себя вертикальными операциями D и U, называется *DU-множеством*. Гомоморфизмы DU-множеств — это отображения, перестановочные с действием операций D и U. DU-множество, на котором операции D и U действуют транзитивно, называется *DU-орбитой*. DU-орбиты взаимно однозначно соответствуют плотным вниз массивам. Орбита O такого массива a_d состоит из всевозможных массивов, которые можно получить из a_d эффективными U-словами. Мы будем называть a_d *нижним концом* орбиты O.

Лемма 4.4
Объединения, пересечения и разности DU-множеств также являются DU-множествами. Всякое DU-множество является дизъюнктным объединением DU-орбит.

Доказательство. Не вполне очевидно, разве что, утверждение про разности. Пусть A' и A'' DU-инвариантны и $a' \in A' \smallsetminus A''$. Если $D_j a' \in A''$, то D_j действует эффективно, и тогда $a' = U_j D_j a'$ тоже лежит в A''. ☐

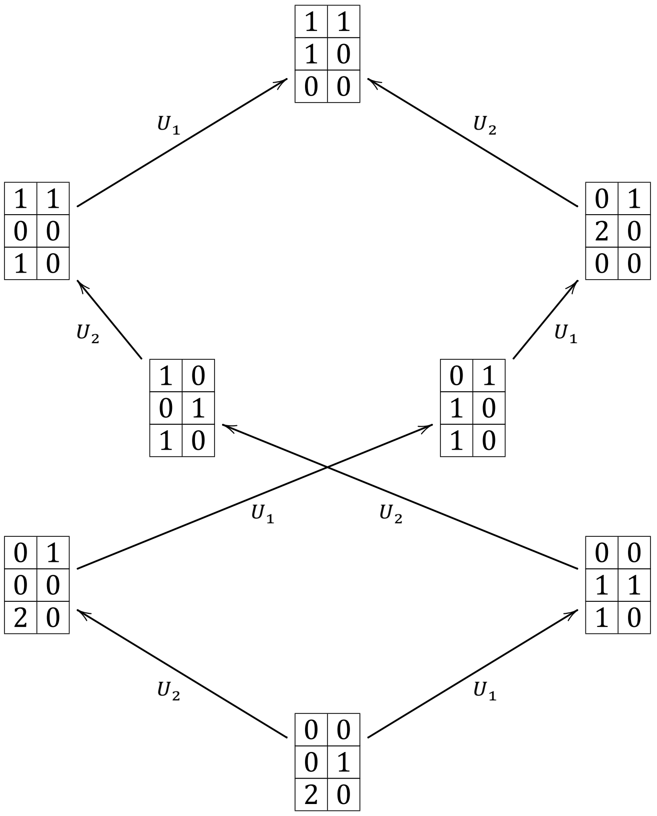


Рис. 4◇3. Стандартная DU-орбита $O_{(2,1)}$.

4.3.1. Стандартные орбиты. DU-орбиты O_λ биплотных массивов λ называются *стандартными*. Например, при $m = 3$ стандартная орбита $O_{(2,1)}$, отвечающая диаграмме – таблице – массиву

$$\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array} \quad - \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad - \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline\end{array}$$

состоит из восьми массивов, представленных на рис. 4◇3.

Из теоремы о биекции вытекает, что уплотнение влево задаёт изоморфизм любой DU-орбиты O со стандартной орбитой O_λ, нижний конец которой является биуплотнением нижнего конца орбиты O. Мы будем называть λ *типом* O . Количество орбит типа λ в данном DU-множестве M равно количеству плотных вниз массивов строчного веса λ, имеющихся в M .

4.3.2. Действие симметрической группы $S_m = Aut(J)$. На каждом DU-множестве массивов M имеется действие элементарных транспозиций $\sigma_j = (j, j+1)$, порождающих симметрическую группу S_m, переставляющую строки массива. Оно определяется следующим образом. Пусть после установления устойчивого паросочетания между j-той и $(j+1)$-ой строками в них оказалось s_j и s_{j+1} свободных шаров соответственно. Положим

$$\sigma_j = D_j^{s_{j+1}-s_j} = U_j^{s_j-s_{j+1}}\,. \tag{4-10}$$

Подробнее эту процедуру можно описать так. Свернём массив в вертикальный цилиндр, приклеив правую границу n-того столбца к левой границе первого, и продолжим устойчивое паросочетание по кругу, т. е. назначим в пару самому правому нижнему свободному шару самый левый свободный верхний и т. д. В результате останется ровно $|s_{j+1} - s_j|$ свободных шаров и все они будут располагаться или только в верхней или только в нижней строке — там где их вначале было больше. Операция σ_j просто передвигает их по вертикали в другую строку (или ничего не делает, если $s_j = s_{j+1}$). В частности, действие σ_j на строчный вес w^J состоит в перестановке j-той и $(j+1)$-ой координаты.

Из предыдущего описания видно, что $\sigma_j^2 = \mathrm{Id}$, а также, что σ_j *коммутирует с циклическими перестановками столбцов*. Очевидно также, что σ_j перестановочна с горизонтальными операциями R, L и со всеми σ_k с $|k - j| \geqslant 2$. Чтобы действие σ_j непротиворечиво продолжалось на всю симметрическую группу S_m достаточно проверить *соотношения треугольника* $\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}$. При этом можно считать массив трёхстрочным. Левое уплотнение L и циклическая перестановка столбцов C превращает любой трёхстрочный массив в одностолбцовый:

$$\begin{array}{|c|}\hline * * * \\ \hline * * * \\ \hline * * * \\ \hline\end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & 0 \\ \hline f & 0 & 0 \\ \hline\end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|c|}\hline b & c & a \\ \hline e & 0 & d \\ \hline 0 & 0 & f \\ \hline\end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|}\hline g & h & 0 \\ \hline k & 0 & 0 \\ \hline f & 0 & 0 \\ \hline\end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|}\hline h & g \\ \hline 0 & k \\ \hline 0 & f \\ \hline\end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|}\hline \ell & 0 \\ \hline k & 0 \\ \hline f & 0 \\ \hline\end{array}$$

на который σ_j и σ_{j+1} действуют перестановками строк, и соотношение треугольника, таким образом, выполняется.

4.4. Полиномы Шура. Интерпретируем все шарики из j-той строки как переменные x_j и сопоставим каждому массиву a моном $x^a \overset{\text{def}}{=} x_1^{w_1^J(a)} x_2^{w_2^J(a)} \cdots x_m^{w_m^J(a)}$, получающийся перемножением всех его шариков. Сумма этих мономов по всем массивам данного DU-множества M обозначается

$$s_M(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{a \in M} x^a \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m]$$

и называется *многочленом Шура* DU-множества M. Симметрическая группа S_m переставляет координаты весового вектора и действует на мономы x^a перестановками переменных. Таким образом, все многочлены Шура являются симметрическими.

Поскольку каждое DU-множество M является объединением непересекающихся орбит, а всякая орбита изоморфна стандартной орбите O_λ, произвольный полином Шура является линейной комбинацией с неотрицательными целыми коэффициентами *стандартных* многочленов Шура $s_\lambda(x)$, отвечающих биплотным массивам (диаграммам Юнга) λ :

$$s_M(x) = \sum_{\lambda \in \Phi(M)} c_M^\lambda \cdot s_\lambda(x)\,, \tag{4-11}$$

где суммирование происходит по всем формам λ массивов из M, и коэффициент c_M^λ равен числу DU-орбит, изоморфных O_λ, т. е. количеству всех плотных вниз массивов J-веса λ в M. Согласно n° 4.2.2, элементы стандартной орбиты O_λ суть всевозможные L-плотные массивы формы λ, и столбцовая развёртка устанавливает биекцию между такими массивами и таблицами Юнга формы λ в алфавите $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Таким образом, стандартный полином Шура имеет вид

$$s_\lambda(x) = \sum_\eta K_{\lambda,\eta} \cdot x^\eta = \sum_\eta K_{\lambda,\eta} \cdot x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \cdots x_m^{\eta_m}\,, \tag{4-12}$$

где $\eta \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^m$ пробегает m-мерные целочисленные векторы с неотрицательными координатами, а коэффициент $K_{\lambda,\eta}$ равен числу таблиц формы λ, заполненных η_1 единицами, η_2 двойками и т. д. Мы будем говорить, что такая таблица имеет *состав* η.

Например, при $m = 3$ из представленной на рис. 4◇3 схемы получаем

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2\, x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2\,.$$

Число $K_{\lambda,\eta}$ таблиц формы λ и состава η называется *числом Костки*. Отметим, что $K_{\lambda,(1^{|\lambda|})} = d_\lambda$ равно числу стандартных таблиц формы λ, все $K_{\lambda,\lambda} = 1$, и $K_{\lambda,\eta} \neq 0$ только когда при каждом $j = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ выполняются неравенства

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_j \geqslant \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_j \quad \forall j\,. \tag{4-13}$$

В этой ситуации говорят, что диаграмма λ *доминирует* вектор η и пишут $\lambda \trianglerighteq \eta$.

Упражнение 4.3. Покажите, что отношение доминирования задаёт на множестве диаграмм Юнга заданного веса n частичный порядок, полный при $n \leqslant 5$, и приведите пример двух несравнимых между собою диаграмм Юнга веса 6.

Из (4-12) видно, что стандартные полиномы Шура $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m)$, где λ пробегает все диаграммы Юнга из не более m строк, выражаются через базисные мономиальные симметрические многочлены m_μ при помощи нижней унитреугольной матрицы

$$s_\lambda = \sum_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\lambda,\mu} \cdot m_\mu \,. \tag{4-14}$$

Поскольку такая матрица обратима над $\mathbb{Z}$, многочлены s_λ тоже образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических функций.

Пример 4.2 (полные и элементарные симметрические многочлены) Многочлен $s_{(k)}(x)$, отвечающий DU-орбите одностолбцового массива, т. е. диаграммы-строки

$$\lambda = (k,\ 0,\ \cdots\ ,\ 0) = \underbrace{\square\square\cdots\square\square}_{k}\ ,$$

представляет собой *полный симметрический многочлен* $h_k(x)$ — сумму всех мономов общей степени k от $x_1, x_2, \dots, x_m$, поскольку для любого содержания η веса $|\eta| = k$ имеется ровно одна однострочная таблица, в которой все координаты выстроены монотонно[1]. Симметричным образом, $s_{(1^k)}$, отвечающий DU-орбите диаграммы-столбца

$$1^k = (1,\ 1,\ \cdots\ ,\ 1) = \left.\begin{array}{c}\square\\ \square\\ \vdots\\ \square\\ \square\end{array}\right\}k$$

это *элементарный симметрический многочлен* $e_k(x)$, т. е. сумма всех линейных по каждой переменной мономов общей степени k от $x_1, x_2, \dots, x_m$. Причина та же, только теперь номера переменных в таблице-столбце должны строго возрастать.

Пример 4.3 (тождества Коши и Шура.) Проинтерпретируем каждый шарик в клетке (i, j) массива a как билинейный моном $x_i y_j$ от двух наборов переменных $x = x^I = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = y^J = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Перемножая вместе все шарики массива a, мы получим (в обозначениях n° 4.4) моном $x^{a^t} y^a$. По теореме о биекции из теор. 4.1 сумма таких мономов по всем массивам a фиксированной формы $\lambda = \Phi(a)$ равна произведению многочленов Шура $s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y)$, и значит сумма мономов $x^{a^t} y^a$ по вообще

---

[1] эквивалентно: DU-орбита одностолбцового массива веса k образована всеми возможными расположениями k шариков по m ящикам

всем массивам a формата $I \times J$ равна сумме таких произведений по всем диаграммам Юнга λ. С другой стороны, сумма всех мономов $x^{a^t}y^a$ по всем массивам a получается при раскрытии скобок в произведении бесконечных геометрических прогрессий $\prod_{I\times J}\left(1 + x_iy_j + (x_iy_j)^2 + (x_iy_j)^3 + \cdots\right)$: выбирая из (i,j)-того сомножителя слагаемое $(x_iy_j)^{a(i,j)}$, мы получаем моном $x^{a^t}y^a$, отвечающий массиву a. Мы получили *тождество Коши*:

$$\sum_{\lambda} s_\lambda(x)\cdot s_\lambda(y) = \prod_{i,j}\frac{1}{1 - x_iy_j}\,. \tag{4-15}$$

Если взять $I = J$, ограничиться только симметричными массивами $a = a^t$, положить $x = y = \xi$ и извлечь из каждого a-монома корень

$$\xi^a = \sqrt{\xi^{a^t}\xi^a} = \sqrt{x^{a^t}y^a}|_{x=y=\xi}\,,$$

то, суммируя по всем симметричным массивам a заданной формы λ, мы получим $s_\lambda(\xi)$, а суммируя по вообще всем симметричным массивам a — сумму $\sum\limits_{\lambda} s_\lambda(\xi)$. Тот же ответ даст раскрытие скобок в произведении

$$\prod_k\left(1 + \xi_k + (\xi_k)^2 + (\xi_k)^3 + \cdots\right)\cdot\prod_{i<j}\left(1 + \xi_i\xi_j + (\xi_i\xi_j)^2 + (\xi_i\xi_j)^3 + \cdots\right)\,.$$

Суммируя геометрические прогрессии, получаем *тождество Шура*:

$$\sum_{\lambda} s_\lambda(\xi) = \prod_i\frac{1}{1-\xi_i}\cdot\prod_{i<j}\frac{1}{1-\xi_i\xi_j}\,. \tag{4-16}$$

4.5. Правило Литтлвуда – Ричардсона. Произведение $s_M(x)\cdot s_N(x)$ полиномов Шура DU-множеств M и N является полиномом Шура для DU-множества, состоящего из всевозможных массивов вида ab размера $(2n)\times m$, получающихся приписыванием какого-нибудь массива $b \in N$ справа к какому-нибудь массиву[1] $a \in M$. Множество таких массивов естественно обозначить через $M \otimes N$ и называть *тензорным произведением* DU-множеств M и N. Итак,

$$s_M(x)\cdot s_N(x) = \Big(\sum_{a\in M} x^a\Big)\cdot\Big(\sum_{b\in N} x^b\Big) = \sum_{\substack{a\in M\\ b\in N}} x^{ab} = \sum_{c\in M\otimes N} x^c\,.$$

Поскольку стандартные полиномы s_λ образуют базис модуля симметрических функций, произведение $s_\lambda s_\mu$ можно записать как

$$s_\lambda\cdot s_\mu = \sum_{\nu} c^{\nu}_{\lambda\mu}\cdot s_\nu\,. \tag{4-17}$$

---

[1] при этом вертикальный J-алфавит не меняется, а горизонтальный I-алфавит заменяется дизъюнктным объединением I-алфавитов массивов a и b

Теорема 4.2 (правило Литтлвуда – Ричардсона)
Суммирование в формуле (4-17) происходит по всем диаграммам ν, получающимся добавлением $|\mu|$ клеток к диаграмме λ, а коэффициент $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ равен количеству таких заполнений этих дописанных клеток μ_1 единицами, μ_2 двойками, μ_3 тройками и т. д., что вдоль строк «косой диаграммы» $\nu \setminus \lambda$ числа возрастают нестрого, а вдоль столбцов — строго (как в таблице Юнга), и одновременно текст, получающееся при прочтении этой «косой диаграммы» строку за строкой справа налево сверху вниз, содержит в каждом своём начальном куске единиц не меньше, чем двоек, двоек не меньше, чем троек и т. д. (т. е. является текстом Ямманучи[1]).

Упражнение 4.4. Пользуясь правилом Литтлвуда – Ричардсона, вычислите произведения[2] $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$ и $s^2_{2,1}$.

Доказательство. Мы должны подсчитать в DU-множестве $O_\lambda \otimes O_\mu$ количество DU-орбит, которые уплотняются влево до стандартной орбиты O_ν. Пусть массив ab лежит в такой орбите. Поскольку массивы a, b получены из биплотных массивов λ, μ вертикальными операторами, оба они плотны влево и имеют I-веса λ и μ соответственно. Заметим, что действие вертикальной уплотняющей операции D_j на «толстый» массив ab состоит либо в её действии отдельно на[3] b , либо в её действии отдельно на[4] a. Поэтому при уплотнении вниз «толстого» массива ab мы получим массив вида $a'b'$, в котором a' плотен вниз, и оба массива a', b' по прежнему плотны влево и имеют I-веса λ, μ. Таким образом, a' биплотен формы λ. Если форма массива $a'b' = \lambda b'$ равна ν, то строки горизонтальной развёртки массива b' — это выровненные по левому краю строки «косой таблицы» $\nu \setminus \lambda$, заполненные именно так, как требует правило Литтлвуда – Ричардсона: первое, «табличное», ограничение выражает плотность вниз «толстого» массива ab, а второе, «текстовое», ограничение выражает, согласно n° 4.2.3, плотность влево массива b'. □

Упражнение 4.5 (формулы Пьери). Выведите из теор. 4.2 *формулы Пьери*:

$$s_\lambda \cdot e_k = s_\lambda \cdot s_{(1^k)} = \sum_\mu s_\mu \tag{4-18}$$

$$s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)} = \sum_\nu s_\nu \tag{4-19}$$

где μ и ν пробегают все диаграммы, которые можно получить приписыванием k новых клеток к диаграмме λ так, чтобы никакие две новые клетки не попали в одну строку μ и в один столбец ν.

---

[1] см. n° 4.2.3 на стр. 62

[2] при этом поучительно убедиться в том, что применение теор. 4.2 к $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$ и к $s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$ (что не всё равно) приводит к одному и тому же результату

[3] если самый правый свободный шар при паросочетании внутри «толстого» массива ab лежит в b, то он подавно будет самым правым свободным шаром и для паросочетания, установленного отдельно внутри b

[4] если в b нет свободных шаров при паросочетании внутри «толстого» массива ab

4.5.1. Тождество Якоби – Труди. Из формулы Пьери (4-19) и формулы Пьери из сл. 3.6 на стр. 52 вытекает, что детерминантные полиномы Шура $\Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta$ из предыдущего параграфа и комбинаторные полиномы Шура s_λ стандартных DU-орбит — это одни и те же полиномы. В самом деле, формулы Пьери позволяют однозначно выразить все многочлены Шура через многочлены h_k. Например, согласно (4-19)

$$\begin{aligned} s_{(2,2,1)} &= s_{(2,2)}h_1 - s_{(3,2)} \\ s_{(3,2)} &= s_{(3)}h_2 - s_{(5)} - s_{(4,1)} = h_3h_2 - h_5 - s_{(4,1)} \\ s_{(2,2)} &= s_{(2)}h_2 - s_{(3,1)} - s_{(4)} = h_2^2 - h_4 - s_{(3,1)} \\ s_{(4,1)} &= s_{(4)}h_1 - s_{(5)} = h_4h_1 - h_5 \\ s_{(3,1)} &= s_{(3)}h_1 - s_{(4)} = h_3h_1 - h_4 \end{aligned}$$

откуда[1] $s_{(2,2,1)} = -h_3h_2 + h_4h_1 + h_1(h_2^2 - h_1h_3)$. В общем случае, оставляя в правой части формулы (4-19) диаграмму с самой длинной нижней строкой среди всех диаграмм с наибольшим количеством строк, мы выражаем её через h_k (где k равно длине этой нижней строки) и диаграммы, имеющие то же число строк, но более короткую нижнюю строчку, или строго меньшее число строк. Далее используем убывающую индукцию по количеству строк диаграммы Юнга и длине её нижней строки.

Совпадение детерминантного и комбинаторного описания полиномов Шура называется *тождеством Якоби – Труди*.

4.5.2. Выражение e_λ и h_λ через s_λ. Напомним, что для диаграммы Юнга μ мы обозначаем через m_i количество строк длины i в этой диаграмме и полагаем

$$e_\mu = e_{\mu_1}e_{\mu_2}\cdots e_{\mu_r} = e_1^{m_1}e_2^{m_2}\cdots e_n^{m_n} \tag{4-20}$$

$$h_\mu = h_{\mu_1}h_{\mu_2}\cdots h_{\mu_r} = h_1^{m_1}h_2^{m_2}\cdots h_n^{m_n}\,. \tag{4-21}$$

Многочлены (4-20) и (4-21) называются, соответственно, *элементарными* и *полными* симметрическими многочленами. Отметим, что при $k \in \mathbb{N}$

$$e_k(x) = s_{(1^k)}(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{и} \quad h_k(x) = s_{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_m)\,.$$

Произвольный многочлен $h_\eta = s_{(\eta_1)}s_{(\eta_2)}\cdots s_{(\eta_r)}$ представляет собою полином Шура DU-множества $O_{(\eta_1)} \otimes O_{(\eta_2)} \otimes \cdots \otimes O_{(\eta_r)}$. Орбиты формы ν в этом множестве биективно соответствуют своим нижним концам, которые в свою очередь, взаимно однозначно описываются таблицами формы ν и содержания η. Тем самым,

$$h_\eta = \sum_\nu K_{\nu,\eta}\cdot s_\nu\,. \tag{4-22}$$

Произвольный многочлен $e_\eta = s_{(1^{\eta_1})}s_{(1^{\eta_2})}\cdots s_{(1^{\eta_r})}$ представляет собою многочлен Шура DU-множества $O_{(1^{\eta_1})} \otimes O_{(1^{\eta_2})} \otimes \cdots \otimes O_{(1^{\eta_r})}$, каждый массив в котором

---

[1] читателю рекомендуется проверить этот результат по формуле Джамбелли (3-25)

имеет $|\eta|$ столбцов, разбитых на вертикальные подмассивы $a_1 a_2 \dots a_r$ ширины $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, причём в каждом столбце находится ровно один шар, и j-номера этих шаров строго возрастают внутри каждого вертикального подмассива a_i. При уплотнении вниз последнее свойство сохранится, и в результате такого уплотнения мы получим массив $a_1' a_2' \dots a_r'$ в котором шары каждого подмассива a_i' располагаются в разных строках, номера которых строго возрастают слева направо. Тем самым, каждый подмассив a_i' внесёт не более одного шара в каждую компоненту J-веса. Если суммарный J-вес при этом получится ν, то записывая в каждую строку диаграммы ν последовательно номера i тех подмассивов a_i', которые дают вклад в эту компоненту J-веса, мы получим таблицу содержания η и формы ν^t, *сопряжённой*[1] к форме ν: в силу вышесказанного номера будут строго возрастать по строкам диаграммы ν, а поскольку массив плотен вниз, они также должны не строго возрастать по столбцам; кроме того, по построению, каждый номер i будет представлен ровно в η_i различных строчках. Итак,

$$e_\eta = \sum_\nu K_{\nu^t,\eta} \cdot s_\nu \,. \tag{4-23}$$

Следствие 4.2

Инволюция ω из предл. 3.3, переводящая e_k и h_k друг в друга, действует на полиномы Шура по правилу $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda^t}$, т. е. переводит друг в друга многочлены, отвечающие транспонированным диаграмм Юнга.

Доказательство. Так как многочлены s_λ образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических функций, отображение $s_\lambda \mapsto s_{\lambda^t}$ однозначно задаёт на модуле симметрических функций $\mathbb{Z}$-линейную инволюцию. Из формул (4-22) и (4-23) следует, что эта инволюция переводит e_k в h_k и наоборот, т. е. совпадает с ω. ☐

Следствие 4.3 (вторая формула Джамбелли)

$$s_{\lambda^t} = \det\begin{pmatrix} e_{\lambda_1} & e_{\lambda_1+1} & \ddots & e_{\lambda_1+n-1} \\ e_{\lambda_2-1} & e_{\lambda_2} & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & e_{\lambda_{n-1}+1} \\ e_{\lambda_n-n+1} & \ddots & e_{\lambda_n-1} & e_{\lambda_n} \end{pmatrix} \tag{4-24}$$

(по главной диагонали стоят $e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, \dots, e_{\lambda_n}$, и при движении вдоль строк слева направо индексы у e с каждым шагом увеличиваются на единицу). ☐

Доказательство. Применяем инволюцию ω к формуле Джамбелли (3-25). ☐

---

[1] или *транспонированной*, т. е. симметрично отражённой относительно главной диагонали

4.6. Скалярное произведение Введём на $\mathbb{Z}$-модуле симметрических функций Λ скалярное произведение $\langle *, * \rangle$, для которого базис из полиномов Шура s_λ является ортонормальным. Из формул (4-22) и (4-14)

$$h_\lambda = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu,\lambda} \cdot s_\mu \,, \quad s_\mu = \sum_{\lambda \trianglerighteq \mu} K_{\mu,\lambda} \cdot m_\lambda$$

вытекает, что $\left\langle h_\lambda , s_\mu \right\rangle = K_{\mu,\lambda} = \left\langle m^*_\lambda , s_\mu \right\rangle$, где m^*_λ — базис, двойственный к m_λ. Таким образом, $m^*_\lambda = h_\lambda$, т. е. базисы h_λ и m_λ двойственны друг другу:

$$\left\langle h_\lambda , m_\mu \right\rangle = \delta_{\lambda\mu} \,. \tag{4-25}$$

Из сл. 4.2 вытекает, что инволюция ω является ортогональным оператором.

Предложение 4.2
Многочлены Ньютона p_λ составляют ортогональный базис пространства $\mathbb{Q}\otimes\Lambda$ симметрических функций с рациональными коэффициентами и имеют скалярные квадраты $\langle p_\lambda , p_\lambda \rangle = z_\lambda$, где[1] $z_\lambda = \prod\limits_k \left(m_k! \cdot k^{m_k}\right)$.

Доказательство. Выразим произведение геометрических прогрессий в правой части тождества Коши (4-15) через функции Ньютона от наборов переменных x и y:

$$\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \prod_j H(y_j) = \prod_j \exp\left(\int\limits_0^{y_j} P(t)\,dt \right) =$$
$$= \exp\left(\sum_j \sum_k \frac{1}{k}\, p_k(x) y_j^k \right) = \exp\left(\sum_k \frac{p_k(x)p_k(y)}{k} \right) = \prod_k \exp\left(\frac{p_k(x)p_k(y)}{k} \right) =$$
$$= \prod_k \sum_{\ell \geqslant 0} \frac{1}{\ell! \cdot k^\ell} \,\left(p_k(x)p_k(y)\right)^\ell = \sum_\lambda \frac{1}{z_\lambda}\, p_\lambda(x)p_\lambda(y)$$

(в последнем равенстве переход такой же, как в форм. (3-21) на стр. 48). Если обозначить через $C_{\lambda\mu} = \left\langle s_\lambda , p_\mu \right\rangle$ коэффициенты разложений Ньютоновских полиномов по базису из полиномов Шура, так что $p_\mu = \sum\limits_\lambda C_{\lambda\mu} s_\lambda$, то подставляя эти разложения в правую часть полученного выше равенства и приравнивая коэффициенты при $s_\lambda(x)s_\eta(y)$ в левой и правой части, получаем соотношения

$$\sum_\nu C_{\nu\lambda} C_{\nu\eta} = \begin{cases} z_\lambda & \text{при } \eta = \lambda \\ 0 & \text{при } \eta \neq \lambda \end{cases}$$

т. е. матрица Грама $\left(\left\langle p_\lambda , p_\mu \right\rangle\right) = C^t \cdot C$ диагональна с диагональными элементами z_λ. □

---

[1] ср. с формулами (3-19) на стр. 47

Задачи для самостоятельного решения к §4

Задача 4.1. Покажите, что массив $a = \big(a(i,j)\big)$ плотен вниз тогда и только тогда, когда для всех $i \in I$ и $j \in J$ выполняются неравенства:

$$a(1,j+1) + a(2,j+1) + \cdots + a(i,j+1) \leqslant a(1,j) + a(2,j) + \cdots + a(i-1,j)\,,$$

и напишите аналогичные неравенства, эквивалентные L- , R- и U- плотности массива a .

Задача 4.2. Нарисуйте плотный вниз массив со строчной развёрткой

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&6\\\hline 2&5&7\\\hline 3&8&9\\\hline\end{array}$$

и плотный влево массив со столбцовой развёрткой[1]

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&8\\\hline 6&7&9\\\hline\end{array}\,.$$

Какой перестановке из симметрической группы S_9 отвечает по теореме о биекции эта пара массивов?

Задача 4.3. Каким перестановкам $g \in S_9$ соответствует по теореме о биекции пара таблиц[2]

а) $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&6&7&8&9\\\hline 4\\\cline{1-1} 5\\\cline{1-1}\end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&4&5&6&7&8&9\\\hline 2\\\cline{1-1} 3\\\cline{1-1}\end{array}$ б) $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&5&6\\\hline 2&4&9\\\cline{1-3} 7&8\\\cline{1-2}\end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&5&7\\\hline 2&4&8\\\cline{1-3} 6&9\\\cline{1-2}\end{array}$

Задача 4.4. Покажите, что всякий гомоморфизм[3] между двумя DU-орбитами либо биективен, либо вторая орбита состоит из одной точки.

Задача 4.5. Выпишите явно многочлены Шура

а) $s_{2,1}(x_1,x_2,x_3)$ б) $s_{3,1}(x_1,x_2,x_3)$ в) $s_{2,1,1}(x_1,x_2,x_3)$.

Задача 4.6. Из скольких мономов состоит $s_{(2,1,1)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$?

Задача 4.7. Выразите

$$\det\begin{pmatrix} x_1^6 & x_2^6 & x_3^6 & x_4^6\\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

через элементарные симметрические многочлены и произведение $\prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$.

Задача 4.8. Для двух диаграмм Юнга λ и μ одинакового веса $|\lambda| = |\mu| = n$ положим $\lambda \trianglerighteq \mu$, если $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_j \geqslant \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_j$ при всех j. Покажите, что если $\lambda \vartriangleright \mu$ это

---

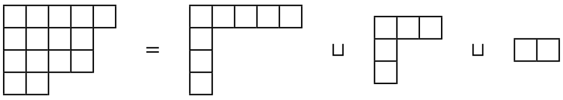
[1] напомню, что столбцовая развёртка массива a — это строчная развёртка транспонированного массива a^t

[2] первая таблица есть строчная развёртка уплотнения вниз, вторая — столбцовая развёртка уплотнения влево, а перестановка задаёт отображение из горизонтальных номеров в вертикальные

[3] т. е. отображение, перестановочное с действием всех операций D_j и U_j

наименьшая из доминирующих μ диаграмм, то μ получается из λ переносом ровно одной клетки в юго-западном направлении на ближайшее возможное расстояние, и в этом случае $\mu^t \rhd \lambda^t$. Выведите отсюда, что для любых диаграмм $\lambda \trianglerighteq \mu \iff \lambda^t \trianglelefteq \mu^t$.

Задача 4.9. Разрежем диаграмму λ в объединение Г-образных диаграмм $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ с углами на главной диагонали, как, например



(в общем случае $\gamma_i = \left(\lambda_i - i + 1, 1^{\lambda_i^t - i}\right)$, а общее количество крюков k равно числу клеток на главной диагонали λ). Выясните, с каким коэффициентом входит s_λ в разложение произведения $s_{\gamma_1} s_{\gamma_2} \cdots s_{\gamma_k}$ по базису Шура.

Задача 4.10* (инволюция Шютценберже). Покажите, что центральная симметрия не меняет форму[1] $n \times m$-массива, т. е. $\Phi(a^*) = \Phi(a)$ для $a^*(i,j) = a(n+1-i, m+1-j)$.

Задача 4.11* (выравнивание чумов). Будем называть *цепью* произвольного чума M любое его линейно упорядоченное подмножество, а *антицепью* — любое подмножество состоящее из попарно несравнимых элементов. Подмножество $N \subset M$, называется k-антицепью, если его можно покрыть k антицепями. Обозначим через $\alpha_k(M)$ максимум длин k-антицепей чума . Набор разностей $\delta_k(M) = \alpha_k(M) - \alpha_{k-1}(M)$ называется *формой* чума M. Свяжем с каждым массивом a частичный порядок на множестве $M = M(a)$ всех его шаров, полагая что один шар строго больше другого, если обе его координаты строго больше. Докажите, что форма чума $M(a)$ совпадает с формой массива[2] a. Воспользуйтесь тем, что вертикальные операции D_j, U_j не уменьшают элементов последовательности δ_k (это сначала проверяется для первого члена последовательности δ_1 равного длине максимальной 1-антицепи, а потом каждая k-антицепь распутывается в объединение k непересекающихся 1-антицепей).

---

[1] напомню, что *форма* массива это диаграмма Юнга, описывающая его биуплотнение

[2] в частности, является диаграммой Юнга, что вовсе не очевидно *a priori* и составляет содержание непростой комбинаторной теоремы, доказанной в 70-х годах Грином и Фоминым

§5. Введение в теорию представлений.

5.1. Представления множества операторов. Для произвольного множества R условимся обозначать через $R \otimes \Bbbk$ векторное пространство с базисом R над полем $\Bbbk$, состоящее из всевозможных конечных формальных линейных комбинаций элементов из R с коэффициентами в $\Bbbk$, а через $A_R \overset{\text{def}}{=} T(R \otimes \Bbbk)$ — тензорную алгебру этого векторного пространства, т. е. свободную ассоциативную $\Bbbk$-алгебру, порождённую множеством R.

Например, если множество $R = \{t\}$ состоит из одного элемента t, векторное пространство $t \otimes \Bbbk = \Bbbk \cdot t$ одномерно, а ассоциативная алгебра $A_t \simeq \Bbbk[t]$ изоморфна алгебре многочленов от одной переменной[1].

Отображение множества R в алгебру линейных эндоморфизмов какого-нибудь векторного пространства W

$$\varrho : R \to \operatorname{End}(W) \tag{5-1}$$

называется *линейным представлением* множества R эндоморфизмами этого пространства. По универсальному свойству свободной алгебры A_R, линейные представления (5-1) биективно соответствуют гомоморфизмам алгебр

$$\tilde{\varrho} : A_R \to \operatorname{End}(W)\,. \tag{5-2}$$

Гомоморфизм (5-2) называется *линейным представлением* алгебры A_R в пространстве W. Пространство W с фиксированным отображением (5-1) или гомоморфзмом (5-2) называется R-модулем или A_R-модулем. И то, и то означает фиксацию для каждого $f \in R$ линейного оператора $\varrho(f) : W \to W$. Тензоры

$$f = \sum x_{f_1 f_2 \dots f_m} f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_m \in A_R$$

с $f_\nu \in R$ и $x_{f_1 f_2 \dots f_m} \in \Bbbk$ при этом представляются линейными операторами

$$\tilde{\varrho}(f) = \sum x_{f_1 f_2 \dots f_m} \varrho(f_1) \circ \varrho(f_2) \circ \dots \circ \varrho(f_m) : W \to W\,.$$

Образ гомоморфизма (5-2) состоит из всех операторов $W \to W$, которые можно получить, беря конечные линейные комбинации и композиции операторов, представляющих элементы множества R. Он называется *ассоциативной оболочкой* множества операторов $\varrho(R) \subset \operatorname{End}(W)$ и обозначается $\operatorname{Ass}\big(\varrho(R)\big) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{im} \tilde{\varrho}$. Когда понятно, о каком представлении ϱ идёт речь, мы обозначаем результат применения оператора $\tilde{\varrho}(f)$, где $f \in A_R$, к вектору $w \in W$ просто через fw. Для подпространства $U \subset W$ и набора операторов $F \subset A_R$ мы полагаем $FU \overset{\text{def}}{=} \{fu \mid f \in F\,,\ u \in U\}\,.$

---

[1] изоморфизм сопоставляет базисному тензору $t \otimes t \otimes \dots \otimes t \in (\Bbbk \cdot t)^{\otimes n}$ моном t^n

Определение 5.1 (разложимость и (полу) простота)
Подпространство $U \subset W$ называется *R-подмодулем*[1], если $RU \subset U$. Как обычно, мы называем подмодуль U *собственным*, если он отличен от нуля и от всего W. Модуль называется *неприводимым*[2], если у него нет собственных подмодулей, *разложимым* — если он является прямой суммой собственных подмодулей, и *вполне приводимым*[3] — если он является прямой суммой неприводимых подмодулей.

Упражнение 5.1. Убедитесь, что для заданных подпространств $U_1, U_2 \subset W$ условия $RU_1 \subset U_2$ и $A_R U_1 \subset U_2$ равносильны, и выведите отсюда, что простота, полупростота и разложимость модуля W относительно множества операторов и относительно ассоциативной оболочки этих операторов означают одно и то же.

Пример 5.1 (пространство с одним оператором)
Если множество R состоит из одного элемента t, то $A_R \simeq \Bbbk[t]$ является кольцом многочленов от этого элемента. Представление $\varrho : R \to \operatorname{End} W$ заключается в выборе на пространстве W линейного оператора $f = \varrho(t) : W \to W$ и наделяет пространство W структурой модуля над кольцом многочленов, которая задаётся гомоморфизмом

$$\tilde{\varrho} = \mathrm{ev}_f : \Bbbk[t] \to \operatorname{End}(W), \quad t \mapsto f, \tag{5-3}$$

переводящим многочлен $F \in \Bbbk[t]$ в результат подстановки в него оператора f вместо переменной t. Если пространство W конечномерно, гомоморфизм (5-3) имеет ненулевое ядро $\ker \mathrm{ev}_f = (\mu_f)$, где μ_f — приведённый многочлен наименьшей степени, такой что[4] $\mu_f(f) = 0$. Ассоциативная оболочка оператора f, т. е. образ гомоморфизма (5-3), представляет собою множество всех многочленов от оператора f и изоморфна фактор алгебре $\Bbbk[t]/(\mu_f)$. По теореме о строении конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов конечномерный $\Bbbk[t]$-модуль W, будучи модулем кручения, изоморфен прямой сумме фактор модулей

$$\frac{\Bbbk[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_2^{m_2})} \oplus \cdots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_s^{m_s})}, \tag{5-4}$$

где все многочлены $p_i \in \Bbbk[t]$ неприводимы и приведены, а действие оператора состоит в умножении на t, и два таких модуля изоморфны, если и только если они отличаются друг от друга перестановкой прямых слагаемых. В частности, всякое неразложимое пространство с оператором изоморфно простран-

---

[1] а также *R-инвариантным* подпространством

[2] или *простым*

[3] а таже *полупростым*

[4] напомню, что он называется *минимальным многочленом* оператора f

ству $\Bbbk[t]/\left(p^m\right)$ с оператором умножения на t, и два таких пространства с разными p или m не изоморфны друг другу.

Упражнение 5.2. Убедитесь, что $\Bbbk[t]$-модуль $\Bbbk[t]/\left(p^m\right)$ неприводим , если и только если $m = 1$.

Тем самым, всякое неприводимое пространство с оператором изоморфно $\Bbbk[t]/(p)$, где $p \in \Bbbk[t]$ приведён и неприводим, а оператор действует умножением на t, а всякое полупростое — прямой сумме нескольких таких пространств.

Упражнение 5.3. Докажите, что оператор f над произвольным полем $\Bbbk$ диагонализуем тогда и только тогда, когда он аннулируется многочленом, полностью разлагающимся в $\Bbbk[t]$ в произведение попарно различных линейных множителей[1].

Пример 5.2 (коммутирующие операторы)
Если все операторы из R коммутируют друг с другом, то каждое собственное подпространство любого оператора $f \in R$ является R-подмодулем, т. к. любой перестановочный с f оператор g переводит собственный для f вектор v с $fv = \lambda v$ в собственный вектор с тем же собственным числом: $f(gv) = g(fv) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$. Из этого наблюдения индукцией по $\dim V$ выводится, что над алгебраически замкнутым полем все операторы из R имеют в V общий собственный вектор: это так, если все операторы скалярны, если же хоть один из операторов не скалярен, то у него есть ненулевое собственное подпространство, которое является R-модулем размерности, меньшей $\dim V$, и по индукции в нём есть вектор, собственный для всех операторов из R.

Аналогично проверяется, что если все операторы из R диагонализуемы, то их можно диагонализовать одновременно в одном общем базисе. Для этого надо разложить V в прямую сумму собственных подпространств какого-нибудь нескалярного оператора $f \in R$. Такое разложение R-инвариантно, и по упр. 5.3 ограничение каждого оператора из R на каждое собственное подпространство f диагонализуемо на этом подпространстве. Используя индукцию по размерности, мы одновременно диагонализуем все операторы из R на каждом прямом слагаемом.

Следствие 5.1
Над алгебраически замкнутым полем все конечномерные простые модули над любым множеством коммутирующих операторов одномерны, и любой конечномерный модуль над множеством диагонализуемых коммутирующих операторов полупрост. ☐

5.1.1. Гомоморфизмы представлений. Линейный оператор $\varphi : W_1 \to W_2$ между R-модулями, заданными отображениями $\varrho_1 : R \to \mathrm{End}(W_1)$ и $\varrho_2 : R \to \mathrm{End}(W_2)$, называется гомоморфизмом R-модулей[2], если он перестановочен с

---

[1] в частности, если оператор диагонализуем на всём пространстве, то он диагонализуем и на любом своём инвариантном подпространстве

[2] а также *сплетающим оператором* или *R-линейным отображением*

действием всех операторов из R, т. е. если для всех $f \in R$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "\varphi"] & W_2 \\ W_1 \arrow[u, "\varrho_1(f)"] \arrow[r, "\varphi"] & W_2 . \arrow[u, "\varrho_2(f)"'] \end{tikzcd}$$

Множество всех R-линейных гомоморфизмов обозначается через

$$\mathrm{Hom}_R(W_1, W_2) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : W_1 \to W_2 \mid \forall w \in W_1,\ \forall f \in R\ \varphi(fw) = f\varphi(w)\}\,.$$

Упражнение 5.4. Убедитесь, что $\mathrm{Hom}_R(W_1, W_2) = \mathrm{Hom}_{A_R}(W_1, W_2)$ является векторным подпространством в $\mathrm{Hom}(W_1, W_2)$ и что композиции R-линейных отображений R-линейны, а ядро и образ гомоморфизма R-модулей являются R-подмодулями.

Лемма 5.1 (лемма Шура)
Всякий ненулевой гомоморфизм неприводимых R-модулей является изоморфизмом. Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то все R-линейные эндоморфизмы неприводимого R-модуля скалярны, т. е. имеют вид $\lambda \cdot \mathrm{Id}$, где $\lambda \in \Bbbk$.

Доказательство. Пусть представления $\varrho_1 : R \to \mathrm{End}(W_1)$ и $\varrho_2 : R \to \mathrm{End}(W_2)$ неприводимы и $\varphi : W_1 \to W_2$ перестановочен со всеми операторами из R. Поскольку $\ker\varphi \subset W_1$ и $\mathrm{im}\,\varphi \subset W_2$ являются R-подмодулями, оба они несобственные, и либо $\ker\varphi = W_1$, т. е. $\varphi = 0$, либо $\ker\varphi = 0$ и $\mathrm{im}\,\varphi \neq 0 \Rightarrow \varphi \neq 0 \Rightarrow \mathrm{im}\,\varphi = W_2$, т. е. φ инъективен и сюрьективен. Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, и $\varphi : W \to W$ является R-линейным автоморфизмом R-модуля W, то каждый из операторов $\lambda \cdot \mathrm{Id}_W - \varphi$ с $\lambda \in \Bbbk$ тоже R-линеен и при некотором λ имеет ненулевое ядро. Так как W неприводим, оно совпадает со всем W. □

Следствие 5.2
Если основное поле алгебраически замкнуто, а R-модули U и W неприводимы, то

$$\dim \mathrm{Hom}_R(U, W) = \begin{cases} 0 & \text{если } U \text{ и } W \text{ не изоморфны} \\ 1 & \text{если } U \text{ и } W \text{ изоморфны.} \end{cases}$$

Доказательство. Любые два ненулевых изоморфизма $\varphi, \psi : U \xrightarrow{\sim} W$ пропорциональны, поскольку $\psi^{-1}\varphi = \lambda \cdot \mathrm{Id}_U$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk^*$. □

5.2. Полупростые модули над ассоциативной алгеброй. Пусть A — ассоциативная алгебра над произвольным полем $\Bbbk$, а V — любое векторное пространство над $\Bbbk$. Всякий гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varrho : A \to \mathrm{End}\,V$, называется *линейным представлением* алгебры A в векторном пространстве V, и пространство V называется в этой ситуации A-модулем. Представления ассоциативных алгебр являются специальными примерами представлений множеств операторов и к ним в полной мере приложима терминология из опр. 5.1 на стр. 77. Для двух A-модулей U, W мы полагаем

$$\mathrm{Hom}_A(U,V) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to W \mid \forall f \in A,\ \forall u \in U\ \varphi(fu) = f\varphi(u)\}$$

и называем такие отображения $\varphi : U \to W$ *A-линейными*.

Упражнение 5.5. Пусть линейный оператор $\pi : V \to V$ удовлетворяет соотношению $\pi^2 = \pi$. Покажите, что $V = \ker \pi \oplus \operatorname{im} \pi$ и π проектирует V на $\operatorname{im} \pi$ вдоль $\ker \pi$, причём если π также и A-линеен, то $\ker \pi$ и $\operatorname{im} \pi$ являются A-подмодулями, а оператор $1 - \pi$ является A-линейным проектором на $\ker \pi$ вдоль $\operatorname{im} \pi$.

Предложение 5.1 (критерии полупростоты)
Следующие свойства конечномерного[1] A-модуля W попарно эквивалентны:

1) W полупрост (т. е. является прямой суммой простых A-модулей)

2) W линейно порождается простыми подмодулями

3) $\forall$ A-подмодуля $U \subset W$ $\exists$ A-подмодуль $V \subset W : W = U \oplus V$

4) $\forall$ A-подмодуля $U \subset W$ $\exists\, \pi \in \mathrm{End}_A(W) : \pi^2 = \pi$ и $\operatorname{im} \pi = U$.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Покажем, что (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $U \subsetneq W$ — произвольный подмодуль. Поскольку $U \neq W$ и W линейно порождается простыми подмодулями, имеется неприводимый модуль $V_1 \not\subset U$. Так как V_1 прост, пересечение $V_1 \cap U \subsetneq V_1$ нулевое, и сумма U и V_1 прямая. Если $U \oplus V_1 \neq W$, повторим рассуждение с заменой U на $U \oplus V_1$: существует неприводимый подмодуль $V_2 \not\subset U \oplus V_1$, и сумма U, V_1 и V_2 снова прямая. Через конечное число шагов[2] получим разложение $W = U \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$. Отметим, что при $U = 0$ мы получаем импликацию (2) $\Rightarrow$ (1). Импликация (3) $\Rightarrow$ (4) очевидна: проектор π_V модуля $W = U \oplus V$ на U вдоль V перестановочен с действием A. Импликация (4) $\Rightarrow$ (1) доказывается индукцией по $\dim W$. Когда W прост[3], доказывать нечего. Если W обладает собственным подмодулем $U \subsetneq W$, и $\pi : W \twoheadrightarrow U$ соответствующий проектор, то $W = U \oplus \ker \pi$ по упр. 5.5, и $V = \ker \pi$ тоже является A-подмодулем. Заметим теперь, что если свойство (4) выполняется в модуле W, то оно выполняется и во всех его подмодулях $M \subset W$, т. к. любой подмодуль $N \subset M$ является одновременно подмодулем в W, и ограничение на M A-линейного проектора $W \twoheadrightarrow N$ даёт A-линейный проектор $M \twoheadrightarrow N$. В частности, свойство (4) выполнено в U и в V. Поскольку их размерности строго меньше $\dim W$, по индукции, U и V являются прямыми

---

[1] требование конечномерности не является здесь существенным, и преодолевается надлежащим применением леммы Цорна

[2] в бесконечномерном случае в этом месте следует применить лемму Цорна

[3] в частности, при $\dim W = 1$

суммами простых модулей. Поэтому $W = U \oplus V$ тоже является прямой суммой простых подмодулей. ☐

Следствие 5.3
Прямые суммы, подмодули и фактор модули полупростых модулей также являются полупростыми модулями.

Доказательство. Прямая сумма полупростых модулей линейно порождается простыми подмодулями слагаемых. Каждое инвариантное подпространство в подмодуле полупростого модуля является образом A-инвариантного проектора. Фактор модуль полупростого модуля линейно порождается образами его простых подмодулей. По лемме Шура эти образы либо нулевые, либо изоморфны исходным простым подмодулям, т. е. тоже просты. ☐

Упражнение 5.6. Покажите, что для любого векторного пространства V имеет место изоморфизм алгебр $\mathrm{End}\left(V^{\oplus n}\right) \simeq \mathrm{Mat}_n\,(\mathrm{End}(V))$.

Теорема 5.1 (теорема о двойном централизаторе)
Пусть конечномерное[1] векторное пространство V полупросто над ассоциативной подалгеброй $A \subset \mathrm{End}(V)$. Обозначим через $B = \mathrm{End}_A(V)$ алгебру всех операторов, перестановочных с подалгеброй[2] A. Тогда алгебра всех операторов, перестановочных с подалгеброй B, совпадает с A, т. е. $\mathrm{End}_B(V) = A$.

Доказательство. Включение $A \subset \mathrm{End}_B(V)$ очевидно из определений. Чтобы установить обратное включение, зафиксируем в V базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и покажем, что для любого оператора $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$ найдётся такой оператор $a \in A$, что $\varphi e_i = a e_i$ при всех i, — это влечёт равенство $\varphi = a$. Рассмотрим n-кратную прямую сумму $W = V^{\oplus n}$ и введём на ней структуру модуля над алгебрами A, B и $\mathrm{End}_B(V)$, полагая $f\,(v_1, v_2, \dots, v_n) = (fv_1, fv_2, \dots, fv_n)$. Обозначим вектор $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in W$ через e. Надо показать, что $\varphi e \in Ae$. Поскольку W является полупростым A-модулем, A-подмодуль $Ae \subset W$ является образом некоторого A-линейного проектора $\pi : W \twoheadrightarrow Ae$, тождественно действующего на Ae. Если π коммутирует с φ, то $\varphi(e) = \varphi(\pi e) = \pi(\varphi e) \in Ae$, что и требуется. Остаётся проверить, что π и в самом деле коммутирует с φ. Для этого, следуя упр. 5.6, запишем эндоморфизм $\pi : V^{\oplus n} \to V^{\oplus n}$ матрицей $\left(\pi_{ij}\right)$ с элементами[3] $\pi_{ij} \in \mathrm{End}(V)$. Поскольку π перестановочен с действием A на W, каждая компонента π_{ij} перестановочна с действием A на V, т. е. лежит в $\mathrm{End}_A(V) = B$. Поэто-

---

[1] в этой теореме конечномерность уже существенна

[2] Подалгебра $\mathrm{End}_A(V)$ называется *централизатором* подалгебры A в алгебре $\mathrm{End}(V)$, чем и объясняется название теоремы. В англоязычной литературе подалгебру $\mathrm{End}_A(V)$ иногда называют «*commutator of A*», а теор. 5.1 — «*double commutator theorem*». В русском языке термин «коммутатор» в этом контексте никогда не используется.

[3] оператор $\pi_{ij} : V \to V$ задаёт проекцию на i-тое слагаемое суммы $V^{\oplus n}$ результата применения π к j-тому слагаемому этой суммы

му диагональная матрица, по диагонали которой стоят одинаковые элементы $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$, коммутирует с π. □

Следствие 5.4 (теорема Бернсайда)
Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, а конечномерное векторное пространство V неприводимо над множеством операторов $R \subset \mathrm{End}(V)$, то ассоциативная оболочка $\mathrm{Ass}(R) \subset \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ этих операторов совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$. В частности, все конечномерные неприводимые представления $A \to \mathrm{End}(V)$ любой ассоциативной алгебры A эпиморфны.

Доказательство. По лемме Шура[1] $\mathrm{End}_{\mathrm{Ass}(R)}(V) = \Bbbk$, откуда $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V) = \mathrm{Ass}(R)$. □

Упражнение 5.7. Установите над любым полем $\Bbbk$ обратную импликацию: если $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{End}(V)$, то R-модуль V неприводим.

5.3. Изотипные компоненты. Зафиксируем простой A-модуль U и для любого A-модуля W зададим на тензорном произведении $\mathrm{Hom}_A(U,W)\otimes U$ структуру A-модуля правилом $a(\varphi \otimes u) \overset{\text{def}}{=} \varphi \otimes (au)$ для всех $a \in A$. Каноническая свёртка

$$c : \mathrm{Hom}_A(U,W) \otimes U \to W\,, \quad \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u)\,, \tag{5-5}$$

является A-линейным гомоморфизмом. Её образ обозначается $W_U \subset W$ и называется *U-изотипной компонентой* модуля W. Он равен сумме всех изоморфных U неприводимых подмодулей в W: поскольку всякий ненулевой гомоморфизм $\psi : U \to W$ инъективен, любой вектор вида $\sum \psi_i(u_i) \in W$ с $u_i \in U$ и $\psi_i \in \mathrm{Hom}_A(U,W)$ лежит в сумме подмодулей $\psi_i(U) \subset W$, изоморфных U, и наоборот, если векторы $v_i \in \mathrm{im}\,\psi_i$ лежат в образах A-линейных вложений $\psi_i : U \hookrightarrow W$, то $\sum v_i = c\left(\sum \psi_i \otimes \psi_i^{-1} v_i\right)$.

Предложение 5.2
Всякий гомоморфизм A-модулей $\varphi : V \to W$ переводит U-изотипную компоненту $V_U \subset V$ в U-изотипную компоненту $W_U \subset W$. В частности, для любого подмодуля $V \subset W$ выполнено равенство $V_U = V \cap W_U$.

Доказательство. Образ любого вектора вида $\sum \psi_i(u_i)$ с $\psi_i \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$ и $u_i \in U$ также имеет вид $\sum \varphi\psi_i(v)$ с $\varphi\psi_i \in \mathrm{Hom}_A(U,W)$. □

Предложение 5.3
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ каноническая свёртка (5-5) инъективна, т. е. задаёт изоморфизм $c : \mathrm{Hom}_A(U,W) \otimes U \xrightarrow{\sim} W_U$.

Доказательство. Так как W_U линейно порождается изоморфными U простыми подмодулями, существует разложение

$$W_U = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s \tag{5-6}$$

---

[1] см. лем. 5.1 на стр. 79

и вложения $\psi_i : U \hookrightarrow W$ с $\psi_i(U) = V_i$. По сл. 5.2 $\mathrm{Hom}_A(U, W) = \mathrm{Hom}_A(U, W_U) = \bigoplus \mathrm{Hom}_A(U, V_i)$ является прямой суммой одномерных пространств, порождённых вложениями ψ_i. Поэтому элементы модуля $\mathrm{Hom}_A(U, W) \otimes U$ однозначно записываются в виде $\sum \psi_i \otimes u_i$ с $u_i \in U$. Если $c\left(\sum \psi_i \otimes u_i\right) = \sum \psi_i(u_i) = 0$, то каждый из s векторов $\psi_i(u_i)$, лежащих в разных компонентах прямой суммы (5-6), равен нулю в отдельности, а поскольку все ψ_i инъективны, все $u_i = 0$. $\square$

Предложение 5.4 (изотипное разложение)

Если A-модуль W полупрост, то в любом его разложении в прямую сумму простых подмодулей сумма тех слагаемых, что изоморфны U, совпадает с U-изотипной компонентой $W_U \subset W$. В частности, она не зависит от выбора разложения W в прямую сумму простых подмодулей, и имеется каноническое *изотипное разложение*

$$W = \bigoplus_U W_U \,, \tag{5-7}$$

где суммирование происходит по всем неизоморфным друг другу неприводимым A-модулям U, для которых $\mathrm{Hom}_A(U, W) \neq 0$.

Доказательство. Поскольку $\mathrm{Hom}_A(U, W) = \bigoplus \mathrm{Hom}_A(U, V_i)$ и $\mathrm{Hom}_A(U, V_j) = 0$ для всех $V_j \not\simeq U$, образ канонической свёртки (5-5) лежит в сумме тех подмодулей V_i, что изоморфны U. $\square$

Определение 5.2

Для простого модуля U и полупростого модуля W число

$$m_U \overset{\text{def}}{=} \dim W_U / \dim U \,, \tag{5-8}$$

равное количеству изоморфных U слагаемых любого разложения модуля W в прямую сумму неприводимых подмодулей, называется *кратностью* простого модуля U в полупростом модуле W.

Следствие 5.5

Для конечномерных полупростых A-модулей V, W над алгебраически замкнутым полем выполняется равенство

$$\dim \mathrm{Hom}_A(V, W) = \sum_U m_U(U) \cdot m_U(W) = \dim \mathrm{Hom}_A(W, V)\,,$$

где суммирование происходит по всем неизоморфным друг другу неприводимым A-модулям U.

Доказательство. Пусть $V = \oplus V_i$ и $W = \oplus W_j$, где все V_i и W_j неприводимы. По лемме Шура пространства $\mathrm{Hom}_A(V_i, W_j)$ нулевые при $V_i \not\simeq W_j$ и одномерные при $V_i \simeq W_j$. Поэтому размерность пространства $\mathrm{Hom}_A(V, W) = \bigoplus_{ij} \mathrm{Hom}_A(V_i, W_j)$ равна $\sum_U m_U(U) \cdot m_U(W)$, и то же самое верно для $\mathrm{Hom}_A(W, V)$. $\square$

5.4. Линейные представления групп. Действие группы G на векторном пространстве V линейными преобразованиями или, что то же самое, гомоморфизм групп $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$, называется *линейным представлением* группы G в векторном пространстве V. Пространство V называется в этом случае G-модулем. Прямая сумма, тензорное произведение, а также внешние и симметрические степени G-модулей U, W канонически наделяются такими структурами G-модулей, что операторы $g \in G$ действуют по правилам

$$\begin{aligned} g(u \dotplus w) &\overset{\text{def}}{=} (gu) \dotplus (gw) & \qquad g(u \otimes w) &\overset{\text{def}}{=} (fu) \otimes (gw) \\ g(u_1 \wedge u_2) &\overset{\text{def}}{=} (gu_1) \wedge (gu_2) & \qquad g(u_1 \cdot u_2) &\overset{\text{def}}{=} (gu_1) \cdot (gu_2) \,. \end{aligned}$$

Для любого G-подмодуля $V \subset W$ фактор пространство W/V также является G-модулем с действием $g[v] \overset{\text{def}}{=} [gv]$.

Упражнение 5.8. Убедитесь, что все эти формулы корректно задают гомоморфизмы группы G в $\mathrm{GL}(U \oplus W)$, $\mathrm{GL}(U \otimes W)$, $\mathrm{GL}\big(\Lambda(U)\big)$, $\mathrm{GL}\big(S(U)\big)$ и $\mathrm{GL}(W/V)$ соответственно.

Для каждого представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *двойственное представление*

$$\varrho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$$

определяется так, чтобы свёртка векторов с ковекторами была G-инвариантна, т. е.

$$\langle\, \varrho^*(g)\xi \,,\, \varrho(g)w \,\rangle = \langle\, \xi \,,\, w \,\rangle \tag{5-9}$$

для всех $g \in G$, $\xi \in V^*$ и $w \in V$. Так как каждый оператор $\varrho(g)$ обратим, равенство (5-9) равносильно равенству $\langle\, \varrho^*(g)\xi \,,\, v \,\rangle = \left\langle\, \xi \,,\, \varrho\left(g^{-1}\right) v \,\right\rangle$, означающему, что $\varrho^*(g) = \varrho\left(g^{-1}\right)^*$ это двойственный к $\varrho(g)^{-1}$ оператор, переводящий ковектор $\xi \in V^*$ в ковектор $\xi \circ g^{-1} : v \mapsto \xi\left(g^{-1}v\right)$. В частности, матрица оператора $\varrho^*(g)$ в двойственном базисе получается из матрицы $\varrho(g)$ обращением и транспонированием.

Упражнение 5.9. Убедитесь, что $\varrho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ является гомоморфизмом групп.

Для любых двух представлений $\varrho : G \to \mathrm{GL}(U)$ и $\lambda : G \to \mathrm{GL}(W)$ представление $\varrho^* \otimes \lambda$ задаёт действие группы G на пространстве $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$ всех линейных операторов $\varphi : U \to V$ по правилу

$$g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1} \,. \tag{5-10}$$

Упражнение 5.10. Убедитесь в этом.

Подпространство неподвижных векторов представления (5-10) обозначается

$$\mathrm{Hom}_G(U, V) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to V \mid \forall\, g \in G \;\; g\varphi = \varphi g\}$$

и называется пространством *G-инвариантных* операторов[1].

---

[1] а также *сплетающих* операторов, *G-линейных* операторов или *G-гомоморфизмов*

Лемма 5.2

Пусть $|G| = n$, а основное поле $\Bbbk$ содержит все n корней n-той степени из единицы и $\operatorname{char}\Bbbk \nmid n$. Тогда в любом конечномерном представлении группы G над полем $\Bbbk$ все её элементы действуют диагонализуемыми операторами.

Доказательство. Каждый оператор из группы G аннулируются многочленом $t^n - 1$, который в силу сделанных предположений не имеет кратных корней и полностью раскладывается в $\Bbbk[t]$ на линейные множители. По упр. 5.3 такой оператор диагонализуем. □

5.4.1. Представления конечных абелевых групп. Пусть G — произвольная конечная абелева группа, основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, и $\operatorname{char}(\Bbbk) \nmid |G|$. Из лем. 5.2 и сл. 5.1 на стр. 78 следует, что всякое конечномерное линейное представление группы G является прямой суммой одномерных. Так как любой линейный оператор на одномерном пространстве скалярен, одномерное представление описывается мультипликативным гомоморфизмом

$$\chi : G \to \Bbbk^* , \quad gv = \chi(g)\,v \quad \forall\, g \in G\ \forall\, v \in V , \tag{5-11}$$

который сопоставляет элементу $g \in G$ тот скаляр, которым он действует на пространстве представления. Гомоморфизмы (5-11) называются *мультипликативными характерами* абелевой группы G. Одномерный G-модуль, отвечающий характеру χ, обозначается через V_χ.

Упражнение 5.11. Убедитесь, что $V_\chi \simeq V_\psi$ как G-модули тогда и только тогда, когда $\chi = \psi$ как гомоморфизмы из G в $\Bbbk^*$.

Поскольку $\chi^{|G|}(g) = \chi\left(g^{|G|}\right) = \chi(e) = 1$ для всех $g \in G$, множество значений любого характера лежит в мультипликативной подгруппе $\boldsymbol{\mu}_{|G|}(\Bbbk) \subset \Bbbk^*$ корней $|G|$-той степени из 1 в поле $\Bbbk$. Сами характеры образуют мультипликативную абелеву подгруппу в алгебре $\Bbbk^G$ всех функций на группе G со значениями в поле $\Bbbk$. Эта группа обозначается $G^\wedge$ и называется *двойственной по Понтрягину* к группе G. Единицей в $G^\wedge$ служит *тривиальный характер* $\chi_e \equiv 1$, отвечающий тривиальному представлению.

Упражнение 5.12. Проверьте, что характер тензорного произведения одномерных представлений абелевой группы равен произведению их характеров, а характер двойственного представления обратен характеру исходного.

Группа G действует на $\Bbbk^G$ по правилу $g : f(x) \mapsto f(gx)$, и V_χ-изотипная компонента этого представления состоит из таких функций $f : G \to \Bbbk$, что $f(gx) = \chi(g)f(x)$ для всех $x, g \in G$. Полагая в этом условии $x = e$, получаем для всех $g \in G$ равенство $f(g) = \chi(g) \cdot f(e)$, означающее, что все такие функции пропорциональны характеру χ. Тем самым, каждая изотипная компонента представления $\Bbbk^G$ одномерна, а его изотипное разложение имеет вид

$$\Bbbk^G = \bigoplus_{\chi \in G^\wedge} \Bbbk \cdot \chi \,.$$

В частности, $|G^\wedge| = |G|$ и характеры образуют базис пространства функций на группе G со значениями в поле $\Bbbk$.

Упражнение 5.13. Покажите, что любой набор различных гомоморфизмов из произвольной[1] группы G в мультипликативную группу любого поля $\Bbbk$ линейно независим в пространстве функций $G \to \Bbbk$.

Теорема 5.2 (двойственность Понтрягина[2])
Для каждого $g \in G$ функция вычисления $\mathrm{ev}_g : G^\wedge \to \Bbbk$, $\chi \mapsto \chi(g)$, является характером группы $G^\wedge$, а отображение $G \to G^{\wedge\wedge}$, $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ является изоморфизмом групп.

Доказательство. Первое утверждение проверяется выкладкой

$$\mathrm{ev}_g(\chi_1\chi_2) = \chi_1(g) \cdot \chi_2(g) = \mathrm{ev}_g(\chi_1) \cdot \mathrm{ev}_g(\chi_2) .$$

Равенства $\mathrm{ev}_{g_1g_2}(\chi) = \chi(g_1g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2) = \mathrm{ev}_{g_1}(\chi)\,\mathrm{ev}_{g_2}(\chi)$ показывают, что отображение $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ является гомоморфизмом групп. Если элемент $g \in G$ лежит в его ядре, то $\chi(g) = 1$ для всех $\chi \in G^\wedge$ и g тривиально действует в любом конечномерном представлении группы G. В частности, $f(gx) = f(x)$ для всех функций $f : G \to \Bbbk$, что возможно только если $xg = x$ для каждого $x \in G$, т. е. только при $g = e$. Поскольку $|G^{\wedge\wedge}| = |G|$, инъективность гомоморфизма $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ влечёт его биективность. □

5.4.2. Проектор на инварианты. Рассмотрим теперь линейное представление V произвольной, не обязательно абелевой, группы G. Векторы, неподвижные относительно всех преобразований из G образуют в V подмодуль, называемый *модулем G-инвариантов* и обозначаемый

$$V^G \overset{\text{def}}{=} \{\, v \in V \mid gv = v \ \ \forall\, g{\in}G \,\} .$$

Если группа G конечна и её порядок не делится на характеристику поля $\Bbbk$, каждое линейное представление V группы G допускает G-инвариантную проекцию на подмодуль инвариантов. Она обозначается $v \mapsto v^\natural$ («v-бекар») и сопоставляет вектору $v \in V$ центр тяжести[3] его G-орбиты в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$:

$$v^\natural \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} gv , \tag{5-12}$$

Упражнение 5.14. Убедитесь прямым вычислением, что при $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$ оператор $v \mapsto v^\natural$ перестановочен с действием G и линейно проектирует V на V^G, а также

---

[1] в том числе неабелевой

[2] на самом деле двойственность Понтрягина имеет место для всех локально компактных топологических абелевых групп, и конечные абелевы группы являются лишь простейшими примерами таких групп

[3] если $|G| \vdots \mathrm{char}(\Bbbk)$, то сумма весов элементов орбиты нулевая, и центр тяжести не определён корректно

приведите пример конечной группы G и неразложимого G-модуля V над конечным полем $\Bbbk$, имеющего ненулевой подмодуль инвариантов V^G.

Теорема 5.3

Любое линейное представление V конечной группы G над полем, характеристика которого не делит $|G|$, вполне приводимо[1].

Доказательство. Покажем, что любой G-подмодуль $U \subset V$ является образом G-инвариантного проектора. Группа G действует на пространстве всех линейных операторов $\mathrm{Hom}(V, U)$ по правилу $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$. Достаточно убедиться в том, что проекция

$$\varphi \mapsto \varphi^{\natural} = |G|^{-1} \sum_{g} g\varphi g^{-1}$$

на инварианты этого действия переводит любой проектор $\pi : V \twoheadrightarrow U$ тоже в проектор V на U. Поскольку $g\pi g^{-1} U \subset U$ для всех $g \in G$, образ $\mathrm{im}\, \pi^{\natural} \subset U$. С другой стороны, любой вектор $u \in U$ неподвижен относительно $\pi^{\natural}$, т. к. $g^{-1}U \subset U$ и $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$ влекут $g\pi g^{-1} u = g g^{-1} u = u$. □

5.5. Групповая алгебра. С каждой группой G канонически связана ассоциативная алгебра $\Bbbk[G]$, которая называется *групповой алгеброй* группы G над полем $\Bbbk$ и представляет собою векторное пространство с базисом G, т. е. состоит из всевозможных формальных линейных комбинаций $\sum\limits_{g \in G} c_g\, g$ элементов группы с произвольными коэффициентами $c_g \in \Bbbk$, из которых только конечное число отлично от нуля. Сложение и умножение таких выражений происходит по стандартным правилам раскрытия скобок. При этом константы c_g по определению коммутируют с элементами группы и перемножаются так, как это происходит в поле $\Bbbk$, а элементы группы перемножаются согласно имеющемуся в группе закону композиции, т. е.

$$\begin{gathered} \Big(\sum_g a_g g\Big) \Big(\sum_h b_h h\Big) = \sum_{gh} a_g b_h gh = \sum_f c_f f\,, \\ \text{где} \quad c_f = \sum_{gh=f} a_g b_h = \sum_t a_{ft^{-1}} b_t = \sum_s a_s b_{s^{-1}f}\,. \end{gathered} \tag{5-13}$$

Группа G вложена в алгебру $\Bbbk[G]$ в качестве мультипликативной подгруппы. Всякое линейное представление $G \to \mathrm{GL}(V)$ канонически продолжается по линейности до представления групповой алгебры $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$, образ которого является одновременно и линейной, и ассоциативной оболочкой всех операторов из группы G.

Упражнение 5.15. Убедитесь, что правило $m \mapsto t^m$ задаёт изоморфизмы

$$\Bbbk[\mathbb{Z}] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[t, t^{-1}] \qquad \text{и} \qquad \Bbbk[\mathbb{Z}/(n)] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[t]/(t^n - 1)\,.$$

---

[1] т. е. является прямой суммой простых G-модулей

Важным элементом групповой алгебры является оператор усреднения

$$\pi_{\mathbb{1}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} g \in \Bbbk[G]\,, \tag{5-14}$$

образ которого в каждом линейном представлении $\varrho : \Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ является проектором (5-12) на подмодуль $V^G \subset V$ инвариантов представления ϱ.

Упражнение 5.16. Покажите, что элемент (5-14) лежит в центре[1] алгебры $\Bbbk[G]$.

5.5.1. Центр групповой алгебры конечной группы G

$$Z(\Bbbk[G]) \overset{\text{def}}{=} \{z \in \Bbbk[G] \mid \forall\, x \in \Bbbk[G]\ zx = xz\} = \{z \in \Bbbk[G] \mid \forall\, g \in G\ gzg^{-1} = z\}$$

состоит из всех таких линейных комбинаций $z = \sum\limits_h z_h h \in \Bbbk[G]$, коэффициенты которых z_h постоянны на классах сопряжённости. Поэтому элементы

$$z_C = \sum_{h\in C} h\,, \tag{5-15}$$

где C пробегает множество $\mathrm{Cl}(G)$ классов сопряжённости группы G, образуют базис $Z(\Bbbk[G])$ как векторного пространства над $\Bbbk$. В частности,

$$\dim_{\Bbbk} Z(\Bbbk[G]) = |\mathrm{Cl}(G)|\,.$$

Мы будем называть это число *числом классов*. Отметим, что

В каждом линейном представлении $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ все центральные элементы групповой алгебры переходят в операторы из $\mathrm{End}_G(V)$. В частности, в любом неприводимом представлении над алгебраически замкнутым полем все центральные элементы действуют умножениями на скаляры.

5.5.2. Изотипные разложения. Пусть G — конечная группа. Фиксируем такое множество $\mathrm{Ir}(G)$ неприводимых представлений группы G, чтобы каждый неприводимый G-модуль был изоморфен одному и только одному представлению из $\mathrm{Ir}(G)$. Мы обозначаем представления из $\mathrm{Ir}(G)$ через $\lambda : G \to \mathrm{GL}(U_\lambda)$ и пишем $\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$ или $U_\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$. По теор. 5.3 и предл. 5.4 на стр. 83 каждый конечномерный G-модуль V обладает *изотипным разложением*

$$V = \bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Ir}(G)} V_\lambda\,, \tag{5-16}$$

каждая компонента V_λ которого является суммой всех простых подмодулей, изоморфных данному $U_\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$, и является образом канонической свёртки

$$c : \mathrm{Hom}_G(U_\lambda, W) \otimes U_\lambda \to V\,, \quad \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u)\,. \tag{5-17}$$

---

[1] напомню, что *центром* кольца или группы K называется множество всех элементов, мультипликативно коммутирующих со всеми элементами K

В любом разложении V в прямую сумму простых G-модулей сумма всех изоморфных U_λ слагаемых совпадает с V_λ, и их количество $m_\lambda(V) = \dim V_\lambda / \dim U_\lambda$ называется *кратностью* неприводимого представления λ в представлении V. Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, каноническая свёртка (5-17) является изоморфизмом на изотипную компоненту V_λ, и для любых двух представлений V и W группы G

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} m_\lambda(V)\, m_\lambda(W) = \dim \mathrm{Hom}_G(W, V)\,. \tag{5-18}$$

Пример 5.3 (левое регулярное представление)
Для каждого $\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$ обозначим через $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ λ-изотипную компоненту *левого регулярного представления* $g : x \mapsto gx$ группы G в $\Bbbk[G]$. Таким образом,

$$\Bbbk[G] = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} I_\lambda\,. \tag{5-19}$$

Будучи G-подмодулем левого регулярного представления, изотипная компонента I_λ является левым идеалом алгебры $\Bbbk[G]$, а т. к. правое умножение на любой элемент $h : x \to xh$ является G-автоморфизмом левого регулярного представления[1] и, тем самым, переводит каждую изотипную компоненту I_λ в себя, все I_λ являются также и правыми, а значит, двусторонними идеалами алгебры $\Bbbk[G]$. Так как $I_\lambda \cap I_\varrho = 0$ при $\lambda \neq \varrho$, и $I_\lambda \cdot I_\varrho \subset I_\lambda \cap I_\varrho$, мы получаем *соотношения ортогональности*

$$I_\lambda \cdot I_\varrho = 0 \quad \text{при} \quad \lambda \neq \varrho\,. \tag{5-20}$$

Упражнение 5.17. Докажите, что I_λ являются минимальными по включению ненулевыми двусторонними идеалами алгебры $\Bbbk[G]$, и что все двусторонние идеалы групповой алгебры исчерпываются прямыми суммами идеалов I_λ.

Лемма 5.3
Любое представление $\varrho : \Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$, не содержащее в своём разложении неприводимого представления λ, переводит изотипный идеал $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ в нуль.

Доказательство. Поскольку I_λ является левым идеалом в $\Bbbk[G]$, для любого $v \in V$ подпространство $I_\lambda \cdot v = \{fv \mid f \in I_\lambda\}$ является G-подмодулем в V, и правило $f \mapsto fv$ задаёт сюрьективный гомоморфизм G-модулей $I_\lambda \twoheadrightarrow I_\lambda \cdot v$. Поскольку такой гомоморфизм переводит λ-изотипный подмодуль в λ-изотипный, подмодуль $I_\lambda \cdot v$ содержится в изотипной компоненте V_λ представления V. Если она нулевая, то $I_\lambda \cdot v = 0$ для всех $v \in V$. □

---

[1] ибо левое и правое умножение на любые два фиксированных элемента группы перестановочны друг с другом (обязательно продумайте это)

Теорема 5.4 (теорема Машке)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ гомоморфизм алгебр

$$\mathfrak{rep}\,:\,\Bbbk[G]\to\prod_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)}\mathrm{End}(U_\lambda)\,,\tag{5-21}$$

переводящий элемент $f\in\Bbbk[G]$ в набор операторов, которыми этот элемент действует во всех неприводимых представлениях группы G, является изоморфизмом алгебр. Его ограничение на изотипный идеал $I_\lambda\subset\Bbbk[G]$ является изоморфизмом I_λ на матричную алгебру $\mathrm{End}(U_\lambda)$.

Доказательство. Сначала установим инъективность гомоморфизма $\mathfrak{rep}$. Если элемент $h\in\Bbbk[G]$ действует нулевым оператором во всех неприводимых представлениях, то он действует нулевым оператором вообще на любом конечномерном G-модуле, в частности — в левом регулярном представлении. Но $f\cdot 1=0$ влечёт $f=0$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что по лем. 5.3 каждое неприводимое представление $\lambda\,:\,\Bbbk[G]\to\mathrm{End}(U_\lambda)$ отображает в нуль все прямые слагаемые разложения (5-19) за исключением I_λ. Однако по теореме Бернсайда[1] оно эпиморфно. Поэтому ограничение $\mathfrak{rep}\,|_{I_\lambda}\,:\,I_\lambda\xrightarrow{\sim}\mathrm{End}(U_\lambda)$ является изоморфизмом. Отсюда сразу следует, что неприводимых представлений U_λ имеется лишь конечное число и каждое из них присутствует в изотипном разложении (5-19) левого регулярного представления с кратностью $m_\lambda(\Bbbk[G])=\dim(I_\lambda)/\dim(U_\lambda)=\dim\mathrm{End}(U_\lambda)/\dim U_\lambda=\dim U_\lambda$. Для доказательства сюрьективности гомоморфизма $\mathfrak{rep}$ остаётся заметить, что по уже доказанному для любого набора операторов $\varphi_\lambda\in\mathrm{End}(U_\lambda)$ найдутся такие элементы $f_\lambda\in I_\lambda$, что $\lambda(f_\lambda)=\varphi_\lambda$. Поскольку $\varrho(f_\lambda)=0$ для всех неприводимых $\varrho\neq\lambda$, $\mathfrak{rep}(\sum\limits_\lambda f_\lambda)=\prod\limits_\lambda\varphi_\lambda$. ☐

Следствие 5.6
Число неприводимых представлений конечной группы G над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$, характеристика которого не делит $|G|$, конечно и равно числу классов сопряжённости $|\mathrm{Cl}(G)|$ группы G, а сумма квадратов размерностей всех неприводимых равна порядку $|G|$. При этом $m_\lambda(\Bbbk[G])=\dim U_\lambda$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из того, что размерность центра прямой суммы матричных алгебр равна количеству слагаемых, второе — из равенства размерностей правого и левого пространств в (5-21). ☐

Пример 5.4 (простенькие представления симметрических групп)
Сопоставление перестановке $g\in S_n$ её циклового типа устанавливает биекцию между классами сопряжённых элементов в S_n и n-клеточными диаграммами Юнга[2]. Таким образом, неприводимые представления симметрической

---

[1] см. сл. 5.4 на стр. 82

[2] длины строк диаграммы суть длины независимых циклов, на которые раскладывается перестановка

группы S_n биективно соответствуют n-клеточным диаграммам Юнга. У каждой симметрической группы S_n есть два одномерных представления: тривиальное и *знаковое*, в котором перестановка σ действует умножением на знак $\operatorname{sgn}(\sigma)$. Если характеристика поля не делит n, операторы симметризации и альтернирования

$$\operatorname{sym}_n = \frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} g \quad \text{и} \quad \operatorname{alt}_n = \frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, g$$

являются S_n-инвариантными проекторами на тривиальную и знаковую изотипные компоненты любого S_n-модуля.

Упражнение 5.18. Убедитесь в этом.

Тавтологическое n-мерное представление S_n перестановками стандартных базисных векторов e_i пространства $\Bbbk^n$ имеет тривиальный одномерный подмодуль, порождённый вектором $e = \sum e_i$. Индуцированное $(n-1)$-мерное представление в фактор пространстве $\Bbbk^n / \Bbbk \cdot e$ называется *симплициальным*[1], поскольку над полем $\mathbb{R}$ его образ представляет собою несобственную группу правильного $(n-1)$-мерного симплекса в $\mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n / \mathbb{R}\cdot e$ с центром в нуле и вершинами в классах векторов e_i по модулю e.

Упражнение 5.19. Покажите, что симплициальное представление неприводимо.

Неприводимые представления группы S_3, имеющей ровно три класса сопряжённости, исчерпываются тривиальным и знаковым одномерными представлениями и двумерным представлением U_Δ группой треугольника, т. к. $1^2+1^2+2^2 = 6$. Инвариантный проектор на U_Δ-изотипную компоненту любого представления задаётся оператором

$$\pi_\Delta \overset{\text{def}}{=} 1 - \frac{1}{6}\sum_{g\in S_3}(1+\operatorname{sgn}(g))g = 1 - \frac{1}{3}\left(1+\tau+\tau^2\right)\,,$$

где $\tau = |123\rangle \in S_3$ это цикл длины 3.

Упражнение 5.20. Проверьте прямым вычислением в групповой алгебре, что π_Δ лежит в $Z\big(\Bbbk(S_3)\big)$, идемпотентен, аннулирует тривиальный и знаковый модули и действует тождественным оператором в представлении группой треугольника.

У группы S_4, имеющей 5 классов сопряжённости, кроме одномерного тривиального, одномерного знакового и 3-мерного представления несобственной группой тетраэдра имеется ещё одно трёхмерное представление собственной группой куба, а также двумерное представление группой треугольника, возникающее из факторизации $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ по подгруппе Клейна $D_2 \subset S_4$. Равенство $2\cdot 1^2 + 2\cdot 3^2 + 2^2 = 24$ указывает на то, что это хорошие кандидаты на полный список неприводимых представлений.

Упражнение 5.21. Покажите, что два трёхмерных представления не изоморфны и получаются одно из другого тензорным умножением на знаковое представление.

---

[1] при $n = 2$ оно совпадает со знаковым

5.6. Представления Шура полной линейной группы. Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле характеристики нуль, а V ненулевое конечномерное векторное пространство над $\Bbbk$. Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах. Изотипное разложение этого представления

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Ir}(S_n)} W_\lambda \tag{5-22}$$

называется разложением по *типам симметрии* тензоров. Про тензоры, лежащие в изотипной компоненте W_λ, говорят, что они имеют тип симметрии λ.

Пример 5.5 (квадратичные и кубические тензоры)
Два неприводимых представления группы $S_2 \simeq \mathbb{Z}/(2)$ задают разложение тензорного квадрата $V^{\otimes 2} = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Skew}^2(V)$. Группа S_2 действует на первом слагаемом тривиально, на втором — знакопеременно. Трём неприводимым представлениям S_3: тривиальному, знаковому и группой треугольника отвечает разложение

$$V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3(V) \oplus \mathrm{Skew}^3(V) \oplus W_\Delta\,, \tag{5-23}$$

компоненты которого являются образами S_3-инвариантных проекторов sym_3, alt_3 и π_Δ из прим. 5.4. Пространство неподвижных тензоров последнего

$$W_\Delta = \{t \in V^{\otimes 3} \mid t + \tau t + \tau^2 t = 0\}$$

состоит из всех кубических тензоров, которые аннулируются усреднением по 3-циклу. Такие тензоры называются *лиевскими*[1], а соотношение $t+\tau t+\tau^2 t = 0$, которому они удовлетворяют, называется *тождеством Якоби*. S_3-орбита каждого лиевского тензора порождает в $V^{\otimes 3}$ двумерное векторное пространство, на котором S_3 действует как группа треугольника. Примером лиевского тензора служит

$$[u,[u,w]] = u \otimes u \otimes w - 2\,u \otimes w \otimes u + w \otimes u \otimes u\,,$$

где $u, w \in V$ — линейно независимые векторы, а $[a,b] \overset{\text{def}}{=} a\otimes b - b\otimes a$ обозначает коммутатор в тензорной алгебре $T(V)$.

Упражнение 5.22. Покажите, что подпространство $W_\Delta \subset V^{\otimes 3}$ является линейной оболочкой всех кубических тензоров, которые можно получить из векторов пространства V при помощи бинарной операции взятия коммутатора в $T(V)$.

5.6.1. Действие $\mathbf{GL}(V)\times S_n$ на $V^{\otimes n}$. Гомоморфизм групп $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}\left(V^{\otimes n}\right)$, переводящий $f \in \mathrm{GL}(V)$ в $f^{\otimes n}$, задаёт представление полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ в пространстве $V^{\otimes n}$, в котором оператор $f \in \mathrm{GL}(V)$ действует на разложимые тензоры по правилу $f : v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f v_1 \otimes f v_2 \otimes \cdots \otimes f v_n$. Так

---

[1] в честь норвежского математика Софуса Ли

как это действие перестановочно с действием симметрической группы, пространство $V^{\otimes n}$ является модулем над прямым произведением групп $\mathrm{GL}(V)\times S_n$: элемент $f\times g\in \mathrm{GL}(V)\times S_n$ действует на нём оператором

$$v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_n\mapsto f\left(v_{g(1)}\right)\otimes f\left(v_{g(2)}\right)\otimes\cdots\otimes f\left(v_{g(n)}\right).$$

Будучи перестановочными с S_n, операторы из $\mathrm{GL}(V)$ переводят в себя каждую изотипную компоненту разложения $V^{\otimes n}=\bigoplus W_\lambda$ по типам симметрии тензоров. Поэтому каждое пространство W_λ тоже является модулем над $\mathrm{GL}(V)\times S_n$.

Для каждого неприводимого S_n-модуля U_λ тензорное произведение

$$\mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda,V^{\otimes n}\right)\otimes U_\lambda$$

тоже является $\mathrm{GL}(V)\times S_n$-модулем с действием $f\times g\,:\,\varphi\otimes u\mapsto (f^{\otimes n}\circ\varphi)\otimes(gu)$. По предл. 5.3 свёртка $\varphi\otimes u\mapsto\varphi(u)$ задаёт изоморфизм[1]

$$c\,:\,\mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda,V^{\otimes n}\right)\otimes U_\lambda\xrightarrow{\sim}W_\lambda\,,\tag{5-24}$$

очевидно перестановочный с действием $\mathrm{GL}(V)\times S_n$. Пространство

$$\mathbb{S}^\lambda V\overset{\text{def}}{=}\mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda,V^{\otimes n}\right)\tag{5-25}$$

с действием $\mathrm{GL}(V)$ по правилу $f\,:\,\varphi\mapsto f^{\otimes n}\circ\varphi$ называется *модулем Шура* над полной линейной группой $\mathrm{GL}(V)$.

Лемма 5.4

Линейная оболочка операторов вида $f^{\otimes n}$ с $f\in\mathrm{GL}(V)$ совпадает с централизатором $\mathrm{End}_{S_n}\left(V^{\otimes n}\right)$ действия S_n на $V^{\otimes n}$.

Доказательство. Цепочка канонических изоморфизмов

$$\mathrm{End}(V^{\otimes n})\simeq V^{\otimes n^*}\otimes V^{\otimes n}\simeq V^{*\otimes n}\otimes V^{\otimes n}\simeq\left(V^*\otimes V\right)^{\otimes n}\simeq\mathrm{End}(V)^{\otimes n}$$

отождествляет подалгебру $\mathrm{End}_{S_n}\left(V^{\otimes n}\right)\subset\mathrm{End}\left(V^{\otimes n}\right)$ с подпространством симметрических тензоров $\mathrm{Sym}^n\left(\mathrm{End}(V)\right)\subset\mathrm{End}(V)^{\otimes n}$, которое линейно порождается тензорами вида $f^{\otimes n}$ с $f\in\mathrm{GL}(V)$ в силу следующего общего принципа:

Упражнение 5.23 (принцип Аронгольда). Покажите, что для любого конечномерного векторного пространства W над произвольным бесконечным полем пространство симметрических тензоров $\mathrm{Sym}^n(W)\subset W^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами вида $w^{\otimes n}=w\otimes w\otimes\cdots\otimes w$.

Упражнение 5.24 (усиленный принцип Аронгольда). В условиях упр. 5.23 покажите, что для любого ненулевого многочлена F на W пространство $\mathrm{Sym}^n(W)$ линейно порождается тензорами $w^{\otimes n}$ с $F(w)\neq 0$.

Применяя усиленный принцип Аронгольда к $W=\mathrm{End}(V)$ и $F=\det$, получаем утверждение леммы. □

---

[1] строго говоря, предл. 5.3 утверждает это над алгебраически замкнутым полем, однако мы увидим ниже, что все комплексные неприводимые представления S_n определены над $\mathbb{Q}$, так что для симметрических групп предл. 5.3 справедливо над $\mathbb{Q}$

Предложение 5.5
Все $\mathrm{GL}(V)$-модули Шура $\mathbb{S}^\lambda V = \mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda, V^{\otimes n}\right)$ неприводимы.

Доказательство. Изоморфизм $\mathbb{S}^\lambda V \otimes U_\lambda \xrightarrow{\sim} W_\lambda$ из формулы (5-24) переводит действие S_n на W_λ в действие $g : \varphi \otimes u \mapsto \varphi \otimes (gu)$. Каждый линейный оператор $F \in \mathrm{End}(\mathbb{S}^\lambda V)$ задаёт линейное преобразование $F : \varphi \otimes u \mapsto F(\varphi) \otimes u$ пространства $\mathbb{S}^\lambda V \otimes U_\lambda$, перестановочное с действием S_n. По лем. 5.4 оно лежит в линейной оболочке операторов $f : \varphi \otimes u \mapsto \left(f^{\otimes n} \circ \varphi\right) \otimes u$. Следовательно, образ представления Шура $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}\left(\mathbb{S}^\lambda V\right)$ линейно порождает всю алгебру эндоморфизмов $\mathrm{End}\left(\mathbb{S}^\lambda V\right)$ пространства $\mathbb{S}^\lambda(V)$. По упр. 5.7 такое представление неприводимо. □

5.6.2. Соответствие Шура – Вейля. Соответствие $U_\lambda \leftrightarrow \mathbb{S}^\lambda V$ между неприводимыми представлениями симметрических групп[1] и неприводимыми представлениями полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ называется *соответствием Шура – Вейля*. Тривиальному одномерному представлению группы S_n при этом отвечает представление $\mathrm{GL}(V)$ на пространстве $S^n V$, а одномерному знаковому представлению — представление $\mathrm{GL}(V)$ на пространстве $\Lambda^n V$. Можно показать, что ненулевые $\mathrm{GL}(V)$-модули $\mathbb{S}^\lambda V$ не изоморфны друг другу при разных λ и с точностью до тензорных умножений на одномерные представления $\det^m : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}_1(\Bbbk)$, где $f \in \mathrm{GL}(V)$ действует умножением на $\det^m(f)$, ими исчерпываются все такие конечномерные неприводимые представления $\varrho : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(W)$, в которых элементы матрицы $\varrho(f)$ являются рациональными функциями элементов матрицы f.

Задачи для самостоятельного решения к §5

Задача 5.1. Постройте приводимое неразложимое двумерное линейное представление аддитивной группы $\mathbb{Z}$.

Задача 5.2. Покажите, что каждая конечномерная ассоциативная алгебра с единицей и без делителей нуля является алгеброй с делением[2].

Задача 5.3. Ассоциативная алгебра называется *полупростой*, если она является полупростым левым модулем над собою. Покажите, что конечномерная как векторное пространство коммутативная алгебра полупроста тогда и только тогда, когда в ней нет нильпотентных элементов.

Задача 5.4. Опишите все ассоциативные $\mathbb{R}$-подалгебры с единицей размерности > 31 в $\mathrm{Mat}_{6\times 6}(\mathbb{R})$.

Задача 5.5 (характеры линейных представлений). Пусть имеется линейное представления $\varrho : M \to \mathrm{End}(V)$ множества операторов M в конечномерном векторном про-

---

[1] обратите внимание, что количество клеток n в диаграмме λ никак не связано с размерностью пространства V и может быть любым, однако некоторые пространства $\mathbb{S}^\lambda V$ при этом могут оказаться нулевыми, как это происходит, к примеру, с внешними степенями $\Lambda^n V$ при $n > \dim V$

[2] т. е. у каждого ненулевого элемента a есть двусторонний обратный a^{-1}: $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

странстве V над полем $\Bbbk$. Функция $M \to \Bbbk$, $g \mapsto \operatorname{tr} \varrho(g)$, называется *характером* этого представления и обозначается χ_ϱ или χ_V. Выразите через характеры χ_U и χ_W представлений U и W конечной группы G характер представления

а) $U \oplus W$ б) $U \otimes W$ в) U^* г) $\operatorname{Hom}(U, W)$

Задача 5.6. В условиях предыдущей задачи покажите, что

а) $\chi_{S^2U}(g) = \big(\chi_U^2(g) + \chi_U(g^2)\big)/2$ б) $\chi_{\Lambda^2U}(g) = \big(\chi_U^2(g) - \chi_U(g^2)\big)/2$.

Задача 5.7. Пусть образ d-мерного линейного представления ϱ лежит в $\mathrm{SL}(V)$. Докажите, что представления $\Lambda^k\varrho$ и $\Lambda^{d-k}\varrho$ изоморфны для всех $0 \leqslant k \leqslant d$.

Задача 5.8 (формула Молина). Для любого представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ конечной группы G над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль обозначим через

$$S_G^m \overset{\text{def}}{=} \{\, f \in S^mV^* \mid \forall g \in G\, \forall v \in V\ f(gv) = f(v)\,\}$$

пространство G инвариантных однородных полиномов степени m на пространстве V. Докажите, что производящая функция для размерностей $d_m = \dim \mathrm{Sym}_G^m(V)$ имеет вид

$$\sum_{m\geqslant 0} d_m t^m = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det(1 - t\,\varrho(g))}\,.$$

Задача 5.9. Пусть конечная группа G действует на пространстве $V = \Bbbk^n$ перестановками базисных векторов. Покажите что значение характера $\chi_V(g)$ равно числу неподвижных точек перестановки g.

Задача 5.10 (представления группы треугольника). Используя соотношения между стандартными образующими[1] σ и τ группы треугольника $D_3 \simeq S_3$ выясните, какими могут быть собственные значения операторов $\varrho(\sigma)$ и $\varrho(\tau)$ в произвольном линейном представлении $\varrho : D_3 \to \mathrm{GL}(W)$, и покажите, что оператор симметрии переводит множество собственных векторов оператора поворота в себя. Выведите из этого, что комплексные неприводимые представления группы $D_3 \simeq S_3$ исчерпываются стандартным двумерным представлением $V \simeq \mathbb{C}^2$ и двумя одномерными: тривиальным и знаковым[2]. Для двумерного неприводимого представления V покажите, что $S^{n+6}(V) = S^n(V) \oplus R$, где $R \simeq \Bbbk$ — регулярное представление, и получите разложение $S^n(V)$ в сумму неприводимых представлений.

Задача 5.11* (взаимность Шура). В обозначениях предыдущей задачи покажите, что $S^k\left(S^m(V)\right) \simeq S^m\left(S^k(V)\right)$ при всех k, m как D_3-модули.

Задача 5.12. Опишите все неприводимые представления группы диэдра D_n и вычислите их характеры.

Задача 5.13. Вычислите характеры представлений симметрической группы S_4: тривиального, знакового, двумерного через эпиморфизм на группу треугольника и двух трёхмерных — собственной группой куба и несобственной группой тетраэдра. Есть ли среди них приводимые? А изоморфные? Опишите все неприводимые представ-

---

[1] напомню, что σ — это симметрия, а τ — поворот

[2] в котором каждая перестановка $\sigma \in S_3$ действует умножением на свой знак

ления S_4 и выясните как они раскладываются на неприводимые представления подгруппы S_3, вложенной в S_4 как стабилизатор 4-го элемента.

Задача 5.14. Опишите все неприводимые представления знакопеременной группы A_4, вычислите их характеры и выясните, как неприводимые представления S_4 раскладываются на неприводимые при ограничении на A_4.

Задача 5.15. Разложите в сумму неприводимых представление собственной группы куба в пространстве $\mathbb{C}$-значных функций на множестве его а) вершин б) рёбер в) граней.

Задача 5.16. Линейный оператор s из пространства комплекснозначных функций на рёбрах куба в пространство комплекснозначных функций на его гранях сопоставляет функции f функцию sf, значение которой на грани равно сумме значений f на ограничивающих эту грань рёбрах. Найдите размерности ядра и образа оператора s и явно укажите в них какие-нибудь базисы.

Задача 5.17. На гранях куба написали числа $1, 2, 3, 4, 5, 6$, как на игральной кости. За один ход каждое из них заменяют на среднее арифметическое чисел, стоящих на четырёх соседних гранях. Вычислите с точностью до второго знака после запятой, что будет написано на гранях после 2006 ходов. Изменится ли ответ, если числа расставить на гранях по-другому?

Задача 5.18. Найдите размерности, вычислите характеры и разложите на приводимые следующие представления симметрической группы S_5: а) тривиальное U, знаковое U', симплициальное V, $V' = V \otimes U'$, $\Lambda^2 V$ и $S^2 V$ б) представление W в функциях на $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$ с нулевой суммой значений, заданное посредством изоморфизма $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \xrightarrow{\sim} S_5$, и $W' = W \otimes U'$ в) $S^2 W$, $\Lambda^2 W$ и $V \otimes W$.

Задача 5.19. Опишите все неприводимые представления группы икосаэдра A_5, вычислите их характеры и выясните, как раскладываются ограничения на A_5 неприводимых представлений S_5.

Задача 5.20. Решите аналог зад. 5.15 для собственной группы икосаэдра.

Задача 5.21. Линейный оператор s из пространства комплекснозначных функций на гранях икосаэдра в пространство комплекснозначных функций на его вершинах сопоставляет функции f функцию sf, значение которой в вершине v равно сумме значений f на пяти примыкающих к этой вершине гранях. Найдите размерности ядра и образа оператора s и явно укажите в них какие-нибудь базисы.

Задача 5.22*. Опишите все конечные подгруппы в $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ с точностью до сопряжения.

Задача 5.23. Составьте таблицы неприводимых характеров а) группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ б) группы Гейзенберга $H(\mathbb{F}_3) \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3)$ верхних унитреугольных матриц в) группы кватернионных единиц $Q_8 = \{\pm\mathbf{1}, \pm\boldsymbol{i}, \pm\boldsymbol{j}, \pm\boldsymbol{k}\}$.

Задача 5.24. Покажите, что в каждом конечномерном представлении конечной группы G над полем $\mathbb{R}$ можно ввести G-инвариантную евклидову структуру, а над полем $\mathbb{C}$ — G-инвариантную эрмитову структуру.

Задача 5.25. Зафиксируем в каждом комплексном неприводимом представлении группы G какую-нибудь G-инвариантную эрмитову структуру и ортонормальный базис, так что элементы g запишутся в этих базисах унитарными матрицами. Матричные элементы всех этих матриц образуют систему векторов в пространстве $\mathbb{C}^G$ всех функций $f : G \to \mathbb{C}$. Вычислите матрицу Грама этой системы векторов относительно стандартного скалярного произведения $(f_1, f_2) = |G|^{-1} \sum\limits_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}$ на $\mathbb{C}^G$.

§6. Представления конечных групп.

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что G — конечная группа, а $\Bbbk$ — алгебраически замкнутое поле с $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$.

6.1. Скалярное произведение и базисные идемпотенты. Левое регулярное представление $L : \Bbbk[G] \hookrightarrow \mathrm{End}(\Bbbk[G])$ инъективно вкладывает групповую алгебру в алгебру линейных эндоморфизмов векторного пространства $\Bbbk[G]$. На последней имеется каноническая симметричная билинейная форма — след композиции.

Упражнение 6.1. Убедитесь, что значение билинейной формы $\mathrm{tr}(AB)$ на паре разложимых операторов $A = \alpha \otimes a$ и $B = \beta \otimes b$ равно $\alpha(b) \cdot \beta(a)$, откуда вытекает и симметричность и невырожденность.

Ограничение этой формы на $L(\Bbbk[G])$ задаёт на $\Bbbk[G]$ симметричное скалярное произведение

$$(f, g) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{tr}\left(L_f L_g\right) = \mathrm{tr}\left(L_{fg}\right) . \tag{6-1}$$

Поскольку след левого умножения на единицу группы равен $|G|$, а умножение на любой другой элемент группы бесследно, скалярные произведения элементов группы задаются формулой

$$(g, h) = \begin{cases} |G| & \text{при } h = g^{-1} \\ 0 & \text{при } h \neq g^{-1}. \end{cases} \tag{6-2}$$

Таким образом, скалярное произведение невырождено[1], и двойственным базисом к базису из групповых элементов g является базис из элементов $g^* = g^{-1}/|G|$. В частности, каждый элемент $z \in \Bbbk[G]$ разлагается по базису из групповых элементов в виде

$$z = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g^{-1}, z) \cdot g \tag{6-3}$$

Упражнение 6.2. Покажите, что левое и правое умножение на заданный элемент сопряжены другу другу относительно скалярного произведения: $(fg, h) = (f, gh)$ и выведите отсюда, что ортогональное дополнение к любому левому идеалу в $\Bbbk[G]$ является правым идеалом, а ортогональное дополнение к правому — левым[2].

Изоморфизм $\mathfrak{rep} : \Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$ из теоремы Машке[3] позволяет вычислять скалярные произведения (6-1) в терминах следов действия элементов в неприводимых представлениях.

---

[1] отметим, что если характеристика поля делит порядок группы, то это не так

[2] тем самым, ортогональное дополнение к любому двустороннему идеалу тоже двусторонний идеал

[3] см. теор. 5.4 на стр. 90

Предложение 6.1 (формула Планшереля)
Для любых $f, g \in \Bbbk[G]$ $\quad (f,g) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \dim\left(U_\lambda\right) \cdot \mathrm{tr}\big(\lambda(fg)\big)$.

Доказательство. Вычислим $\mathrm{tr}\left(L_{fg}\right)$ в алгебре $\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$. Он равен сумме по всем неприводимым представлениям λ следов левого умножения на $\lambda(fg)$ в $\mathrm{End}(U_\lambda)$. След левого умножения на матрицу M в матричной алгебре $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ равен $n \cdot \mathrm{tr}(M)$, поскольку каждая матричная единица E_{ij} входит в ME_{ij} с коэффициентом m_{ii}. □

Определение 6.1 (базисные идемпотенты)
Элементы $e_\lambda = \mathfrak{rep}^{-1}\left(0\ \dots\ , 0, \mathrm{Id}_{U_\lambda}, 0, \ \dots\ 0\right) \in I_\lambda \subset \Bbbk[G]$, действующие тождественным оператором в неприводимом представлении λ и нулевым оператором во всех остальных неприводимых представлениях называются *базисными*[1] *идемпотентами*. Они образуют базис в центре групповой алгебры и перемножаются по правилам

$$e_\lambda e_\varrho = \begin{cases} e_\lambda & \text{при } \varrho = \lambda \\ 0 & \text{при } \varrho \neq \lambda\,. \end{cases} \tag{6-4}$$

В любом представлении $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ каждый из неприводимых идемпотентов e_λ действует как G-инвариантный проектор на λ-изотипную компоненту $V_\lambda \subset V$.

Упражнение 6.3. Проверьте, что главный левый идеал $\Bbbk[G] \cdot e_\lambda$ является минимальным (по включению) левым идеалом и как G-модуль (относительно действия G умножениями слева) изоморфен неприводимому представлению U_λ. Покажите также, что двусторонний идеал, порождённый e_λ, есть I_λ.

Следствие 6.1
Базисные идемпотенты составляют ортогональный базис центра групповой алгебры и имеют скалярные квадраты $(e_\lambda, e_\lambda) = \dim^2 U_\lambda$. □

Следствие 6.2
Разложение $\Bbbk[G] = \bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} I_\lambda$ левого регулярного представления в прямую сумму изотипных подмодулей является *ортогональным* разложением, и неприводимые идемпотенты являются *ортогональными проекциями* единицы $1 \in \Bbbk[G]$ на идеалы I_λ.

Следствие 6.3
Базисный идемпотент e_λ выражается через элементы группы по формуле

$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}\left(\lambda(g^{-1})\right) \cdot g\,, \tag{6-5}$$

---

[1] а также *неприводимыми* или *минимальными*

и каждое представление $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ переводит правую часть этого равенства в G-инвариантный проектор на λ-изотипный подмодуль $V_\lambda \subset V$.

Доказательство. Согласно формуле (6-3) $e_\lambda = |G|^{-1} \sum_{\mu \in \mathrm{Ir}(G)} (g^{-1}, e_\lambda) \cdot g$. По формуле Планшереля $(g^{-1}, e_\lambda) = \sum_{\mu \in \mathrm{Ir}(G)} \dim\left(U_\mu\right) \cdot \mathrm{tr}\left(\mu(g^{-1} e_\lambda)\right) = \dim\left(U_\lambda\right) \cdot \mathrm{tr}\left(\lambda(g^{-1})\right)$, т. к. умножение слева на e_λ аннулирует все неприводимые U_μ с $\mu \neq \lambda$, а на U_λ действует тождественным оператором. □

6.2. Характеры. Линейная форма на $\Bbbk[G]$, сопоставляющая элементам групповой алгебры следы их действия на пространстве V произвольного линейного представления ϱ группы G называется *характером*[1] этого представления и обозначается

$$\chi_\varrho : \Bbbk[G] \to \Bbbk, \quad \chi_\varrho(f) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{tr}\, \varrho(f). \tag{6-6}$$

Так как след оператора не меняется при сопряжении, характер любого представления постоянен на классах сопряжённых элементов, и изоморфные представления имеют равные характеры. Формула (6-5) для проектора на λ-изотипную компоненту переписывается в терминах характеров как

$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\lambda\left(g^{-1}\right) \cdot g, \tag{6-7}$$

Пример 6.1 (характеры перестановочных представлений)
Если группа G действует на векторном пространстве перестановками базисных векторов, то значение характера такого представления на элементе $g \in G$ равно числу неподвижных элементов перестановки g. В частности, характер регулярного представления имеет вид

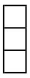
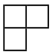
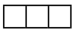
$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G| & \text{если} \quad g = e \\ 0 & \text{если} \quad g \neq e. \end{cases}$$

Значение характера тавтологического представления симметрической группы S_n перестановками базисных векторов координатного пространства $\Bbbk^n$ на перестановке циклового типа λ равно $m_1(\lambda)$, т. е. числу строк длины 1 диаграммы λ. Поскольку это представление является прямой суммой тривиального одномерного, с тождественно единичным характером, и симплициального, мы заключаем, что значение симплициального характера S_n на классе сопряжённости C_λ, состоящем из перестановок циклового типа λ, равно $\chi_\Delta(C_\lambda) = m_1(\lambda) - 1$.

---

[1] не следует путать эти *аддитивные* характеры с мультипликативными характерами абелевых групп, обсуждавшимися в n° 5.4.1 на стр. 85

Упражнение 6.4. Убедитесь, что характеры неприводимых представлений симметрической группы S_3 задаются таблицей

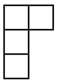
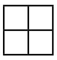
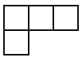
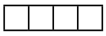
классы			
число элементов	1	3	2
значения характеров:			
тривиального	1	1	1
знакового	1	−1	1
треугольного	2	0	−1

(6-8)

и что проекторы на изотипные копоненты, получающиеся из этой таблицы по формуле (6-7), совпадают с полученными ранее в прим. 5.4 на стр. 90.

Пример 6.2 (неприводимые характеры S_4)

В геометрически заданных представлениях следы можно вычислять складывая собственные значения соответствующих поворотов и отражений. Например, значения характеров пяти представлений симметрической группы S_4 из прим. 5.4 задаются таблицей:

классы					
число элементов	1	6	3	8	6
значения характеров:					
тривиального	1	1	1	1	1
знакового	1	−1	1	1	−1
тетраэдрального	3	1	−1	0	−1
кубического	3	−1	−1	0	1
треугольного	2	0	2	−1	0

(6-9)

четвёртая строка которой объясняется так: след единицы равен размерности представления; одна транспозиция и пара независимых транспозиций действуют поворотами на 180° вокруг прямой, и собственные числа такого вращения суть 1, −1 и −1; цикл длины 3 и цикл длины 4 действуют поворотами на 120° и 90° соответственно, и их собственные числа суть 1, ω, ω^2 и 1, i, $-i$.

Лемма 6.1

Для любых двух представлений V, W группы G с характерами χ_U и χ_V

$$\chi_{V\oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g) \tag{6-10}$$

$$\chi_{V\otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g) \tag{6-11}$$

$$\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) \tag{6-12}$$

$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \chi_V(g^{-1})\chi_W(g) \tag{6-13}$$

Доказательство. Поскольку любой оператор g из конечной группы полупрост, в пространствах V и W имеются базисы $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$ из собственных векторов g. Пусть α_i и β_j — соответствующие наборы собственных чисел. Набор собственных чисел g в представлении $V \oplus W$ получается объединением этих наборов, откуда следует (6-10). Собственными числами g в представлении $V \otimes W$ являются всевозможные попарные произведения $\alpha_i\beta_j$, что даёт (6-11). Формула (6-12) следует из того, что матрица g в двойственном представлении транспонирована к матрице g^{-1} в исходном (см. n° 5.4). Последняя формула следует из двух предыдущих. □

Упражнение 6.5. Докажите, что производящие функции для характеров симметрических и внешних степеней представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ имеют вид:

$$\sum_{\nu\geqslant 0} \chi_{\Lambda^\nu V}(g)\, t^\nu = \det(1 + t\,\varrho(g)) \quad \text{и} \quad \sum_{\nu\geqslant 0} \chi_{S^\nu V}(g)\, t^\nu = \frac{1}{\det(1 - t\,\varrho(g))}\,.$$

Следствие 6.4

Характер любого представления V выражается через неприводимые характеры χ_λ как

$$\chi_V = \sum_{\lambda\in \mathrm{Ir}(G)} m_\lambda(V)\cdot \chi_\lambda \tag{6-14}$$

где $m_\lambda(V) = \dim V_\lambda / \dim U_\lambda$ обозначает кратность простого G-модуля U_λ в V. □

6.2.1. Преобразование Фурье. Поскольку любая линейная форма однозначно задаётся своими значениями на базисных векторах, пространство линейных форм $\Bbbk[G]^*$ естественно отождествляется с пространством $\Bbbk^G$ функций $G \to \Bbbk$, так что функция $\varphi : G \to \Bbbk$ переходит в форму $\varphi(\sum x_g \cdot g) = \sum x_g \varphi(g)$, продолжающую φ по линейности. С другой стороны, скалярное произведение на групповой алгебре задаёт изоморфизм

$$\Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G]^*\,, \quad f \mapsto (f, *)\,, \tag{6-15}$$

сопоставляющий вектору функционал скалярного умножения на этот вектор. Прообразом базиса $\Bbbk[G]^*$, двойственного к базису из элементов группы, при этом является базис из элементов $g^* = g^{-1}/|G|$. Комбинируя эти два отождествления, получаем изоморфизм векторных пространств

$$\Phi : \Bbbk^G \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G]\,, \quad \varphi \mapsto \widehat{\varphi} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \varphi\left(g^{-1}\right)\cdot g\,, \tag{6-16}$$

который иногда называют *преобразованием Фурье*. По форм. (6-7) на стр. 100 оно переводит характеры неприводимых представлений в элементы групповой алгебры, пропорциональные неприводимым идемпотентам:

$$\widehat{\chi_\lambda} = \frac{1}{\dim U_\lambda}\cdot e_\lambda\,. \tag{6-17}$$

Упражнение 6.6. Выясните, в какую операцию на групповой алгебре переходит поточечное умножение значений функций и какая операция над функциями соответствует умножению в групповой алгебре.

Перенесём с помощью изоморфизма (6-16) скалярное произведение из групповой алгебры в пространство функций на группе, т. е. положим

$$(\varphi,\psi) \overset{\text{def}}{=} (\widehat{\varphi},\widehat{\psi}) = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g,h\in G}\varphi\left(g^{-1}\right)\psi\left(h^{-1}\right)(g,h) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi\left(g^{-1}\right)\psi(g) \qquad (6\text{-}18)$$

Из (6-17) и сл. 6.1 немедленно вытекают следующие результаты, полностью сводящие анализ представлений к формальным алгебраическим вычислениям с характерами.

Следствие 6.5
Неприводимые характеры образуют ортонормальный базис в пространстве функций, постоянных на классах сопряжённых элементов. □

Следствие 6.6
Для любых G-модулей V и W $\quad \dim \operatorname{Hom}_G(V,W) = (\chi_V,\chi_W)$.

Доказательство. Обе части равны $\sum\limits_{\lambda\in\operatorname{Ir}(G)} m_\lambda(V)m_\lambda(W)$: левая — по сл. 5.5, правая — в силу сл. 6.4 и ортонормальности характеров. □

Следствие 6.7
Кратность вхождения неприводимого представления U_λ в произвольное представление V равна скалярному произведению их характеров: $m_\lambda(V) = (\chi_\lambda,\chi_V)$.

Доказательство. Скалярно умножаем обе части (6-14) на χ_λ и пользуемся ортонормальностью характеров. □

Следствие 6.8
Представление V неприводимо тогда и только тогда, когда $(\chi_V,\chi_V) = 1$.

Доказательство. Из ортонормальности характеров и сл. 6.4 вытекает, что

$$(\chi_V,\chi_V) = \sum_{\lambda\in\operatorname{Ir}(G)} m_\lambda^2(V),$$

где все $m_\lambda(V)$ целые неотрицательные. Такая сумма равна единице только если она состоит из одного слагаемого, равного единице. □

Упражнение 6.7. Опишите все неприводимые представления и вычислите их характеры для групп: а) D_n б) A_4 в) A_5 г) S_5.

Замечание 6.1. (скалярное произведение комплексных характеров) Комплексные собственные числа всех операторов из конечной группы G являются корнями $|G|$-той степени из единицы. Поэтому следы у обратных друг другу операторов g и g^{-1} комплексно сопряжены, откуда $\chi\left(g^{-1}\right)=\overline{\chi(g)}$ для любого характера χ. Это позволяет переписать скалярное произведение комплексных характеров в виде стандартной эрмитовой структуры:

$$(\chi_1,\chi_2)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_1(g)}\cdot\chi_2(g)\,.$$

Замечание 6.2. (скалярное произведение характеров группы S_n) Взаимно обратные перестановки g, $g^{-1}\in S_n$ сопряжены в S_n, поскольку имеют одинаковый цикловой тип, откуда $\chi\left(g^{-1}\right)=\chi(g)$ для любого характера χ. Это позволяет переписать скалярное произведение характеров симметрической группы виде стандартной евклидовой структуры:

$$(\chi_1,\chi_2)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g)\cdot\chi_2(g)\,.$$

В частности, над полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ оно *положительно определено*.

Пример 6.3 (внешние степени симплициального представления S_n) Покажем, что все внешние степени симплициального представления Δ симметрической группы S_n неприводимы. Поскольку тавтологическое представление τ группы S_n перестановками базисных векторов в $\mathbb{Q}^n$ раскладывается как $\tau=\Delta\oplus\mathbb{1}$, его m-тая внешняя степень $\Lambda^m\tau=\Lambda^m\Delta\oplus\Lambda^{m-1}\Delta$.

Упражнение 6.8. Покажите, что $\Lambda^m(U\oplus W)\simeq\bigoplus\limits_{\alpha+\beta=m}\Lambda^\alpha U\otimes\Lambda^\beta W$.

Достаточно убедиться, что скалярный квадрат $\left(\chi_{\Lambda^m\tau},\chi_{\Lambda^m\tau}\right)=2$. В стандартном базисе $e_I=e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\dots\wedge e_{i_m}$ пространства $\Lambda^m(\mathbb{k}^n)$ след перестановки σ равен сумме знаков $\operatorname{sgn}\sigma|_I$ ограничений перестановки σ на все такие подмножества I, что $\sigma(I)\subset I$. Поэтому

$$\begin{aligned}\left(\chi_{\Lambda^k\tau},\chi_{\Lambda^k\tau}\right)&=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\left(\sum_{I:\sigma(I)\subset I}\operatorname{sgn}(\sigma|_I)\right)\cdot\left(\sum_{J:\sigma(J)\subset J}\operatorname{sgn}(\sigma|_J)\right)=\\&=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{I,J:\substack{\sigma(I)\subset I\\ \sigma(J)\subset J}}\operatorname{sgn}(\sigma|_I)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma|_J)=\frac{1}{n!}\sum_{I,J}\sum_{\sigma:\substack{\sigma(I)\subset I\\ \sigma(J)\subset J}}\operatorname{sgn}(\sigma|_I)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma|_J)\,.\end{aligned}$$

Совокупность всех таких перестановок σ, что $\sigma(I)\subset I$ и $\sigma(J)\subset J$, представляет собою прямое произведение симметрических групп, независимо переставляющих элементы в подмножествах $I\cap J$, $I\smallsetminus(I\cap J)$, $J\smallsetminus(I\cap J)$, $\{1,2,\dots,n\}\smallsetminus(I\cup J)$ и изоморфное $S_k\times S_{m-k}\times S_{m-k}\times S_{n-2m+k}$, где $k=k(I,J)=|I\cap J|$. Поскольку

$\operatorname{sgn}(\sigma|_I)\cdot\operatorname{sgn}(s|_J) = \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\cap J})^2\cdot\operatorname{sgn}(\sigma|_{I\smallsetminus(I\cap J)})\cdot\operatorname{sgn}(\sigma|_{J\smallsetminus(I\cap J)}) = \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\smallsetminus(I\cap J)})\cdot\operatorname{sgn}(\sigma|_{J\smallsetminus(I\cap J)})$, предыдущую сумму можно переписать как

$$\frac{1}{n!}\sum_{I,J} k!\cdot(n-2m+k)!\cdot\left(\sum_{g\in S_{m-k}}\operatorname{sgn}(g)\right)\cdot\left(\sum_{h\in S_{m-k}}\operatorname{sgn}(h)\right). \tag{6-19}$$

Последние две суммы ненулевые только при $k = m$ и $k = m-1$, когда они равны 1. В первом случае $I = J$ и соответствующий кусок суммы (6-19) равен

$$\frac{1}{n!}\sum_{I} m!\cdot(n-m)! = 1\,,$$

ибо состоит из $\binom{n}{m}$ одинаковых слагаемых $\binom{m}{n}^{-1}$. Во втором случае $|I\cap J| = (m-1)$ и соответствующий кусок суммы (6-19) равен

$$\frac{1}{n!}\sum_{I\cap J}\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j\notin I\cap J}}(m-1)!\cdot(n-m-1)!\ ,$$

т. е. представляет собою $\binom{n}{m-1}\cdot(n-m+1)(n-m)$ одинаковых слагаемых вида

$$\frac{(m-1)!\cdot(n-m-1)!}{n!} = \binom{n}{m-1}^{-1}\cdot\frac{1}{(n-m+1)(n-m)}\,,$$

что тоже равно 1.

6.2.2. Кольцо представлений. Целочисленные линейные комбинации неприводимых характеров конечной группы G образуют коммутативное подкольцо с единицей в алгебре $\Bbbk[G]$ всех функций $G\to\Bbbk$ с операциями поточечного сложения и умножения значений. Это подкольцо называется *кольцом представлений* группы G и обозначается

$$\operatorname{Rep}(G) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Irr}(G)}\mathbb{Z}\cdot\chi_\lambda \subset \Bbbk^G\,.$$

Название связано с тем, что в силу предыдущего линейные комбинации неприводимых характеров с неотрицательными коэффициентами взаимно однозначно соответствуют представлениям группы G. При этом сложению и умножению в $\operatorname{Rep}(G)$ отвечают прямая сумма и тензорное произведение соответствующих представлений. Элементы кольца $\operatorname{Rep}(G)$, содержащие отрицательные кратности неприводимых характеров, называются *виртуальными представлениями*.

6.3. Индуцированные представления. Пусть ассоциативная $\Bbbk$-алгебра A с единицей является подалгеброй ассоциативной $\Bbbk$-алгебры B с той же единицей, что и в A. Любое представление W алгебры B одновременно является и представлением алгебры A. Пространство W, рассматриваемое как модуль над A, называется *ограничением* B-модуля W на A и обозначается $\operatorname{res} W$ или $\operatorname{res}_A^B W$, если важно указать, о каких B и A идёт речь. Простейшим примером этой ситуации является овеществление комплексных векторных пространств: если $\Bbbk = A = \mathbb{R}$, а $B = \mathbb{C}$, то n-мерное векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$ может рассматриваться как вещественное векторное пространство $W_{\mathbb{R}} = \operatorname{res}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} W$ размерности $2n$.

Наоборот, по любому A-модулю V можно построить B-модуль

$$\operatorname{ind} V = B \underset{A}{\otimes} V\,,$$

который называется *индуцированным* с A-модуля V и определяется как фактор тензорного произведения векторных пространств $B \otimes V$ по подпространству, порождённому всевозможными разностями $ba \otimes v - b \otimes av$ с $b \in B$, $a \in A$ и $v \in V$. По построению, в пространстве $B \underset{A}{\otimes} V$ выполняются равенства $ba \underset{A}{\otimes} v = b \underset{A}{\otimes} av$, т. е. элементы алгебры A «проносятся» через знак тензорного произведения. Поэтому такое произведение называется *тензорным произведением над* A. Структура модуля над B задаётся правилом

$$b(b' \otimes v) \overset{\text{def}}{=} (bb') \otimes v\,.$$

Простейшим примером этой ситуации является комплексификация вещественного векторного пространства: если $\Bbbk = A = \mathbb{R}$, а $B = \mathbb{C}$, то из n-мерного вещественного векторного пространства V можно изготовить комплексное векторное пространство $\mathbb{C} \otimes V$ той же размерности n, но уже над полем $\mathbb{C}$.

Если важно указать алгебры B и A явно, мы будем писать $\operatorname{ind}_A^B V$.

Предложение 6.2

Отображение $\tau_A : V \to B \underset{A}{\otimes} V\,,\ v \mapsto 1 \underset{A}{\otimes} v$, является A-гомоморфизмом, и для любого A-гомоморфизма $\varphi : V \to W$ в любой B-модуль W существует единственный такой B-гомоморфизм $\psi : B \underset{A}{\otimes} V \to W$, что $\psi \circ \tau_A = \varphi$. Иначе говоря, для всех A-модулей V и B-модулей W имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_B(\operatorname{ind} V, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(V, \operatorname{res} W)\,, \quad \psi \mapsto \psi \circ \tau_A\,. \tag{6-20}$$

Доказательство. Для каждого B-гомоморфизма $\psi : B \underset{A}{\otimes} U \to V$ композиция

$$\varphi = \psi \circ \tau_A : V \to W\,, \quad v \mapsto \psi(1 \underset{A}{\otimes} u)$$

является A-гомоморфизмом, поскольку $\varphi(av) = \psi(1 \underset{A}{\otimes} av) = \psi(a \underset{A}{\otimes} v) = a\psi(1 \underset{A}{\otimes} v) = a\varphi(v)$. Тем самым, отображение (6-20) определено корректно. Для данного A-гомоморфизма $\varphi : V \to W$ такой B-гомоморфизм $\psi : B \underset{A}{\otimes} V \to W$, что $\varphi = \psi \circ \tau_A$, обязан действовать на разложимые тензоры по правилу $b \otimes v \mapsto b\varphi(v)$. Тем самым, он единствен. Будучи билинейным по b и v, это правило корректно задаёт линейный оператор $B \otimes V \to W$, который переводит соотношения $ba \otimes v - b \otimes av$ в нуль: $ba\psi(v) - b\psi(av) = 0$ в силу A-линейности ψ. Поэтому он корректно спускается до линейного отображения $B \underset{A}{\otimes} V \to W$, перестановочность которого с левым умножением на элементы $b \in B$ очевидна. □

Упражнение 6.9. Убедитесь, что универсальное свойство из предл. 6.2 определяет B-модуль $B \underset{A}{\otimes} V$ вместе с A-линейным отображением τ_A однозначно с точностью до единственного B-линейного изоморфизма, перестановочного с τ_A, и проверьте, что ограничение и индуцирование представлений перестановочны с прямыми суммами и с тензорными произведениями представлений.

6.3.1. Индуцированные представления групп. В ситуации, когда $B = \Bbbk[G]$ и $A = \Bbbk[H]$ являются групповыми алгебрами конечной группы G и произвольной её подгруппы $H \subset G$, ограничение и индуцирование сопоставляют каждому линейному представлению $\varrho : G \to \mathrm{GL}(W)$ его *ограничение* $\operatorname{res} W$ на подгруппу H

$$\operatorname{res}\varrho \overset{\text{def}}{=} \varrho|_H : H \to \mathrm{GL}(W)\,,$$

а каждому линейному представлению $\lambda : H \to \mathrm{GL}(V)$ — *индуцированное* им представление $\operatorname{ind}\lambda : G \to \mathrm{GL}(\Bbbk[G] \underset{k[H]}{\otimes} V)$ группы G, так что имеет место канонический изоморфизм $\mathrm{Hom}_G(\operatorname{ind} V, W) \simeq \mathrm{Hom}_H(V, \operatorname{res} W)$. Если необходимо подчеркнуть, о каких группе G и подгруппе $H \subset G$ идёт речь, мы будем писать res_H^G и ind_H^G.

На языке характеров сопряжение и индуцирование являются встречными гомоморфизмами колец представлений

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Rep}(H) \arrow[r, shift left, "\mathrm{ind}"] & \mathrm{Rep}(G) \arrow[l, shift left, "\mathrm{res}"]\end{tikzcd}$$

сопряжёнными относительно канонического скалярного произведения (6-18) на $\Bbbk^G$

$$(\chi_{\operatorname{ind} V}, \chi_W)_{\Bbbk^G} = (\chi_V, \chi_{\operatorname{res} W})_{\Bbbk^H}\,.$$

В частности, кратность неприводимого G-модуля $\lambda : G \to \mathrm{GL}(U)$ в разложении представления, индуцированного с неприводимого H-модуля $\mu : H \to \mathrm{GL}(S)$, равна кратности S в разложении ограничения V на подгруппу H:

$$m_\lambda(\operatorname{res}\mu) = m_\mu(\operatorname{ind}\lambda)\,. \tag{6-21}$$

Это равенство называется *законом взаимности Фробениуса*[1].

---

[1] или *двойственностью Фробениуса*

Предложение 6.3 (транзитивность индуцирования)
Для пары вложенных подгрупп $K \subset H \subset G$ и любого представления $\varrho : K \to \mathrm{GL}(U)$ имеется канонический изоморфзм G-модулей $\mathrm{ind}_H^G \mathrm{ind}_K^H U \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_H^G U$.

Доказательство. Поскольку для любого G-модуля W имеется канонический изоморфизм $\mathrm{Hom}_K(U, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_H(\mathrm{ind}_K^H U, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G \mathrm{ind}_K^H U, W)$, $\psi \mapsto \psi \circ \tau_K \circ \tau_H$, отображение $\tau_K \circ \tau_H : U \to \mathrm{ind}_H^G \mathrm{ind}_K^H U$ универсально в смысле предл. 6.2. По упр. 6.9 оно отождествляется с отображением $U \to \mathrm{ind}_K^G U$ единственным изоморфизмом. □

6.3.2. Строение индуцированного представления. Тензорное произведение

$$\Bbbk[G] \otimes U = \bigoplus_{g \in G} (\Bbbk \cdot g) \otimes V$$

представляет собою прямую сумму $|G|$ копий пространства V, занумерованных элементами $g \in G$. Факторизация по соотношениям $(gh) \otimes v = g \otimes (vu)$ склеивает между собою все прямые слагаемые, занумерованные элементами из одного смежного класса gH так, что $gh \otimes v$ отождествляется с $g \otimes hv$. В результате тензорное произведение над $\Bbbk[H]$ оказывается изоморфно прямой сумме $r = [G : H]$ копий пространства V занумерованных какой-либо фиксированной системой $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ представителей классов смежности

$$\Bbbk[G] \bigoplus_{\Bbbk[H]} V \simeq g_1 V \oplus g_2 V \oplus g_3 V \oplus \cdots \oplus g_r V . \tag{6-22}$$

В этом разложении каждое $g_\nu V$ представляет собой копию пространства V, а стоящий слева значок g_ν указывает, что данная копия соответствует смежному классу $g_\nu H$. Если писать $g_\nu v$ для обозначения вектора $v \in V$, лежащего в g_ν-той копии $g_\nu V$ пространства V, то векторы $w \in \Bbbk[G] \underset{k[H]}{\otimes} V$ однозначно запишутся суммами вида

$$\sum_{\nu=1}^{r} g_\nu v_\nu , \quad \text{где} \quad v_\nu \in V .$$

Левое умножение на элемент $g \in G$ в группе G осуществляет перестановку смежных классов: для любого $g \in G$ и каждого $\nu = 1, 2, \dots, r$ найдутся единственные элемент $h = h(g, \nu) \in H$ и номер $\mu = \mu(g, \nu)$, $1 \leqslant \mu \leqslant s$, такие что $gg_\nu = g_\mu h$. В этих обозначениях действие элемента $g \in G$ на вектор $g_\nu v \in g_\nu V$ происходит по правилу $gg_\nu v \stackrel{\text{def}}{=} g_\mu hv \in g_\mu V$, где $hv \in V$ есть результат действия оператора $h \in H$ на вектор $v \in V$ в соответствии с представлением подгруппы H в $\mathrm{GL}(V)$.

Пример 6.4
Пусть $G = S_3$ и $H \simeq S_2$ — подгруппа, порождённая транспозицией $\sigma = |12\rangle$. В качестве представителей смежных классов G/H выберем e, τ и τ^2, где $\tau = |123\rangle$.

Представление $W = \operatorname{ind} \mathbb{1}$, индуцированное тривиальным одномерным представлением, трёхмерно с базисом e, τ, τ^2 и образующие $\sigma, \tau \in S_3$ действуют на этот базис матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Тем самым, W изоморфно тавтологическому представлению S_3 и является суммой тривиального одномерного представления и двумерного представления группой треугольника. Представление $W' = \operatorname{ind} \operatorname{sgn}$, индуцированное одномерным знаковым представлением, также трёхмерно с тем же базисом, но σ и τ теперь действуют на него матрицами

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это представление является прямой суммой знакового представления в одномерном пространстве, натянутом на $e+\tau+\tau^2$ и треугольного представления в ортогональной плоскости. Представление, индуцированное с двумерного левого регулярного представления $\Bbbk[S_2]$, это 6-мерное левое регулярное представление группы S_3 в

$$\Bbbk[S_3] = e \cdot \Bbbk[S_2] \oplus \tau \cdot \Bbbk[S_2] \oplus \tau^2 \cdot \Bbbk[S_2]\,.$$

Упражнение 6.10. Убедитесь, что регулярное представление любой подгруппы всегда индуцирует регулярное представление объемлющей группы.

Предложение 6.4
Если группа G имеет абелеву подгруппу $H \subset G$, то размерность любого неприводимого представления группы G не превышает[1] индекса $[G : H]$.

Доказательство. Пусть представление U группы G неприводимо, и L — одномерный H-подмодуль в $\operatorname{res} U$. В силу взаимности Фробениуса $\operatorname{ind} L$ содержит U с ненулевой кратностью, откуда $\dim U \leqslant \dim \operatorname{ind} L = [G : H]$. □

Предложение 6.5
Пусть пересечение класса сопряжённых элементов $C \subset G$ с подгруппой $H \subset G$ раскладывается в объединение $C \cap H = D_1 \sqcup D_2 \sqcup \ldots \sqcup D_m$ различных классов H-сопряжённости. Тогда для любого представления V подгруппы H характер индуцированного им представления принимает на классе C значение

$$\chi_{\operatorname{ind} V}(C) = [G : H] \cdot \sum_{i=1}^{m} \chi_V(D_i) \cdot |D_i| / |C|\,.$$

---

[1] ниже, в ?? мы увидим, что если абелева подгруппа H нормальна в G, то размерности всех неприводимых группы G делят индекс $[G : H]$

В частности, для тривиального одномерного представления $V = \mathbb{1}$ имеем

$$\chi_{\operatorname{ind}\mathbb{1}} = [G : H] \cdot |C \cap H| / |C| \,. \tag{6-23}$$

Доказательство. Поскольку элемент $g \in C$ переставляет слагаемые $g_\nu V$ разложения (6-22), след его действия равен сумме следов действий на тех слагаемых $g_\nu V$, которые остаются при этой перестановке на месте, что означает равенство $gg_\nu = g_\nu h$ для некоторого $h = g_\nu^{-1} g g_\nu \in H$. При этом действие элемента g на таком слагаемом $g_\nu V$ совпадает с действием элемента h на пространстве V, и его след равен $\chi_V(h) = \chi_V(g_\nu^{-1} g g_\nu)$. Поэтому

$$\chi_{\operatorname{ind}V}(g) = \sum_{\substack{\nu:\\ g_\nu^{-1} g g_\nu \in H}} \chi_V(g_\nu^{-1} g g_\nu) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s\in G:\\ s^{-1}gs\in H}} \chi_V(s^{-1}gs) = \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{s\in G:\\ s^{-1}gs\in D_i}} \chi_V(D_i)\,.$$

Во втором равенстве мы заменили каждое слагаемое левой суммы на $|H|$ равных друг другу слагаемых, получающихся заменой g_ν на всевозможные $s \in g_\nu H$, а в третьем — собрали вместе все слагаемые, у которых $s^{-1}gs$ лежит в одном классе H-сопряжённости D_i. Поскольку всего имеется $|D_i|$ различных произведений $s^{-1}gs \in D_i$ и каждое из них по формуле для длины орбиты получается из $|G|/|C|$ различных $s \in G$,

$$\chi_{\operatorname{ind}V}(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^{m} \chi_V(D_i) \cdot |D_i| \cdot |G|/|C| \,,$$

что и утверждалось. ☐

Упражнение 6.11 (формула проекции). Убедитесь, что для любых G-модуля W и H-модуля V имеется канонический изоморфизм G-модулей[1]

$$\operatorname{ind}\big((\operatorname{res} W) \otimes V\big) \simeq W \otimes \operatorname{ind} V \,.$$

6.3.3. Коиндуцированные представления. В теории представлений ассоциативных алгебр имеется ещё один способ сопоставить A-модулю V модуль над алгеброй B, содержащей A в качестве подалгебры, а именно — *коиндуцированный модуль*

$$\operatorname{coind} V \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_A(B, V) \,,$$

на котором имеется *левое* действие алгебры B *правым* умножением аргумента:

$$b : \psi \mapsto b\psi \,, \quad \text{где} \quad b\psi(b') \stackrel{\text{def}}{=} \psi(b'b) \,.$$

Упражнение 6.12. Проверьте равенство $(b_1 b_2)\psi = b_1(b_2\psi)$.

---

[1] тензорные произведения в обеих частях суть тензорные произведения представлений групп H и G, описанные в n° 5.4 на стр. 84

Коиндуцированный модуль обладает универсальным свойством, двойственным к описанному в предл. 6.2. А именно, каноническое отображение

$$\tau^A : \operatorname{Hom}_A(B,V) \to V\,, \quad \varphi \mapsto \varphi(1)\,,$$

A-линейно, и для любого B-модуля W и любого A-гомоморфизма $\varphi : W \to V$ существует единственный B-гомоморфизм $\psi : W \to \operatorname{Hom}_A(B,V)$, такой что $\tau^A \circ \psi = \varphi$. То есть для всех A-модулей V и B-модулей W имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_B(W, \operatorname{coind} V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(\operatorname{res} W, V)\,, \quad \psi \mapsto \tau^A \circ \psi\,, \tag{6-24}$$

сопоставляющий B-гомоморфизму $\psi : W \to \operatorname{Hom}_A(B,V)$, $w \mapsto \psi_w$, A-гомоморфизм

$$\tau^A \circ \psi : W \to V\,, \quad w \mapsto \psi_w(1)\,.$$

Обратное отображение переводит A-гомоморфизм $\varphi : W \to V$ в B-гомоморфизм

$$\psi : W \to \operatorname{Hom}_A(B,V)\,, \quad w \mapsto \psi_w\,, \quad \text{где}$$
$$\psi_w : B \to V\,, \quad b \mapsto \varphi(bw)\,.$$

Упражнение 6.13. Убедитесь, что оба гомоморфизма корректно определены и обратны друг другу.

В ситуации, когда $A = \Bbbk[H]$, $B = \Bbbk[G]$ суть групповые алгебры конечной группы G и её подгруппы $H \subset G$, преобразование Фурье[1] индуцирует изоморфизм векторных пространств $\Phi \otimes \operatorname{Id}_V : \operatorname{Hom}(\Bbbk[G], V) \simeq \Bbbk[G]^* \otimes V \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G] \otimes V$, действующий на операторы ранга 1 по правилу

$$\xi \otimes v \mapsto \hat{\xi} \otimes v = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \xi\left(g^{-1}\right) \cdot g \otimes v = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \otimes \left(\xi \otimes v(g^{-1})\right)\,,$$

а значит, переводящий произвольный линейный оператор $\varphi : \Bbbk[G] \to V$ в тензор

$$\widehat{\varphi} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1} \otimes \varphi(g)\,,$$

называемый *преобразованием Фурье* оператора φ. Преобразование Фурье перестановочно с левым действием G, ибо для всех $s \in G$

$$\widehat{s\varphi} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1} \otimes s\varphi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1} \otimes \varphi(gs) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} sg^{-1} \otimes \varphi(g) = s\widehat{\varphi}\,,$$

---

[1] см. формулу (6-16) на стр. 102

а его композиция с проекцией $\Bbbk[G]\otimes V \twoheadrightarrow \Bbbk[G]\underset{\Bbbk[H]}{\otimes} V$ устанавливает изоморфизм подпространства H-инвариантных операторов $\mathrm{Hom}_H(\Bbbk[G],V)\subset\mathrm{Hom}(\Bbbk[G],V)$ с индуцированным G-модулем $\mathrm{ind}\,V=\Bbbk[G]\underset{\Bbbk[H]}{\otimes} V$.

Упражнение 6.14. Докажите последнее утверждение.

Таким образом, индуцированное и коиндуцированное представления конечной группы канонически изоморфны друг другу посредством преобразования Фурье.

Задачи для самостоятельного решения к §6

Задача 6.1. Пусть $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ — инъективное представление конечной группы G над полем $\mathbb{C}$, и пусть $\dim V \geqslant 2$. Покажите, что характер χ_ϱ принимает значение $\dim V$ не более, чем на одном классе сопряжённости.

Задача 6.2. Пусть значение характера комплексного неприводимого представления V конечной группы на её классе сопряжённости K отлично от нуля, а $\dim V$ взаимно проста с $|K|$. Покажите, что все элементы из K действуют на V гомотетиями.

Задача 6.3. Разложите на неприводимые представление симметрической группы S_4, индуцированное

а) одномерным представлением 4-цикла умножением на $i\in\mathbb{C}$

б) одномерным представлением 3-цикла умножением на $e^{2\pi i/3}\in\mathbb{C}$

в) двумерным неприводимым представлением $S_3=\mathrm{Stab}(\{4\})\subset S_4$.

Задача 6.4. Разложите на неприводимые представление симметрической группы S_5, индуцированное

а) одномерным представлением цикла длины 5 умножением на $e^{2\pi i/5}$.

б) трёхмерным представлением знакопеременной подгруппы $A_5\subset S_5$ вращениями додекаэдра[1].

Задача 6.5. Обозначим через $R(G)$ кольцо комплексных представлений[2] конечной группы G. Покажите, что $R(G_1\times G_2)=R(G_1)\otimes R(G_2)$ как абелева группа.

Задача 6.6. Изоморфны ли кольца комплексных представлений группы кватернионных единиц $Q_8=\{\pm\mathbf{1},\pm\boldsymbol{i},\pm\boldsymbol{j},\pm\boldsymbol{k}\}\subset\mathbb{H}$ и группы квадрата D_4?

Задача 6.7 (аффинная группа прямой). Пусть A — группа аффинных преобразований $x\mapsto ax+b$ аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ над полем $\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/(p)$. Покажите, что

а) $A=T\rtimes\mathbb{F}_p^*$, где $T\subset A$ — подгруппа параллельных переносов, а $\mathbb{F}_p^*\subset A$ — подгруппа гомотетий относительно начала координат, и перечислите классы сопряжённости в A

б) представление A в пространстве комплекснозначных функций на $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$ с нулевой суммой значений неприводимо и индуцировано одномерным представлени-

---

[1] напомню, что собственная группа додекаэдра отождествляется с группой чётных перестановок пяти кубов, образованных диагоналями граней додекаэдра

[2] т. е. целочисленные линейные комбинации неприводимых характеров, рассматриваемые как подкольца в кольцах комплексных функций на группе

ем абелевой подгруппы T с характером $\mathbb{F}_p \ni t \mapsto e^{2\pi i t/p} \in \mathrm{U}(1)$ и вычислите характер этого индуцированного представления.

в) все остальные неприводимые представления группы A одномерны.

Задача 6.8 (группа Гейзенберга над $\mathbb{F}_p$ с $p > 2$). Свяжем с n-мерным векторным пространством L над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ с $p > 2$ *группу Гейзенберга* H_p^n, образованную тройками $(x, u, u^*) \in \mathbb{F}_p \times L \times L^*$ с операцией

$$(x_1, u_1, u_1^*) \circ (x_2, u_2, u_2^*) \overset{\text{def}}{=} (x_1 + x_2 + (\langle\, u_2^*\,,\, u_1 \,\rangle - \langle\, u_1^*\,,\, u_2 \,\rangle)/2,\ u_1 + u_2,\ u_1^* + u_2^*)\,,$$

и обозначим через $H' \simeq \mathbb{F}_p \times L \subset H_p^n$ абелеву подгруппу, образованную тройками вида $(x, u, 0)$. Покажите, что

а) H_p^n является группой и перечислите её классы сопряжённости

б) H_p^1 изоморфна группе верхних унитреугольных 3×3 матриц над $\mathbb{F}_p$

в) для каждого $a \in \mathbb{F}_p^*$ комплексное представление W_a группы H_p^n, индуцированное одномерным представлением подгруппы H' с характером $\psi_a(x, u, 0) = e^{2\pi i a x/p}$, неприводимо и вычислите размерность и характер представления W_a

г) все представления W_a различны, а все остальные неприводимые представления группы H_p^n одномерны.

Задача 6.9 (группа Гейзенберга над $\mathbb{F}_2$). При $p = 2$ обозначим через H группу, порождённую $4n + 4$ образующими ± 1, $\pm u_1$, … , $\pm u_{2n+1}$ с соотношениями $u_i^2 = -1$, $u_i u_j = -u_j u_i$ и «минус на минус даёт плюс». Покажите, что

а) H состоит из 2^{2n+2} элементов $\pm u_I = \pm u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_k}$, где $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ пробегает всевозможные упорядоченные подмножества в $\{1,\ 2,\ \dots\ ,\ (n+1)\}$ и $u_\varnothing = 1$

б) элементы $\pm u_I$, отвечающие индексам I чётной длины, образуют в H подгруппу (она называется *группой Гейзенберга* H_2^n)

в) H_2^1 изоморфна группе кватернионных единиц $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

г) Опишите центр, классы сопряжённости и неприводимые представления группы H_2^n

Задача 6.10*. Покажите, что в разложениях тензорных степеней произвольного эффективного представления конечной группы встречаются все её неприводимые представления.

§7. Представления симметрических групп

7.1. Действие S_n на заполненных диаграммах Юнга. Будем называть диаграмму Юнга λ, в каждой клетке которой стоит какая-нибудь буква[1] алфавита $\{1, \dots, m\}$ *заполнением* формы λ. Заполнение T называется *стандартным*, если число букв совпадает с числом клеток диаграммы: $m = |\lambda|$, и каждая буква используется ровно один раз. Заполнение T называется *таблицей*, если его символы нестрого возрастают слева направо вдоль строк диаграммы и строго возрастают сверху вниз вдоль столбцов. Число всех таблиц формы λ в алфавите $\{1, \dots, m\}$ мы обозначаем через $d_\lambda(m)$, а число стандартных таблиц формы λ — через d_λ. Числа $d_\lambda(m)$ отличны от нуля только для диаграмм из $\leqslant m$ строк. Как мы видели в прим. 4.1 на стр. 64

$$\sum_\lambda d_\lambda \cdot d_\lambda(m) = m^n \quad \text{и} \quad \sum_\lambda d_\lambda^2 = n!\ , \tag{7-1}$$

где суммирование идёт по всем n-клеточным диаграммам Юнга. С каждым стандартным заполнением T формы $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ и веса $\sum \lambda_i = n$ связаны две подгруппы $R_T, C_T \subset S_n$, которые мы будем называть *строчной* и *столбцовой* подгруппами заполнения T. Строчная подгруппа R_T состоит из всех перестановок, сохраняющих содержимое каждой строки заполнения T. Аналогично, столбцовая подгруппа C_T состоит из всех перестановок, сохраняющих содержимое каждого столбца. Таким образом, $R_T \simeq S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_k}$ и $C_T \simeq S_{\lambda_1^t} \times S_{\lambda_2^t} \times \dots \times S_{\lambda_m^t}$, где $\lambda^t = (\lambda_1^t, \lambda_2^t, \dots, \lambda_m^t)$ здесь и всюду далее означает транспонированную к λ диаграмму.

Упражнение 7.1. Убедитесь в том, что симметрическая группа S_n транзитивно действует перестановками букв на стандартных заполнениях фиксированной формы λ и что $R_{gT} = gR_Tg^{-1}$ и $C_{gT} = gC_Tg^{-1}$ для любой перестановки $g \in S_n$.

Напомним[2], что диаграмма λ *доминирует* диаграмму μ, если

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k \geqslant \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}\,.$$

В этом случае мы пишем $\lambda \trianglerighteq \mu$. Если диаграмма λ лексикографически больше диаграммы μ, мы пишем $\lambda > \mu$. Отметим, что в этом случае диаграмма μ не может доминировать диаграмму λ.

Лемма 7.1

Если форма μ стандартного заполнения U не является строго доминирующей над формой λ стандартного заполнения T одного и того же веса $|\mu| = |\lambda|$, то имеет место ровно одна из двух взаимоисключающих возможностей:

- либо найдутся два числа, стоящие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения U

---

[1] при этом могут использоваться не все буквы, а используемые буквы могут повторяться

[2] см. формулу (4-13) на стр. 67

- либо $\lambda = \mu$ и $pT = qU$ для некоторых $p \in R_T$ и $q \in C_U$.

Доказательство. Пусть все элементы каждой из строк заполнения T находятся в разных столбцах заполнения U. Из того, что все элементы первой строки T лежат в разных столбцах U, вытекает неравенство $\lambda_1 \leqslant \mu_1$ и существование перестановки $q_1 \in C_U$, переводящей все элементы из первой строки заполнения T в первую строку заполнения $q_1 U$. Из того, что все элементы второй строки T тоже лежат в разных столбцах U, вытекает существование такой не затрагивающей элементов из первой строки заполнения T перестановки $q_2 \in C_{q_1 U} = C_U$, что в заполнении $q_2 q_1 U$ каждый элемент второй строки заполнения T стоит либо во второй строке, либо в первой[1], что влечёт неравенство $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \mu_1 + \mu_2$. Продолжая в эдаком духе, мы получим такую последовательность перестановок $q_1, q_2, \dots, q_k \in C_U$, где k — количество строк в диаграмме μ, что $q_i \in C_{q_{i-1} \cdots q_1 U} = C_U$ оставляет на месте все элементы из первых $i-1$ строк заполнения T, а также все элементы i-той строки T, лежащие в заполнении $q_{i-1} \cdots q_1 U$ в столбцах высоты $< i$, а все остальные элементы из i-той строки T переводит в i-тую строку заполнения $q_i q_{i-1} \cdots q_1 U$. В частности, при каждом i будет выполняться неравенство $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \leqslant \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i$, что по условию леммы возможно только при $\lambda = \mu$. В этом случае каждая перестановка q_i переводит элементы i-той строки заполнения T в точности в i-тую строку заполнения $q_i q_{i-1} \cdots q_1 U$. Поэтому $q_k \cdots q_1 U = pT$ для некоторого $p \in R_T$. □

Следствие 7.1
Перестановка $g \in S_n$ тогда и и только тогда имеет вид $g = pq$ для некоторых $p \in R_T$, $q \in C_T$, когда никакие два элемента из одной строки T не лежат в одном столбце gT, и в этом случае представление перестановки $g \in S_n$ в виде $g = pq$ с $p \in R_T$ и $q \in C_T$ единственно.

Доказательство. Если $U = pqT$, где $p \in R_T$, $q \in C_T$, то элементы из одной строки T очевидно лежат в разных столбцах U. Наоборот, пусть никакие два элемента из одной строки заполнения T не лежат в одном столбце $U = gT$. По лем. 7.1 найдутся перестановки $p \in R_T$ и $q \in C_U$, такие что $pT = qU = qgT$, откуда $p = qg$. Записывая $q \in C_{gT} = gC_T g^{-1}$ как $gq_1 g^{-1}$ с $q_1 \in C_T$, получаем $g = pq_1^{-1}$, что и требовалось. Единственность разложения $g = pq$ вытекает из того, что $R_T \cap C_T = \{e\}$. □

7.2. Симметризаторы Юнга. Элементы групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$

$$r_T = \sum_{\sigma \in R_T} \sigma\,, \quad c_T = \sum_{\sigma \in C_T} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \sigma\,, \tag{7-2}$$

$$s_T = r_T \cdot c_T = \sum_{p \in R_T} \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) \cdot pq \tag{7-3}$$

---

[1] последнее происходит, когда этот элемент изначально находится в столбце высоты 1

называются, соответственно, *строчным*, *столбцовым* и *полным симметризаторами Юнга*. Они обладают следующими очевидными свойствами:

$$\forall g \in S_n \quad r_{gT} = g r_T g^{-1}\,, \quad c_{gT} = g c_T g^{-1} \quad \text{и} \quad s_{gT} = g s_T g^{-1} \tag{7-4}$$

$$\forall p \in R_T \; p r_T = r_T p = r_T \quad \text{и} \quad \forall q \in C_T \; \operatorname{sgn}(q)\cdot q c_T = \operatorname{sgn}(q)\cdot c_T q = c_T \tag{7-5}$$

$$\forall p \in R_T \quad \text{и} \quad \forall q \in C_T \quad \operatorname{sgn}(q)\cdot p s_T q = s_T\,. \tag{7-6}$$

Замечательно, что полный симметризатор $s_T \in \mathbb{C}[S_n]$ однозначно с точностью до пропорциональности *определяется* свойством (7-6).

Лемма 7.2

Векторное подпространство $E_T = \{\sigma \in \mathbb{C}[S_n] \mid \forall p \in R_T \; \forall q \in C_T \; \operatorname{sgn}(q)\cdot p\sigma q = \sigma\}$ одномерно и линейно порождается симметризатором s_T.

Доказательство. Покажем, что всякий элемент $\sigma = \sum\limits_{g\in S_n} x_g g \in E_T$ равен $x_e \cdot s_T$. Условие $\operatorname{sgn}(q)\cdot p\sigma q = \sigma$ означает, что $x_{pgq} = \operatorname{sgn}(q)\cdot x_g$ для любого $g \in S_n$. Полагая $g = e$, получаем $x_{pq} = \operatorname{sgn}(q)\cdot x_e$, откуда $\sigma = x_e\cdot s_T + \sum\limits_{g\notin R_T C_T} x_g g$. Проверим, что все коэффициенты x_g в последней сумме нулевые. Если $g \notin R_T C_T$, то по сл. 7.1 найдутся два элемента, лежащие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения $U = gT$. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит и в R_T, и в $C_U = g C_T g^{-1}$. Из второго вытекает, что $g^{-1}\tau g \in C_T$. Полагая $p = \tau$, $q = g^{-1}\tau g$ в равенстве $x_{pgq} = \operatorname{sgn}(q)\cdot x_g$, получаем $x_g = -x_g$, откуда $x_g = 0$. □

Лемма 7.3

$s_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T = \mathbb{C}\cdot s_T$, причём $s_T^2 = n_\lambda \cdot s_T$, где $n_\lambda = n!/\dim\left(\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T\right)$ — положительное рациональное число, зависящее только от формы λ заполнения T.

Доказательство. Из равенств (7-5) – (7-6) вытекает, что при любом $x \in \mathbb{C}[S_n]$ элемент $s_T \cdot x \cdot s_T$ обладает свойством (7-6) и, тем самым, лежит в одномерном пространстве $E_T = \mathbb{C}\cdot s_T$ из лем. 7.2. В частности, $s_T^2 = n_T \cdot s_T$ для некоторого $n_T \in \mathbb{C}$. Чтобы найти n_T, вычислим двумя способами след оператора $\mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n]$ правого умножения на элемент $s_T : x \mapsto x\cdot s_T$. С одной стороны, из формулы (7-3) вытекает, что для любого $g \in S_n$ коэффициент при g у произведения $g \cdot s_T$ равен единице, откуда $\operatorname{tr}\left(s_T\right) = |S_n| = n!$. С другой стороны, левый идеал $\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T$ является S_n-подмодулем левого регулярного представления S_n. Поскольку последнее вполне приводимо, существует такой S_n-подмодуль $W \subset \mathbb{C}[S_n]$, что $\mathbb{C}[S_n] = W \oplus \mathbb{C}[S_n]\cdot s_T$. Правое умножение на s_T переводит $W \subset \mathbb{C}[S_n]$ внутрь $\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T$, а на идеале $\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T$ действует как умножение на n_T. Поэтому $\operatorname{tr}(s_T) = n_T \cdot \dim\left(\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T\right)$. Следовательно, $n_T = n!/\dim\left(\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T\right)$ рационально и положительно. Поскольку $s_{gT} = g s_T g^{-1}$ $\Rightarrow s_{gT}^2 = g s_T^2 g^{-1} = n_T g s_T g^{-1} = n_T s_{gT}$, число $n_T = n_{\lambda(T)}$ зависит только от формы $\lambda = \lambda(T)$ заполнения T. □

Лемма 7.4

Если форма заполнения T лексикографически больше формы заполнения U, то

$$r_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot c_U = c_U \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot r_T = s_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot s_U = 0\,.$$

Доказательство. Достаточно показать, что $r_T \cdot g \cdot c_U = c_U \cdot g \cdot r_T = 0$ для всех $g \in S_n$. Пусть для начала $g = e$. По лем. 7.1 какие-то два элемента из одной строки заполнения T лежат в одном столбце заполнения U. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит как в R_T, так и в C_U. Поэтому $r_T \cdot c_U = (r_T \cdot \tau) \cdot c_U = r_T \cdot (\tau \cdot c_U) = -r_T \cdot c_U$ и $c_U \cdot r_T = -(c_U \cdot \tau) \cdot r_T = -c_U \cdot (\tau \cdot r_T) = -c_U \cdot r_T$, откуда $r_T \cdot c_U = c_U \cdot r_T = 0$. Теперь и для любого $g \in S_n$ получаем $r_T \cdot g \cdot c_U = r_T \cdot g c_U g^{-1} \cdot g = \left(r_T \cdot c_{gU}\right) \cdot g = 0$ и $c_U \cdot g \cdot r_T = c_U \cdot g r_T g^{-1} \cdot g = \left(c_U \cdot r_{gT}\right) \cdot g = 0\,.$ □

Теорема 7.1

Представление S_n левыми умножениями в идеале $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ неприводимо. Два таких представления V_T и V_U изоморфны тогда и только тогда, когда заполнения T и U имеют одинаковую форму $\lambda = \lambda(T) = \lambda(U)$. Если для каждой n-клеточной диаграммы Юнга λ произвольным образом зафиксировать некоторое стандартное заполнение T_λ, то неприводимые представления $V_\lambda = V_{T_\lambda}$ составят полный список попарно неизоморфных неприводимых представлений S_n.

Доказательство. Пусть $W \subset V_T$ является S_n-инвариантным подмодулем. Перестановочный с левым умножением на S_n проектор $\pi_W : \mathbb{C}[S_n] \twoheadrightarrow W$ представляет собою оператор правого умножения на элемент $w = \pi(1) \in W$, поскольку $\pi_W(x) = \pi_W(x \cdot 1) = x \cdot \pi_W(1) = x \cdot w$ для всех $x \in \mathbb{C}[S_n]$. Так как $s_T \cdot W \subset s_T \cdot V_T = s_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T = \mathbb{C} \cdot s_T$, для левого действия элемента s_T на подмодуле W имеются ровно две возможности: либо $s_T \cdot W = 0$, либо $s_T \cdot W = \mathbb{C} \cdot s_T$. В первом случае $W \cdot W \subset V_T \cdot W = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T \cdot W = 0$, откуда $w \cdot w = 0$. Следовательно, правое умножение на w аннулирует левый идеал $W = \mathbb{C}[S_n] \cdot w$, а значит, $W = 0$. Во втором случае $s_T \in s_T \cdot W \subset W$, откуда $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T \subset W$, т. е. $W = V_T$. Таким образом, модуль V_T неприводим. Если заполнения T и U имеют разные формы — скажем, форма заполнения T лексикографически больше формы заполнения U, то по лем. 7.4 левое умножение на s_T аннулирует модуль V_U, тогда как на модуле V_T оно согласно лем. 7.3 действует нетривиально: элемент $s_T \in V_T$ является собственным вектором левого умножения на s_T с ненулевым собственным значением $n_{\lambda(T)}$. Поэтому представления V_T и V_U не изоморфны. Отсюда следует последнее утверждение теоремы: число попарно неизоморфных неприводимых представлений V_{T_λ} равно числу классов сопряжённости в S_n. Если заполнение U имеет ту же форму λ, что и T_λ, то неприводимое представление V_U, будучи неизоморфным ни одному из представлений V_{T_μ} с $\mu \neq \lambda$, изоморфно именно представлению V_{T_λ}. □

7.2.1. Симметризаторы $s'_T = c_T \cdot r_T$. Множества R_TC_T и C_TR_T, вообще говоря, различны. Например, для стандартного заполнения

$$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

они различаются содержащимся в них циклом длины три: в R_TC_T это цикл $|12\rangle \circ |13\rangle = |132\rangle$, а в C_TR_T — цикл $|13\rangle \circ |12\rangle = |123\rangle$. Поэтому перестановка сомножителей в формуле (7-3) приводит к вообще говоря отличному от $s_T = r_T \cdot c_T$ симметризатору

$$s'_T = c_T \cdot r_T = \sum_{p \in R_T} \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) \cdot qp\,, \tag{7-7}$$

получающемуся из s_T применением *антиподального антиавтоморфизма*

$$\alpha\,:\,\mathbb{C}[S_n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[S_n]\,, \quad g \mapsto g^{-1} \quad \text{для } g \in G\,,$$

оставляющего r_T и c_T на месте и оборачивающего порядок сомножителей в произведениях.

Упражнение 7.2. Сформулируйте и докажите для симметризатора s'_T аналоги соотношений (7-6), лем. 7.4, лем. 7.3 и теор. 7.1.

Предложение 7.1
Представления S_n левыми умножениями в идеалах $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ и $V'_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s'_T$ изоморфны.

Доказательство. Операторы правого умножения на c_T и r_T являются гомоморфизмами левых S_n-модулей

$$\begin{tikzcd} V'_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot c_T r_T \arrow[r, shift left, "x \mapsto x \cdot c_T"] & \mathbb{C}[S_n] \cdot r_T c_T = V_T \arrow[l, shift left, "x \cdot r_T \mapsfrom x"] \end{tikzcd}$$

Композиция $x \mapsto x \cdot r_T c_T = x \cdot s_T$ действует на $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ умножением на ненулевую константу $n_{\lambda(T)}$. Таким образом, операторы правого умножения на $n_\lambda^{-1/2} c_T$ и $n_\lambda^{-1/2} r_T$ являются взаимно обратными изоморфизмами представлений. □

Следствие 7.2
Неприводимые представления V_λ и V_{λ^t}, отвечающие транспонированным диаграммам λ и λ^t, получаются друг из друга тензорным умножением на одномерное знаковое представление.

Доказательство. Фиксируем какое-либо стандартное заполнение T формы λ и транспонированное заполнение T^t транспонированной диаграммы λ^t. Тогда $R_{T^t} = C_T$, $C_{T^t} = R_T$ и

$$s_{T^t} = \sum_{p \in R_T} \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(p) \cdot qp = \sum_{p \in R_T} \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) \cdot \operatorname{sgn}(pq) \cdot qp = \sigma\left(s'_T\right)\,,$$

где $\sigma : \mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n]$ обозначает *знаковый автоморфизм* групповой алгебры, действующий на базис g по правилу $g \mapsto \operatorname{sgn}(g) \cdot g$. Тензорное произведение представления V_λ на одномерное знаковое представление изоморфно представлению S_n в пространстве $V'_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s'_T$, заданному правилом $g : x \cdot s'_T \mapsto \operatorname{sgn}(g) \cdot gx \cdot s'_T$. Знаковый автоморфизм σ изоморфно отображает это пространство на $V_{\lambda^t} = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_{T^t}$, превращая последнее действие в левое умножение на $g : \sigma(x) \cdot s_{T^t} \mapsto g\sigma(x) \cdot s_{T^t}$. □

7.3. Модуль таблоидов. Орбита стандартного заполнения T под действием строчной подгруппы R_T называется *таблоидом* формы λ и обозначается через $\{T\}$. Действие симметрической группы $g : T \mapsto gT$ на заполнениях корректно спускается до действия $g : \{T\} \mapsto \{gT\}$ на таблоидах:

$$gR_T T = gR_T g^{-1} gT = R_{gT} gT .$$

Возникающее таким образом перестановочное представление S_n на пространстве формальных комплексных линейных комбинаций таблоидов формы λ называется *модулем таблоидов* и обозначается M_λ. Так как таблоиды формы λ биективно соответствуют левым смежным классам $gR_T \in S_n / R_T$ и действие S_n на таблоидах совпадает с действием на смежные классы, модуль таблоидов изоморфен представлению, индуцированному с тривиального одномерного представления подгруппы $R_T \subset S_n : M_\lambda \simeq \operatorname{ind}_{R_T}^{S_n} \mathbb{1}$.

Упражнение 7.3. Покажите, что представление S_n в пространстве M_λ изоморфно представлению S_n левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n] \cdot r_T$.

7.3.1. Характер модуля M_λ принято обозначать через ψ_λ. Чтобы его описать, рассмотрим класс сопряжённости $C_\mu \in \operatorname{Cl}(S_n)$, состоящий из всех перестановок циклового типа μ, и обозначим через m_j число строк длины j в диаграмме μ.

Предложение 7.2

Значение $\psi_\lambda(C_\mu)$ равно коэффициенту при m_λ в разложении симметрического многочлена Ньютона[1] $p_\mu(x) = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \cdots p_n(x)^{m_n}$ по стандартному мономиальному базису[2] m_λ.

Доказательство. Так как m_i-тая степень i-той степенной суммы Ньютона имеет вид

$$p_i(x)^{m_i} = \left(x_1^i + x_2^i + \cdots + x_n^i\right)^{m_i} = \sum_{\sum\limits_j \varrho_{ij} = m_i} \frac{m_i!}{\varrho_{i1}!\, \varrho_{i2}! \cdots \varrho_{in}!} x_1^{i \cdot \varrho_{i1}} x_2^{i \cdot \varrho_{i2}} \cdots x_n^{i \cdot \varrho_{in}}$$

---

[1] см. формулу (3-14) на стр. 46

[2] см. формулу (3-3) на стр. 42

коэффициент при $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}$ у $p_\mu(x) = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \cdots p_n(x)^{m_n}$ равен

$$\sum_{\varrho_{ij}} \frac{m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_n!}{\prod\limits_{ij} \varrho_{ij}!}, \tag{7-8}$$

где суммирование идёт по всем таким наборам целых чисел $\varrho_{ij} \geqslant 0$, что

$$\sum_j \varrho_{ij} = m_i \quad \text{и} \quad \sum_i i \cdot \varrho_{ij} = \lambda_j . \tag{7-9}$$

С другой стороны, согласно установленной в предл. 6.5 на стр. 109 формуле (6-23) для характера индуцированного представления,

$$\psi_\lambda(C_\mu) = [S_n : R_T] \cdot |C_\mu \cap R_T| / |C_\mu| , \tag{7-10}$$

где $[S_n : R_T] = n!/\prod\limits_j \lambda_j!$, $|C_\mu| = n!/\prod\limits_i i^{m_i} m_i!$, а пересечение $C_\mu \cap R_T$ состоит из непересекающихся классов R_T-сопряжённости D_ϱ, образованных всеми перестановками σ циклового типа μ, в которых ϱ_{ij} из m_i циклов длины i заполнены элементами из j-той строки заполнения T. Нумерующие эти классы наборы $\varrho = \{\varrho_{ij}\}$ состоят из неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих условиям (7-9).

Упражнение 7.4. Убедитесь, что каждое множество перестановок D_ϱ циклового типа μ и в самом деле представляет собою ровно один класс R_T-сопряжённости.

При сопряжении группой R_T стабилизатор перестановки $\sigma \in \Delta_\varrho$ состоит из $\prod \varrho_{ij}!$ независимых перестановок циклов одинаковой длины между собою и $\prod i^{m_i}$ независимых циклических перестановок внутри самих циклов, так что

$$|C_\mu \cap R_T| \sum_\varrho |D_\varrho| = \sum_\varrho \prod_j \lambda_j! / \prod_{ij} i^{m_i} \varrho_{ij}! \,.$$

Подставляя эти значения в (7-10), после сокращений получаем в точности сумму (7-8), что и требовалось. □

7.4. Модуль Шпехта. Для каждого заполнения T формы λ рассмотрим в модуле таблоидов M_λ вектор

$$v_T = c_T\{T\} = \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) \cdot \{qT\} . \tag{7-11}$$

Поскольку ни при каком $q \in C_T$ никакие два элемента из одного столбца T не могут оказаться в одной строке qT, равенство $q_1 T = p q_2 T$ невозможно ни при каких $q_1, q_2 \in C_T$ и $p \in R_{q_2 T}$, т. е. все слагаемые в правой сумме (7-11) суть *различные* базисные векторы пространства таблоидов M_λ, взятые с коэффициентами ±1. В частности, каждый из векторов v_T отличен от нуля.

Линейная оболочка векторов (7-11), полученных из всех возможных заполнений T формы λ, является S_n-подмодулем в M_λ, поскольку для всех $g \in S_n$

$$gv_T = gc_T\{T\} = gc_Tg^{-1}\{gT\} = c_{gT}\{gT\} = v_{gT}.$$

Этот подмодуль обозначается S_λ и называется *модулем Шпехта*.

Лемма 7.5
Если форма λ заполнения T не является строго доминирующей диаграмму μ, то

$$c_TM_\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \lambda \\ \mathbb{C} \cdot v_T & \text{при } \mu = \lambda\,. \end{cases}$$

Доказательство. Если в пересечении $R_U \cap C_T$ имеется хоть одна транспозиция τ, то

$$c_T\{U\} = c_T\{\tau U\} = c_T \cdot \tau\{U\} = -c_T\{U\}\,, \tag{7-12}$$

откуда $c_T\{U\} = 0$. Если в условиях нашей леммы такой транспозиции нет, то по лем. 7.1 на стр. 114 заполнения U и T имеют одинаковую форму λ и $pU = qT$ для некоторых $p \in R_U$ и $q \in C_T$. В этом случае $c_T\{U\} = c_T\{pU\} = c_T\{qT\} = \operatorname{sgn}(q) \cdot c_T\{T\} = \pm v_T$, что и утверждалось. □

Теорема 7.2
Модуль Шпехта S_λ изоморфен неприводимому представлению V_λ левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$, построенному по произвольному заполнению T формы λ.

Доказательство. Покажем сначала, что S_λ неприводим. Пусть имеется разложение $S_\lambda = V \oplus W$ в сумму S_n-подмодулей. Тогда оператор c_T, построенный по заполнению T формы λ, переводит каждое из слагаемых в себя. Поскольку по лем. 7.5

$$c_TS_\lambda \subset c_T \cdot M_\lambda = \mathbb{C} \cdot v_T\,,$$

ненулевой вектор v_T лежит ровно в одном из слагаемых — скажем, в V. Но тогда V содержит и все остальные векторы $v_{gT} = gv_T$, а значит, совпадает с S_λ. При $\mu \neq \lambda$ неприводимые представления S_λ и S_μ не изоморфны: скажем, если λ лексикографически меньше μ, то по лем. 7.5 оператор c_T аннулирует модуль $S_\mu \subset M_\mu$, а на модуле S_λ действует нетривиально, т. к. $c_Tv_T = c_Tc_T\{T\} = |C_T| \cdot c_T\{T\} = |C_T| \cdot v_T$. Из сказанного вытекает, что модуль S_λ изоморфен ровно одному из неприводимых представлений $V_\mu = \mathbb{C}[S_n] \cdot r_Uc_U$, где U — произвольное заполнение формы μ. Поскольку по лем. 7.4 левое умножение на c_T аннулирует все идеалы V_μ с лексикографически меньшими λ диаграммами μ, мы заключаем, что $S_\lambda \simeq V_\lambda$. □

Следствие 7.3

В разложении представления M_λ в прямую сумму неприводимых встречаются только модули S_μ с $\mu \rhd \lambda$, а также модуль S_λ, входящий в это разложение с кратностью 1.

Доказательство. Поскольку оператор c_T переводит M_λ внутрь S_λ и нетривиально действует на S_λ, никаких других прямых слагаемых, изоморфных S_λ, в M_λ нет, т. е. S_λ входит в M_λ с кратностью 1. Если существует инъективный гомоморфизм $S_\mu \to M_\lambda$, то оператор c_U, отвечающий произвольному заполнению U формы μ, должен нетривиально действовать на M_λ. Но если $\mu \neq \lambda$ не является строго доминирующим над λ, то $c_U M_\lambda = 0$ по лем. 7.5. □

7.4.1. Табличный базис модуля Шпехта. Назовём *столбцовой развёрткой* заполнения T диаграммы λ слово, которое получится при прочтении заполнения T по столбцам, так что каждый столбец читается снизу вверх, а сами столбцы перебираются слева направо. Например, столбцовая развёртка стандартной таблицы

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\ \hline 2&5\\ \cline{1-2}\end{array}$$

это слово 21534. Линейно упорядочим все стандартные заполнения T формы λ, полагая $T \succ U$, если наибольшее из чисел, стоящих в заполнениях T и U в разных клетках, встречается в столбцовой развёртке заполнения T раньше, чем в столбцовой развёртке заполнения U.

Упражнение 7.5. Проверьте, что это отношение транзитивно.

Например, 120 стандартных заполнений формы $\begin{array}{|c|c|}\hline \ &\ \\ \hline \ &\ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array}$ выстроятся по убыванию так:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\ \hline 4&2\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\ \hline 4&1\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\ \hline 4&3\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\ \hline 4&3\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\ \hline 4&1\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\ \hline 4&2\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 4&1\\ \hline 3&2\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \cdots$$

$$\cdots \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 4&5\\ \hline 2&3\\ \hline 1\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&5\\ \hline 2&4\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\ \hline 1&4\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\ \hline 3&4\\ \hline 1\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&5\\ \hline 3&4\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\ \hline 1&4\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\ \hline 2&4\\ \hline 1\\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Главная особенность введённого порядка состоит в том, что для любой *стандартной таблицы*[1] T и любых $p \in R_T$ и $q \in C_T$ выполняются строгие неравенства $pT \succ T \succ qT$, ибо самое большое число в любом цикле перестановки p сдвигается влево, а самое большое число в любом цикле перестановки q сдвигается вверх. В частности, каждая стандартная таблица T является минимальным элементом своей R_T-орбиты $R_T T$. Из этого вытекает, что для любого заполнения $U \prec T$ таблоид $\{U\} \neq \{T\}$ в модуле M_λ.

Упражнение 7.6. Покажите, что $c_T\{U\} = 0$ для любых двух стандартных таблиц U, T, таких что $U \succ T$.

---

[1] см. n° 7.1 на стр. 114

Теорема 7.3

Векторы v_T, где T пробегает множество стандартных таблиц формы λ, образуют базис модуля Шпехта S_λ. В частности, $\dim S_\lambda = d_\lambda$.

Доказательство. Покажем, что d_λ векторов v_T, построенных по всем стандартным таблицам T, линейно независимы. Выражение вектора $v_T = \sum\limits_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) \cdot \{qT\}$ через базисные векторы $\{U\}$ пространства M_λ имеет вид $v_T = \{T\} + \sum\limits_{U \prec T} \varepsilon_U \cdot \{U\}$, где $\varepsilon_U = -1, 0, 1$, а всякая линейная зависимость между ними может быть записана в виде[1] $v_T = \sum\limits_{U \prec T} x_U \cdot v_U$. Раскладывая векторы v_T и v_U по базису из таблоидов, мы получаем равенство вида $\{T\} = \sum\limits_{U \prec T} y_U \cdot \{U\}$, невозможное в силу того, что $\{T\} \neq \{U\}$ ни для какого $U \prec T$. Из линейной независимости векторов v_T вытекает неравенство $\dim S_\lambda \geqslant d_\lambda$. С другой стороны, второе равенство из форм. (7-1) на стр. 114 и соотношение на сумму квадратов размерностей неприводимых представлений из сл. 5.6 на стр. 90 влекут равенство $\sum d_\lambda^2 = n! = \sum \dim^2 S_\lambda$. Поэтому $\dim S_\lambda = d_\lambda$. □

7.5. Кольцо представлений симметрических групп. Обозначим через $\mathfrak{R}_n$ аддитивную абелеву группу классов изоморфных представлений симметрической группы S_n, т. е. свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом $[V_\lambda]$, где V_λ пробегает множество представителей всех классов изоморфных *неприводимых* представлений S_n, так что каждое неприводимое представление S_n изоморфно одному и только одному представлению V_λ. Иначе $\mathfrak{R}_n$ можно описать как целочисленную линейную оболочку неприводимых характеров S_n в пространстве функций $S_n \to \mathbb{C}$. Положим также $\mathfrak{R}_0 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Z}$. Мы собираемся снабдить прямую сумму

$$\mathfrak{R} \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{R}_n$$

структурой *градуированного*[2] коммутативного кольца с единицей. Подчеркнём, что градуированное умножение на кольце $\mathfrak{R}$, которое мы сейчас введём, будет *отличаться* от обсуждавшегося в n° 6.2.2 на стр. 105 умножения $[U], [W] \mapsto [U \otimes W]$, имеющегося на каждом из $\mathfrak{R}_n$ в отдельности.

7.5.1. Умножение в кольце $\mathfrak{R}$. Каждая пара представлений $\varphi : S_k \to \mathrm{GL}(U)$ и $\psi : S_m \to \mathrm{GL}(W)$ задаёт представление

$$\varphi \times \psi : S_k \times S_m \to \mathrm{GL}(U \otimes W), \quad (g, h) : u \otimes w \mapsto gu \otimes hw. \tag{7-13}$$

Вложим $S_k \times S_m$ в S_{k+m} в качестве подгруппы, сохраняющей разбиение

$$\{1, 2, \dots, k+m\} = \{1, 2, \dots, k\} \sqcup \{k+1, k+2, \dots, k+m\}, \tag{7-14}$$

---

[1] для этого надо оставить слева ненулевой член с максимальным индексом T, а все остальные члены перенести направо

[2] т. е. такого, что $\mathfrak{R}_k \cdot \mathfrak{R}_m \subset \mathfrak{R}_{k+m}$

образуем представление $\operatorname{ind}(\varphi\times\psi)$ группы S_{k+m}, индуцированное представлением (7-13), и положим $[\varphi]\cdot[\psi]\overset{\text{def}}{=}[\operatorname{ind}(\varphi\times\psi)]$. Если вместо разбиения (7-14) воспользоваться другим разбиением $\{1,\dots,k+m\}=I\sqcup J$ на непересекающихся подмножества из k и m элементов, получится другая подгруппа $S_k\times S_m\subset S_{k+m}$, сопряжённая к использованной выше, и представление $\operatorname{ind}(\varphi\times\psi)$, индуцированное с этой подгруппы, будет изоморфно предыдущему.

Упражнение 7.7. Убедитесь в этом.

Таким образом, класс $[\varphi]\cdot[\psi]$ не зависит от выбора разбиения (7-14), используемого для его построения. В частности, умножение (7-13) коммутативно. Его ассоциативность вытекает из того, что для любых трёх представлений ξ, η и ζ групп S_k, S_ℓ и S_m, оба класса $([\xi]\cdot[\eta])\cdot[\zeta]$ и $[\xi]\cdot([\eta]\cdot[\zeta])$ совпадают с классом представления S_{m+n+k}, индуцированного с представления подгруппы $S_k\times S_\ell\times S_m\subset S_{m+n+k}$ в тензорном произведении пространств представлений ξ, η и ζ по правилу $(g_1,g_2,g_3)\mapsto\xi(g_1)\otimes\eta(g_2)\otimes\zeta(g_3)$.

Упражнение 7.8. Убедитесь в этом.

Дистрибутивность умножения по отношению к прямым суммам представлений следует из дистрибутивности тензорных произведений.

Лемма 7.6

Кольцо $\mathfrak{R}$ изоморфно кольцу многочленов с целыми коэффициентами от счётного числа переменных, отвечающих классам тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_k]$ групп S_k для всех $k\in\mathbb{N}$. При этом классы модулей таблоидов

$$[M_\lambda]=[\mathbb{1}_{\lambda_1}]\cdot[\mathbb{1}_{\lambda_2}]\cdot\,\cdots\,\cdot[\mathbb{1}_{\lambda_n}]=[\mathbb{1}_1]^{\ell_1}[\mathbb{1}_2]^{\ell_2}\cdots[\mathbb{1}_n]^{\ell_n},$$

где ℓ_i обозначает количество строк длины i в диаграмме λ, образуют базис кольца $\mathfrak{R}$ как модуля над $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Из сл. 7.3 вытекает, что классы таблоидных представлений $[M_\lambda]$ выражаются через неприводимые классы $[S_\lambda]$ при помощи верхней треугольной матрицы с целыми коэффициентами и единицами по главной диагонали. Поэтому классы $[M_\lambda]$ образуют базис $\mathfrak{R}$ как модуля над $\mathbb{Z}$. Поскольку представление M_λ, отвечающее диаграмме $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$, индуцировано с тривиального одномерного представления подгруппы $S_{\lambda_1}\times S_{\lambda_2}\times\,\cdots\,S_{\lambda_n}\subset S_{|\lambda|}$, класс $[M_\lambda]$ является произведением классов тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_{\lambda_i}]$ групп S_{λ_i}. Вместе с тем $[\mathbb{1}_{\lambda_i}]=[M^{(\lambda_i)}]$ это тоже модуль таблоидов, состоящих из одной строки длины λ_i. Поэтому совокупность мономов от классов тривиальных представлений в точности совпадает с совокупностью классов модулей таблойдов, а их формальное перемножение как мономов, совпадает с умножением в кольце $\mathfrak{R}$. □

7.5.2. Скалярное произведение в кольце $\mathfrak{R}$. Обозначим через $([U],[W])$ евклидово скалярное произведение на $\mathfrak{R}$, для которого базис из классов неприводимых представлений $[V_\lambda]$ является ортонормальным. Сумма $\mathfrak{R}=\bigoplus\mathfrak{R}_k$ является ортогональной относительно такого скалярного произведения, а для любых двух классов

$$[U] = \sum_{|\lambda|=n} k_\lambda \cdot [V_\lambda] \quad \text{и} \quad [W] = \sum_{|\lambda|=n} m_\lambda \cdot [V_\lambda]\,,$$

лежащих в одной и той же компоненте $\mathfrak{R}_n$, выполняется равенство

$$([U],[W]) = \sum_{|\lambda|=n} k_\lambda m_\lambda = \dim \operatorname{Hom}_{S_n}(U,W) = \big(\chi_U, \chi_W\big)_n\,, \tag{7-15}$$

где $\big(\chi_U, \chi_W\big)_n$ означает скалярное произведение характеров в алгебре функций $\mathbb{C}^{S_n}$. Для каждой диаграммы μ обозначим через m_i число её строк длины i и положим

$$z_\mu = \prod_i m_i! \cdot i^{m_i}\,, \tag{7-16}$$

так что число элементов в классе сопряжённости $C_\mu \subset S_n$, состоящем из всех перестановок циклового типа μ, равно $|C_\mu| = n!/z_\mu$. В силу зам. 6.2. на стр. 104 скалярное произведение характеров в правой части (7-15) переписывается в виде

$$\frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} \chi_U(g)\chi_W(g) = \frac{1}{n!}\sum_\mu |C_\mu| \cdot \chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu) = \sum_\mu z_\mu^{-1} \cdot \chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu)\,.$$

Таким образом, скалярное произведение классов представлений $[U],[W] \in \mathfrak{R}_n$ равно

$$([U],[W]) = \sum_\mu z_\mu^{-1} \cdot \chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu)\,. \tag{7-17}$$

7.5.3. Изоморфизм кольца $\mathfrak{R}$ с кольцом симметрических функций. В n° 4.6 на стр. 73 мы ввели на кольце Λ симметрических функций с целыми коэффициентами скалярное произведение $\langle\, *\,,\, *\,\rangle$, для которого базис из полиномов Шура s_λ является ортонормальным, базис из полных симметрических функций h_λ является двойственным к мономиальному базису m_λ, а полиномы Ньютона p_λ образуют ортогональный базис векторного пространства $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ со скалярными квадратами $\langle\, p_\lambda\,,\, p_\lambda\,\rangle = z_\lambda$. Согласно предл. 7.2 на стр. 119 значения $\psi_\lambda(C_\mu)$ характера ψ_λ таблоидного представления M_λ совпадают с коэффициентами разложения ньютоновской симметрической функции p_μ по мономиальному базису m_λ:

$$p_\mu = \sum_\lambda \psi_\lambda(C_\mu) \cdot m_\lambda\,,$$

а значит, равны скалярным произведениям симметрических функций p_λ с элементами двойственного к мономиальному базиса из полных симметрических многочленов: $\psi_\lambda(C_\mu) = \big\langle\, p_\mu\,,\, h_\lambda\,\big\rangle$, которые в свою очередь являются коэффициентами разложения полных симметрических многочленов h_λ по ортогональному базису $z_\mu^{-1} \cdot p_\mu$:

$$h_\lambda = \sum_\mu z_\mu^{-1} \big\langle\, p_\mu\,,\, h_\lambda\,\big\rangle\, p_\mu = \sum_\mu z_\mu^{-1} \cdot \chi_{M_\lambda}(C_\mu) \cdot p_\mu\,. \tag{7-18}$$

Сравнение равенств (7-18) и (7-17) подсказывает следующий результат:

Теорема 7.4
Существует изометрический изоморфизм колец $\mathrm{ch} : \mathfrak{R} \xrightarrow{\sim} \Lambda$, переводящий классы таблоидных представлений $[M_\lambda]$ в полные симметрические многочлены h_λ, классы неприводимых представлений $[S_\lambda]$ — в многочлены Шура s_λ, а инволюцию на классах представлений, заданную тензорным умножением на одномерное знаковое представление, — в каноническую инволюцию[1] ω на Λ, переводящую друг в друга s_λ и s_{λ^t}, а также h_λ и e_λ. Этот изоморфизм корректно задаётся формулой[2]

$$\mathrm{ch}([U]) \overset{\text{def}}{=} \sum_\mu z_\mu^{-1} \cdot \chi_U(C_\mu) \cdot p_\mu \,. \tag{7-19}$$

Доказательство. Отображение (7-19) очевидно линейно по $[U]$:

$$\mathrm{ch}([U]+[W]) = \mathrm{ch}([U \oplus W]) = \sum_\mu z_\mu^{-1} \cdot \chi_{U\oplus W}(C_\mu) \cdot p_\mu =$$
$$= \sum_\mu z_\mu^{-1} \cdot \big(\chi_U(C_\mu) + \chi_W(C_\mu)\big) \cdot p_\mu = \mathrm{ch}([U]) + \mathrm{ch}([W])\,.$$

Согласно лем. 7.6 на стр. 124 и сл. 3.4 на стр. 46 оба кольца $\mathfrak{R}$ и Λ являются кольцами многочленов от счётного числа переменных: первое — от классов тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_k]$ групп S_k, второе — от простейших полных симметрических многочленов[3] h_k (в обоих случаях k пробегает $\mathbb{N}$). В силу соотношения (7-18) отображение ch переводит каждый базисный моном

$$[M_\lambda] = [\mathbb{1}_{\lambda_1}] \cdot [\mathbb{1}_{\lambda_2}] \cdot \,\cdots\, \cdot [\mathbb{1}_{\lambda_n}] = [\mathbb{1}_1]^{\ell_1} [\mathbb{1}_2]^{\ell_2} \cdots [\mathbb{1}_n]^{\ell_n}$$

(где ℓ_i есть количество строк длины i в диаграмме λ) в базисный моном

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdot h_{\lambda_2} \cdot \,\cdots\, \cdot h_{\lambda_n} = h_1^{\ell_1} h_2^{\ell_2} \cdots h_n^{\ell_n}$$

с сохранением мультипликативной структуры, ибо $\mathrm{ch}\big([\mathbb{1}_k]\big) = h_k$. Тем самым, отображение (7-19) является корректно определённым изоморфизмом колец. Ортогональность отображения ch вытекает из формулы (7-17) и того, что полиномы Ньютона p_λ образуют в ортогональный базис $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ со скалярными квадратами $\langle\, p_\lambda \,,\, p_\lambda \,\rangle = z_\lambda$:

$$\langle\, \mathrm{ch}([U]) \,,\, \mathrm{ch}([W]) \,\rangle = \sum_{\lambda,\mu} z_\lambda^{-1} z_\mu^{-1} \cdot \chi_U(C_\lambda)\chi_W(C_\mu) \cdot \big\langle\, p_\mu \,,\, p_\lambda \,\big\rangle =$$
$$= \sum_\mu z_\mu^{-1} \cdot \chi_U(g)\chi_W(g) = ([U],[W])\,.$$

---

[1] см. сл. 4.2 на стр. 72

[2] не смотря на то, что она содержит знаменатели

[3] напомню, что $h_k(x)$ представляет собою сумму всех мономов полной степени k (см. n° 3.3 на стр. 46)

Из сл. 7.3 на стр. 122 вытекает, что ортонормальный базис $[S_\lambda]$ выражается через таблоидный базис $[M_\lambda]$ при помощи нижней унитреугольной матрицы:

$$[S_\lambda] = [M_\lambda] + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda} [M_\mu] \,.$$

Согласно форм. (4-22) на стр. 71 полные симметрические многочлены h_λ выражаются через многочлены Шура s_λ также при помощи нижней унитреугольной матрицы[1]

$$h_\lambda = \sum_\mu K_{\mu,\lambda} \cdot s_\mu = s_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} K_{\mu,\lambda} \cdot s_\mu \,.$$

Поэтому выражение $\mathrm{ch}\,\big([S_\lambda]\big)$ через полиномы Шура тоже задаётся некой нижней унитреугольной матрицей:

$$\mathrm{ch}\,\big([S_\lambda]\big) = \mathrm{ch}\big([M_\lambda] + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda}[M_\mu]\big) = h_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda} h_\mu = s_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} y_{\mu\lambda} s_\mu \,.$$

Из равенств $1 = \big([S_\lambda], [S_\lambda]\big) = \langle\, \mathrm{ch}([S_\lambda])\,,\, \mathrm{ch}([S_\lambda])\,\rangle = \langle\, s_\lambda\,,\, s_\lambda\,\rangle + \sum_{\mu \rhd \lambda} y_{\mu\lambda}^2 \,\big\langle\, s_\mu\,,\, s_\mu\,\big\rangle = 1 + \sum_{\mu \rhd \lambda} y_{\mu\lambda}^2$ вытекает, что все $y_{\mu\lambda} = 0$, т. е. $\mathrm{ch}\,\big([S_\lambda]\big) = s_\lambda$. Утверждение об инволюциях вытекает из сл. 7.2 на стр. 118 и сл. 4.2 на стр. 72. □

Следствие 7.4 (правило Юнга)
Кратность вхождения неприводимого представления S_μ в модуль таблоидов M_λ равна числу Костки $K_{\mu,\lambda}$.

Следствие 7.5 (правило Литтлвуда – Ричардсона)
Кратность вхождения $[S_\nu]$ в $[S_\lambda] \cdot [S_\mu]$ равна коэффициенту Литтлвуда – Ричардсона[2] $c^\nu_{\lambda\mu}$ из разложения $s_\lambda \cdot s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} \cdot s_\nu$.

Следствие 7.6 (правило ветвления индуцированных представлений)
Представление группы S_{n+1}, индуцированное неприводимым представлением S_λ подгруппы $S_n \subset S_{n+1}$, является прямой суммой однократных неприводимых представлений S_μ, диаграмма μ которых получается добавлением одной клетки к диаграмме λ.

Доказательство. Поскольку $[\mathrm{ind}(S_\lambda)] = [S_\lambda] \cdot [\mathbb{1}_1]$, утверждение вытекает из предыдущего следствия и формулы Пьери[3] для вычисления $s_\lambda \cdot h_1$. □

---

[1] напомню, что *число Костки* $K_{\mu,\lambda}$ равно количеству таблиц формы μ, заполненных λ_1 единицами, λ_2 двойками, и т. д. и отлично от нуля только при $\mu \unrhd \lambda$, а все $K_{\lambda,\lambda} = 1$ (см. формулы (4-12) – (4-13) на стр. 67)

[2] см. теор. 4.2 на стр. 70

[3] см. упр. 4.5 на стр. 70

Следствие 7.7 (правило ветвления ограниченных представлений)
Ограничение неприводимого представления S_λ группы S_n на подгруппу

$$S_{n-1} \subset S_n$$

является прямой суммой однократных неприводимых представлений S_μ, диаграмма μ которых получается выкидыванием одной клетки из диаграммы λ.

Доказательство. Это получается из предыдущего следствия по двойственности Фробениуса: кратность вхождения неприводимого представления S_μ в $\operatorname{res} S_\lambda$ равна кратности вхождения неприводимого представления S_λ в $\operatorname{ind} S_\mu$. □

Следствие 7.8 (формула Фробениуса для характеров S_n)
Значение характера χ_λ неприводимого представления S_λ симметрической группы S_n на классе сопряжённости $C_\mu \subset S_n$ равно каждому из следующих трёх чисел:

- коэффициенту при $z_\mu^{-1} \cdot p_\mu(x)$ в разложении многочлена Шура $s_\lambda(x)$ по базису $z_\mu^{-1} \cdot p_\mu(x)$ в векторном пространстве $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$
- коэффициенту при $s_\lambda(x)$ в разложении многочлена Ньютона $p_\mu(x)$ по базису Шура $s_\lambda(x)$ в $\mathbb{Z}$-модуле Λ
- коэффициенту при одночлене $x^{\lambda+\delta} = x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \cdots x_n^{\lambda_n}$ в многочлене
$$p_\mu(x) \cdot \Delta_\delta(x) = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \cdots p_n(x)^{m_n} \cdot \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

где $p_k(x) = \sum\limits_i x_i^k$ суть степенные суммы Ньютона, число m_i равно количеству строк длины i в диаграмме μ, а $\Delta_\delta(x) = \det\left(x_j^{n-i}\right)$ это определитель Вандермонда.

Доказательство. Первое вытекает прямо из теор. 7.4. Второе — из свойств скалярного произведения на кольце симметрических функций: т. к. система многочленов p_μ ортогональна со скалярными квадратами z_μ, коэффициент при $z_\mu^{-1} \cdot p_\mu(x)$ в разложении s_λ по базису p_μ равен скалярному произведению $\left\langle s_\lambda , p_\mu \right\rangle$, которое в свою очередь равно коэффициенту при s_λ в разложении p_μ по ортонормальному базису s_λ. Для доказательства третьего запишем s_λ по формуле Якоби – Труди как отношение определителей $s_\lambda(x) = \Delta_{\lambda+\delta}(x)/\Delta_\delta(x)$ и умножим обе части разложения

$$p_\mu(x) = \sum_\lambda \chi_\lambda(C_\mu) \cdot \Delta_{\lambda+\delta}(x)/\Delta_\delta(x)$$

на Δ_δ. Получим равенство $p_\mu(x) \cdot \Delta_\delta(x) = \sum_\lambda \chi_\lambda(C_\mu) \cdot \Delta_{\lambda+\delta}(x)$, означающее, что $\chi_\lambda(C_\mu)$ равен коэффициенту разложения кососимметрического многочлена $p_\mu(x) \cdot \Delta_\delta(x)$ по стандартному детерминантному базису[1] $\Delta_{\lambda+\delta}(x)$. □

---

[1] см. n° 3.1.2 на стр. 43

7.5.4. Размерности неприводимых представлений. По формуле Фробениуса $\dim S_\lambda = \chi_\lambda(1)$ равна коэффициенту при $x^{\lambda+\delta} = x_1^{\lambda_1+n-1}x_2^{\lambda_2+n-2}\cdots x_n^{\lambda_n}$ в многочлене

$$p_1^n \cdot \Delta_\delta = \left(\sum x_i\right)^n \cdot \det\left(x_j^{n-i}\right) =$$

$$= \sum_{m_1 m_2 \dots m_n} \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_n!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot x_1^{n-\sigma(1)} x_2^{n-\sigma(2)} \cdots x_n^{n-\sigma(n)}$$

Обозначим длины строк строго убывающей диаграммы $\eta = \lambda + \delta$ через

$$\eta_i = \lambda_i + n - i\,.$$

Коэффициент при $x^\eta = x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \cdots x_n^{\eta_n}$ в предыдущем произведении равен

$$\sum_\sigma \frac{\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot n!}{\prod\limits_j \left(\eta_j - n + \sigma(j)\right)!} =$$

$$= \frac{n!}{\eta_1! \cdot \eta_2! \cdot \cdots \cdot \eta_n!} \cdot \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_j \eta_j \cdot \left(\eta_j - 1\right) \cdot \cdots \cdot \left(\eta_j - n + \sigma(j) + 1\right)\,,$$

где суммирование происходит по всем перестановкам $\sigma \in S_n$, для которых каждое из n чисел $\eta_j - n + \sigma(j) \geqslant 0$, и j-тый сомножитель последнего произведения сам является произведением $n - \sigma(j)$ последовательно убывающих чисел, начиная с η_j. Такая сумма представляет собою определитель

$$\det \begin{pmatrix} \eta_1 \cdots (\eta_1 - n + 1) & \eta_2 \cdots (\eta_2 - n + 1) & \cdots & \eta_n \cdots (\eta_n - n + 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_1(\eta_1 - 1) & \eta_2(\eta_2 - 1) & \cdots & \eta_n(\eta_n - 1) \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 7.9. Покажите, что он равен $\prod\limits_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$.

Таким образом, нами установлено

Следствие 7.9 (формула Фробениуса для размерностей)
Пусть $\eta = \lambda + \delta$, т. е. $\eta_i = \lambda_i + n - i$. Тогда

$$\dim S_\lambda = \frac{n!}{\eta_1! \cdot \eta_2! \cdot \cdots \cdot \eta_n!} \cdot \prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j)\,.$$

□

Упражнение 7.10 (формула крюков). Назовём *крюком* клетки a в диаграмме Юнга Г-образную поддиаграмму с углом в клетке a, состоящую из клетки a и всех клеток ниже a в том же столбце и всех клеток правее a в той же строке. Количество клеток в таком крюке обозначим через $\Gamma(a)$ и назовём *длиной крюка* клетки a. Докажите, что

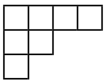
$$\dim S_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{a\in\lambda} \Gamma(a)}\,.$$

Например, для диаграммы $\lambda = (4,2,1)$ длины крюков суть

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6&4&2&1\\ \hline 3&1\\ \cline{1-2} 1\\ \cline{1-1}\end{array}$$

откуда размерность модуля Шпехта $S_{(4,2,1)}$ группы S_7 равна

$$\frac{7!}{6\cdot4\cdot3\cdot2} = 7\cdot5 = 35\,.$$

Нетривиальным следствием упр. 7.10 и теор. 7.3 на стр. 123 является возможность подсчитать количество стандартных таблиц формы λ по формуле крюков. Скажем, только что проделанное вычисление показывает, что имеется ровно 35 стандартных таблицы формы  .

Задачи для самостоятельного решения к §7

Задача 7.1. Приведите в точное соответствие со стандартными представлениями V_λ все встречавшиеся в предыдущих двух параграфах геометрические неприводимые представления групп S_3, S_4 и S_5.

Задача 7.2. Покажите, что представление S_n левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n]\cdot r_T$ индуцировано с тривиального представления подгруппы $R_T \subset S_n$, а в $\mathbb{C}[S_n]\cdot c_T$ — со знакового представления подгруппы $C_T \subset S_n$.

Задача 7.3. Покажите, что идеал $\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T$, вообще говоря, не содержится в идеале $\mathbb{C}[S_n]\cdot r_T$.

Задача 7.4. Установите для $(n-1)$-мерного симплициального представления V_Δ группы S_n изоморфизмы а) $\Lambda^k V_\Delta \simeq V_{((n-k),\,1^k)}$ б) $V_\Delta^{\otimes 2} \simeq \mathbb{C} \oplus V_\Delta \oplus V_{((n-2),2)} \oplus V_{((n-2),1,1)}$.

Задача 7.5. Докажите равенства

а) $\chi_{((n-2),1,1)}(C_\mu) = \binom{m_1-1}{2} - m_2$ б) $\chi_{((n-2),2)}(C_\mu) = \binom{m_1-1}{2} + m_2 - 1$

Задача 7.6. С какой кратностью входят в индуцированное одномерным представлением максимального цикла умножением на $e^{2\pi i/n}$ а) знаковое б) симплициальное представления?

Задача 7.7. Покажите, что значение неприводимого характера χ_λ группы S_n на максимальном цикле равно $(-1)^k$ при $\lambda = \big((n-k),\,1^k\big)$ и нулю для всех прочих λ.

Задача 7.8. Пусть $\lambda = \lambda^t$ состоит из k симметричных крюков строго убывающих длин $\gamma_i = 2(\lambda_i - i + 1) - 1$, $1 \leqslant i \leqslant k$, с вершинами на главной диагонали. Покажите, что $\chi_\lambda(C_\gamma) = (-1)^{(n-k)/2}$.

Задача 7.9. Покажите, что неприводимое представление V_μ группы S_m входит в разложение представления, индуцированного с неприводимого представления V_ν подгруппы $S_n \subset S_m$, если и только если $\mu \supset \nu$, и его кратность равна числу таких заполнений косой диаграммы $\mu \setminus \nu$ числами от 1 до $m-n$ без повторений, где эти числа строго возрастают по строкам и столбцам.

Задача 7.10. Сформулируйте и докажите двойственное утверждение про ограничения неприводимых представлений.

Задача 7.11. Покажите, что V_λ это единственное общее неприводимое слагаемое у M^λ и $M^\lambda \otimes V_{(1^n)}$.

Задача 7.12. Покажите, что $[V_\nu] \cdot [V_{(1^n)}] = \oplus V_\mu$, где μ пробегает множество диаграмм, которые можно получить из ν добавлением n клеток так, чтобы никакие 2 не попали в одну строку.

Задача 7.13. Покажите, что V_λ входит в $V_\mu \otimes V_\nu$ с кратностью $\sum\limits_\eta z_\eta^{-1}\chi_\lambda(C_\eta)\chi_\mu(C_\eta)\chi_\nu(C_\eta)$, которая при $\lambda = (n)$ равна $\delta_{\mu,\nu}$, а при $\lambda = (1^n)$ равна δ_{μ,ν^t}.

Задача 7.14. Докажите, что $\dim V_\lambda < |\lambda|$ только у тривиального, знакового, симплициального и тензорного произведения симплициального и знакового представлений, а также у представления $V_{(2,2)}$ группы S_4 и представлений $V_{(2,2,2)}$ и $V_{(3,3)}$ группы S_6 .

§8. $\mathfrak{sl}_2$-модули.

8.1. Алгебры Ли. Всюду в этом разделе мы считаем, что $\Bbbk$ — произвольное поле характеристики нуль. Векторное пространство $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй Ли*, если на нём задана билинейная кососимметричная *скобка*

$$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\,,\quad X,Y\mapsto[X,Y]=-[Y,X]\,,$$

удовлетворяющая *тождеству Якоби*:

$$\forall\,X,Y,Z\quad [X,[Y,Z]]=[[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]]\,.$$

Пример 8.1 (коммутаторная алгебра)
На каждой ассоциативной алгебре A над полем $\Bbbk$ имеется структура алгебры Ли, задаваемая *коммутатором* $[a,b]\overset{\text{def}}{=}ab-ba$. Эта алгебра Ли называется *коммутаторной алгеброй* ассоциативной алгебры A.

Упражнение 8.1. Убедитесь, что коммутаторы удовлетворяют тождеству Якоби.

8.1.1. Универсальная обёртывающая алгебра. Для каждой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует ассоциативная алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ и такое линейное отображение

$$\nu\,:\,\mathfrak{g}\to\mathfrak{U}(\mathfrak{g})\,,$$

переводящее для всех $X,Y\in\mathfrak{g}$ скобку $[X,Y]$ в коммутатор $\nu(X)\nu(Y)-\nu(Y)\nu(X)$, что любое линейное отображение $\psi\,:\,\mathfrak{g}\to A$ в ассоциативную алгебру A, переводящее скобку на $\mathfrak{g}$ в коммутатор в A, однозначно представляется в виде $\psi=\widetilde{\psi}\circ\nu$, где $\widetilde{\psi}\,:\,\mathfrak{U}(\mathfrak{g})\to A$ — гомоморфизм ассоциативных алгебр.

Упражнение 8.2. Удостоверьтесь, что это универсальное свойство определяет алгебру $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ и линейное отображение $\nu\,:\,\mathfrak{g}\to\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ однозначно с точностью до единственного перестановочного с ν изоморфизма ассоциативных алгебр.

Ассоциативная алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ называется *универсальной обёртывающей* алгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Её можно построить как фактор тензорной алгебры $T(\mathfrak{g})$ по двустороннему идеалу, порождённому всевозможными разностями

$$X\otimes Y-Y\otimes X-[X,Y]\,\in\,\mathfrak{g}^{\otimes 2}\oplus\mathfrak{g}\,.$$

Упражнение 8.3. Проверьте, что эта фактор алгебра обладает требуемым универсальным свойством.

8.1.2. Представления. Линейное отображение $\varrho\,:\,\mathfrak{g}\to\operatorname{End}(V)$ называется *представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если оно переводит скобку в коммутатор, т. е.

$$\forall\,A,B\in\mathfrak{g}\quad\varrho([A,B])=[\varrho(A),\varrho(B)]\,.$$

Пространство V называется в этой ситуации $\mathfrak{g}$-модулем. В силу универсального свойства обёртывающей алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, линейные представления алгебры

Ли $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ биективно соответствуют гомоморфизмам ассоциативных алгебр $\tilde{\varrho} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$, т. е. линейным представлениям ассоциативной алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Представление $\tilde{\varrho}$ отображает класс тензора $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_m$ в композицию $\varrho(A_1) \circ \varrho(A_2) \circ \ldots \circ \varrho(A_m)$, и образ $\tilde{\varrho}$ совпадает с ассоциативной оболочкой $\mathrm{Ass}\big(\varrho(\mathfrak{g})\big) \subset \mathrm{End}(V)$.

Прямая сумма $\mathfrak{g}$-модулей U и W наделяется структурой $\mathfrak{g}$-модуля с действием $F(u \dotplus w) \overset{\text{def}}{=} (Fu) \dotplus (Fw)$. Тензорные произведения, внешние и симметрические степени $\mathfrak{g}$-модулей также наделяются структурами $\mathfrak{g}$-модулей, однако в отличие от представлений групп, действие операторов $F \in \mathfrak{g}$ распространяется на произведения не по мультипликативности, а *по правилу Лейбница*: $F(u \otimes w) \overset{\text{def}}{=} (Fu) \otimes w + u \otimes (Fw)$, $F(u \wedge w) \overset{\text{def}}{=} (Fu) \wedge w + u \wedge (Fw)$, $F(u \cdot w) \overset{\text{def}}{=}$ $\overset{\text{def}}{=} (Fu) \cdot w + u \cdot (Fw)$. Для любого $\mathfrak{g}$-подмодуля $V \subset W$ фактор пространство W/V также является $\mathfrak{g}$-модулем с действием $F[v] \overset{\text{def}}{=} [Fv]$.

Упражнение 8.4. Убедитесь, что эти правила корректны и переводят коммутаторы в коммутаторы.

Двойственное представление $\varrho^* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V^*)$ к представлению $\varrho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ определяется правилом $\varrho^*(F) \overset{\text{def}}{=} -\varrho(F)^*$ и взаимодействует со свёрткой по формуле $\langle\, \varrho^*(F)\,\xi\,,\, w\,\rangle + \langle\, \xi\,,\, \varrho(F)\,w\,\rangle = 0$. Действие $\mathfrak{g}$ на пространстве $\mathrm{Hom}(U,V)$ задаётся правилом

$$F : \varphi \mapsto [F,\varphi] \overset{\text{def}}{=} F\varphi - \varphi F\,. \tag{8-1}$$

Упражнение 8.5. Проверьте, что коммутатор при этом представится коммутатором и что канонический изоморфизм $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U,V)$ согласован с действием $\mathfrak{g}$.

Подпространство неподвижных векторов представления (8-1) обозначается

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U,V) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to V \mid \forall F \in \mathfrak{g}\ F\varphi = \varphi F\}$$

и называется пространством $\mathfrak{g}$-*инвариантных* операторов[1].

8.2. Описание конечномерных неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей. В различных областях математики важную роль играет алгебра Ли бесследных 2×2-матриц

$$\mathfrak{sl}_2(\Bbbk) \overset{\text{def}}{=} \{A \in \mathrm{Mat}_2(\Bbbk) \mid \operatorname{tr} A = 0\}\,.$$

Обозначение связано с тем, что это векторное пространство состоит из касательных векторов к квадрике $\mathrm{SL}_2(\Bbbk) = \{g \in \mathrm{Mat}_2(\Bbbk) \mid \det g = 1\}$ в точке E.

Упражнение 8.6. Убедитесь в этом.

В качестве стандартного базиса в $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ мы используем матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{8-2}$$

которые коммутируют по правилам:

$$[X,Y] = H\,, \quad [H,X] = 2\,X\,, \quad [H,Y] = -2\,Y\,. \tag{8-3}$$

---

[1] а также $\mathfrak{g}$-*гомоморфизмов*

Линейное представление $\mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(V)$ задаётся указанием трёх операторов $X, Y, H : V \to V$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (8-3).

Пример 8.2 (стандартные $\mathfrak{sl}_2$-модули)
Дифференциальные операторы

$$X = x\,\frac{\partial}{\partial y}\,, \quad Y = y\,\frac{\partial}{\partial x}\,, \quad H = x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y} \tag{8-4}$$

действуют на пространстве многочленов $\Bbbk[x, y]$ сохраняя степень. Обозначим через $V_n \subset \Bbbk[x, y]$ подпространство однородных многочленов степени n. Действие операторов (8-4) на одномерном пространстве $V_0 \simeq \Bbbk$ нулевое, а на двумерном пространстве V_1 задаётся в базисе x, y матрицами (8-2), т. е. является тавтологическим представлением $\mathfrak{sl}_2 \subset \mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$ на $\Bbbk^2$. Действие операторов (8-4) на пространстве $V_n = S^n V_1$ является продолжением тавтологического представления на его симметрическую степень по правилу Лейбница.

Упражнение 8.7. Проверьте, что линейный дифференциальный оператор первого порядка $F = a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ удовлетворяет правилу Лейбница

$$F(gh) = F(g) \cdot h + g \cdot F(h)$$

и что коммутатор двух таких операторов также является линейным дифференциальным оператором первого порядка.

Модули V_n называются *стандартными*. В базисе $e_k = x^k y^{n-k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, действие операторов X, Y, H задаётся формулами

$$X(e_k) = (n - k)\, e_{k+1}\,, \quad Y(e_k) = k\, e_{k-1}\,, \quad H(e_k) = (2k - n)\, e_k\,. \tag{8-5}$$

Предложение 8.1
Все стандартные $\mathfrak{sl}_2$-модули V_n неприводимы.

Доказательство. Разложим произвольный вектор $v \in V_n$ по базису $e_k = x^k y^{n-k}$ и обозначим через m наибольший из номеров базисных векторов, входящих в это разложение с ненулевым коэффициентом. В силу формул (8-5) векторы $X^k Y^m v$ с $0 \leqslant k \leqslant n$ являются ненулевыми кратными базисных векторов e_k. Следовательно, $\mathfrak{sl}_2$-орбита любого вектора v линейно порождает всё пространство V_n. □

Лемма 8.1
В любом $\mathfrak{sl}_2$-модуле операторы X и Y переводят каждое собственное подпространство оператора H с собственным значением λ в в собственные подпространства оператора H с собственными значениями $\lambda + 2$ и $\lambda - 2$ соответственно.

Доказательство. Пользуясь соотношениями $HX - XH = 2\,X$ и $HY - YH = -2Y$, получаем для вектора v с $Hv = \lambda v$ равенства $HXv = XHv + 2Xv = (\lambda + 2)\,Xv$ и $HYv = YHv - 2Yv = (\lambda - 2)\,Yv$. □

Определение 8.1
Собственные значения оператора H на неприводимом модуле V называются *весами*, а собственные векторы — *весовыми векторами*. Весовые векторы, находящиеся в ядре оператора X называются *примитивными*.

Лемма 8.2
Любой конечномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль над алгебраически замкнутым полем обладает примитивным вектором.

Доказательство. Действуя на произвольный весовой вектор $v \neq 0$ оператором X, получаем цепочку собственных векторов $v, Xv, X^2v, \dots$ оператора H со строго возрастающими собственными числами. Поскольку у H имеется лишь конечное число ненулевых собственных подпространств, лишь конечное число векторов этой цепочки отлично от нуля. Последний из них и будет примитивным. □

Лемма 8.3
В конечномерном $\mathfrak{sl}_2$-модуле над полем характеристики нуль вес каждого примитивного вектора является натуральным числом, и $\mathfrak{sl}_2$-орбита примитивного вектора веса m изоморфна стандартному модулю V_m.

Доказательство. Пусть $Hv = \lambda v$ и $Xv = 0$. По лем. 8.1 векторы $v, Yv, Y^2v, \dots$ являются собственными для H с собственными числами λ, $(\lambda - 2)$, $(\lambda - 4)$, … Поэтому существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $Y^{m+1}v = 0$, а $Y^m v \neq 0$. Обозначим этот последний ненулевой вектор через $v_0 = Y^m v$, а его предшественников — через $v_1, v_2, \dots, v_m = v$, так что вся цепочка примет вид

$$0 \xleftarrow{Y} v_0 \xleftarrow{Y} v_1 \xleftarrow{Y} v_2 \xleftarrow{Y} \dots \xleftarrow{Y} v_{m-1} \xleftarrow{Y} v_m \xrightarrow{X} 0$$

Оператор H действует на векторы цепочки как $Hv_i = (\lambda - 2\,(m-i))\,v_i$. Пользуясь соотношением $XY = YX + H$, вычисляем действие на них оператора X:

$$\begin{aligned}
Xv_m &= 0\\
Xv_{m-1} &= XYv_m = YXv_m + Hv_m = \lambda v_m\\
Xv_{m-2} &= XYv_{m-1} = YXv_{m-1} + Hv_{m-1} = (2\lambda - 2)\,v_{m-1}\\
Xv_{m-3} &= XYv_{m-2} = YXv_{m-2} + Hv_{m-2} = (3\lambda - (2+4))\,v_{m-2}\\
\dots\quad & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\
Xv_{m-k} &= XYv_{m-k+1} = YXv_{m-k+1} + Hv_{m-k+1} =\\
&= \big(k\lambda - (2 + 4 + \dots + 2(k-1))\big)\,v_{m-k+1} = k\,(\lambda - k + 1)\,v_{m-k+1}\\
\dots\quad & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\
Xv_0 &= m\,(\lambda - m + 1)\,v_1
\end{aligned}$$

Следующий такой шаг даёт нулевой вектор

$$0 = XYv_0 = YXv_0 + Hv_0 = (m+1)(\lambda - m)\,v_0\,,$$

что возможно только при $\lambda = m$. В этом случае операторы X, Y, H действуют по формулам $X(v_k) = (m-k)(k+1)\,v_{k+1}$, $Y(v_k) = v_{k-1}$, $H(v_k) = (2k-m)\,v_k$ и отображение $v_k \mapsto \frac{1}{k!}\,x^k y^{m-k}$ отождествляет линейную оболочку векторов v_k с модулем V_m. □

Теорема 8.1

Конечномерные неприводимые $\mathfrak{sl}_2$-модули над любым полем $\Bbbk$ характеристики нуль исчерпываются стандартными модулями V_n.

Доказательство. Обозначим через $\overline{\Bbbk} \subset \Bbbk$ какое-нибудь алгебраическое замыкание[1] поля $\Bbbk$ и рассмотрим тензорное произведение $\overline{V} = \overline{\Bbbk} \otimes V$ векторных пространств над полем $\Bbbk$. Правило $\lambda \cdot (\mu \otimes v) \overset{\text{def}}{=} (\lambda\mu) \otimes v$ наделяет $\overline{V}$ структурой векторного пространства над полем $\overline{\Bbbk}$, и любой $\Bbbk$-линейный оператор $F : V \to V$ продолжается до $\overline{\Bbbk}$ линейного оператора $\overline{F} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id} \otimes F : \overline{V} \to \overline{V}$.

Упражнение 8.8. Покажите, что для любого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V над $\Bbbk$ векторы $\overline{e}_p = 1 \otimes e_p$ образуют базис пространства $\overline{V}$ над $\overline{\Bbbk}$, и матрица оператора $\overline{F}$ в этом базисе совпадает с матрицей F в базисе e_p

Если пространство V является $\mathfrak{sl}_2$-модулем, то пространство $\overline{V}$ также является $\mathfrak{sl}_2$-модулем относительно действия операторов $\overline{X}$, $\overline{Y}$ и $\overline{H}$. В силу предыдущей леммы у оператора $\overline{H}$ существует целое собственное число. По упр. 8.8 оно является собственным числом и для оператора H на пространстве V. Повторяя рассуждения из доказательства лем. 8.2, заключаем, что в пространстве V имеется примитивный вектор, и тогда по лем. 8.3 он порождает в V стандартный $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль, который должен совпасть со всем V, поскольку V неприводимо. □

8.3. Полная приводимость $\mathfrak{sl}_2$-модулей. Сопоставление матрице $F \in \mathfrak{sl}_2$ оператора коммутирования $\mathrm{ad}_F : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{sl}_2\,,\ Z \mapsto [F, Z]$, задаёт *присоединённое представление* $\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$.

Упражнение 8.9. Проверьте, что $\mathrm{ad}_{[F,G]} = [\mathrm{ad}_F, \mathrm{ad}_G]$ и что $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ является $\mathfrak{sl}_2$-модулем относительно действия $F : \varphi \mapsto [\mathrm{ad}_F, \varphi]$.

На ассоциативной алгебре $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ имеется каноническая симметричная билинейная форма — след композиции $\mathrm{tr}(\varphi\psi)$. Её ограничение на образ присоединённого представления задаёт на $\mathfrak{sl}_2$ невырожденную симметричную билинейную *форму Киллинга*

$$(F, G) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_F \circ \mathrm{ad}_G)\,. \tag{8-6}$$

---

[1] см. теор. 13.3 на стр. 234

Упражнение 8.10. Проверьте, что её матрица Грама в базисе X, Y, H равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Двойственным к базису X, Y, H относительно формы Киллинга является базис

$$X^* = \frac{1}{4} Y , \quad Y^* = \frac{1}{4} X , \quad H^* = \frac{1}{8} H .$$

Форма Киллинга задаёт изоморфизм $\mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}_2^*$, переводящий вектор F в ковектор $G \mapsto (F, G)$. Обратное отображение продолжается до изоморфизма

$$\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathfrak{sl}_2^* \otimes \mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2 , \tag{8-7}$$

тождественно действующего на втором тензорном сомножителе и переводящего тождественный эндоморфизм $\mathrm{Id}_{\mathfrak{sl}_2} \in \mathrm{End}\, \mathfrak{sl}_2$ в *тензор Казимира*

$$X^* \otimes X + Y^* \otimes Y + H^* \otimes H = \frac{1}{4} \, (X \otimes Y + Y \otimes X) + \frac{1}{8} \, H \otimes H .$$

Каждое линейное представление $\varrho : \mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(V)$ продолжается до представления $\tilde{\varrho} : \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(V)$, $\tilde{\varrho}(A \otimes B) = \varrho(A)\varrho(B)$.

Упражнение 8.11. Проверьте, что композиция представления $\tilde{\varrho}$ с изоморфизмом (8-7) является гомоморфизмом $\mathfrak{sl}_2$-модулей[1] $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \to \mathrm{End}(V)$.

Представление $\tilde{\varrho}$ переводит тензор Казимира в оператор[2]

$$K \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{4} \, (XY + YX) + \frac{1}{8} \, H^2 ,$$

который называется *оператором Казимира*. Из предыдущего упражнения вытекает, что $K \in \mathrm{End}_{\mathfrak{sl}_2}(V)$.

Упражнение 8.12. Убедитесь прямым вычислением, что K коммутирует с X, Y, H и действует на стандартном неприводимом модуле V_m гомотетией с коэффициентом $\frac{1}{8} \, (m^2 + 2\,m)$.

Лемма 8.4

В любом конечномерном $\mathfrak{sl}_2$-модуле V к каждому подмодулю U коразмерности 1 имеется дополнительный 1-мерный тривиальный $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль L, такой что $V = U \oplus L$.

---

[1] действие оператора $F \in \mathfrak{sl}_2$ на $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ задаётся коммутатором с присоединённым представлением: $F : \varphi \mapsto [\mathrm{ad}_F, \varphi]$, а на $\mathrm{End}(V)$ — коммутатором с ϱ: $F : \varphi \mapsto [\varrho(F), \varphi]$

[2] далее мы, как и ранее, опускаем символ ϱ, обозначим буквами X, Y, Z образы базисных операторов $\mathfrak{sl}_2$ в представлении ϱ

Доказательство. Поскольку в коммутативной алгебре эндоморфизмов одномерного векторного пространства все коммутаторы нулевые, каждый одномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль тривиален: $H = [X,Y] = 0$, $2X = [H,X] = 0$, $2Y = [Y,H] = 0$. В частности, фактор модуль V/U по любому подмодулю $U \subset V$ коразмерности 1 тривиален, т. е. все три оператора X, Y, H переводят V в U.

Строить дополнительный к U тривиальный одномерный подмодуль L будем индукцией по $\dim U$. Если подмодуль U тривиален[1], то и модуль V тривиален, т. к. по предыдущему $\mathfrak{sl}_2 V = [\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2] V \subset \mathfrak{sl}_2 \mathfrak{sl}_2 V \subset \mathfrak{sl}_2 U = 0$. В этом случае любое дополнительное к U одномерное подпространство $L \subset V$ является искомым подмодулем. Если $U \simeq V_m$ нетривиален и неприводим, оператор $\frac{8}{m^2+2m} K : V \to U$ по упр. 8.12 тождественно действует на U и перестановочен с действием $\mathfrak{sl}_2$, т. е. является $\mathfrak{sl}_2$-инвариантным проектором V на U. В этом случае $L = \ker K$. Если же подмодуль U приводим, выберем в нём ненулевой неприводимый подмодуль $W \subsetneq U$ и сначала по индуктивному предположению построим $\mathfrak{sl}_2$-инвариантное разложение фактора $(V/W) = (U/W) \oplus (\tilde{L}/W)$, в котором $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль $\tilde{L} \subset V$ таков, что $L \cap U = W$ и $\dim(L/W) = 1$, а затем, применяя индуктивное предположение к паре $W \subset \tilde{L}$, построим инвариантное разложение $\tilde{L} = W \oplus L$. Тривиальный 1-мерный подмодуль $L \subset \tilde{L} \subset V$ дополнителен к U. □

Теорема 8.2

Всякий конечномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль V вполне приводим, т. е. является прямой суммой стандартных простых модулей V_m из прим. 8.2 на стр. 134.

Доказательство. Чтобы построить $\mathfrak{sl}_2$-инвариантный проектор модуля V на произвольный подмодуль $U \subset V$, рассмотрим в $\mathfrak{sl}_2$-модуле[2] $\mathrm{Hom}(V,U)$ подпространства $W = \{\varphi : \varphi|_U \in \Bbbk \cdot \mathrm{Id}_U\}$ и $W' = \{\varphi \in W : \varphi|_U = 0\} \subset W$.

Упражнение 8.13. Убедитесь, что W и W' являются $\mathfrak{sl}_2$-подмодулями[3] и коразмерность W' в W равна 1.

По предыдущей лемме $W = W' \oplus L$, для некоторого тривиального $\mathfrak{sl}_2$-модуля $L \subset W$. Искомым проектором $V \twoheadrightarrow U$ является базисный вектор подмодуля L, отскалированный так, чтобы его ограничение на U было тождественным оператором. □

---

[1] что так, если $\dim U = 1$

[2] см. 8-1 на стр. 133

[3] т. е. $[X,\varphi]$, $[Y,\varphi]$ и $[H,\varphi]$ лежат в W (соотв. в W') для любого $\varphi \in W$ (соотв. $\varphi \in W'$)

Задачи для самостоятельного решения к §8

Задача 8.1. Покажите, что в любом конечномерном представлении $\mathfrak{sl}_2$ операторы X и Y нильпотентны, а H диагонализуем.

Задача 8.2. Покажите, что для билинейной формы Киллинга[1] $(a,b) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_a \circ \operatorname{ad}_b)$ на $\mathfrak{sl}_2$ при всех $a,b,c \in \mathfrak{sl}_2$ выполняется равенство$([a,b],c) + (b,[a,c]) = 0$.

Задача 8.3. Напишите коммутационные соотношения на матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

образующие базис алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ над $\mathbb{C}$, вычислите в этом базисе матрицу Грама формы Киллинга и выразите двойственный базис $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$ и тензор Казимира $\varkappa = \mathrm{Id}_{\mathfrak{sl}_2} \in \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) = \mathfrak{sl}_2^* \otimes \mathfrak{sl}_2 \simeq \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2$ через через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Задача 8.4 (Разложение Клебша – Гордана). Разложите $V_m \otimes V_n$ в прямую сумму стандартных и выясните, при каких m, n это разложение содержит а) V_0 б) V_1.

Задача 8.5. Существует ли на V_n $\mathfrak{sl}_2$-инвариантное скалярное произведение[2]? Если да, то насколько оно единственно? Можно ли выбрать его симметричным и/или кососимметричным?

Задача 8.6. При каких условиях на натуральные числа m, n, k имеется $\mathfrak{sl}_2$-инвариантный оператор $\varepsilon^k_{mn} : V_m \otimes V_n \to V_k$? Много ли таких операторов, когда они есть?

Задача 8.7. Разложите в сумму стандартных естественное представление[3] $\mathfrak{sl}_2$ на пространстве $W = V_1^* \otimes V_1 = \mathrm{End}(V_1)$, а также $W^{\otimes 2}$, S^2W и $\Lambda^2 W$.

Задача 8.8. Покажите, что $S^n(V_2) = \bigoplus\limits_{i=0}^{[n/2]} V_{2n-4i}$.

Задача 8.9. Разложите $S^2(V_3)$ в сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей и сопоставьте результат с тем, что пространство квадрик в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V_3)$ распадается в прямую сумму подпространства квадрик, содержащих кубическую кривую Веронезе, и некоторого дополнительного к нему SL_2-инвариантного подпространства (какого?), и что *гессиан* $\mathrm{Hes} : f(t_0, t_1) \mapsto \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}\right)$ задаёт SL_2-инвариантное квадратичное отображение из бинарных кубических форм в квадратичные.

Задача 8.10. Разложите S^3V_3 в сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей.

Задача 8.11. Покажите, что $S^mV_n \simeq S^nV_m$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$.

---

[1] см. 8-6 на стр. 136

[2] т. е. такая невырожденная билинейная форма $\beta \in V_n^* \otimes V_n^*$, что $\forall\, v, w \in V_n$ и $\forall\ a \in \mathfrak{sl}_2$ $\beta(av, w) + \beta(v, aw) = 0$

[3] т. е. коммутированием: $a : \varphi \mapsto [a, \varphi]$

§9. Категории и функторы

9.1. Категории. Категория $\mathcal{C}$ — это *класс*[1] объектов, обозначаемый $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$, в котором для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ задано *множество* морфизмов $\operatorname{Hom}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Морфизмы из X в Y удобно представлять себе в виде стрелок $\varphi : X \to Y$. Для разных пар объектов эти множества стрелок не пересекаются. Объединение всех стрелок категории $\mathcal{C}$ обозначается $\operatorname{Mor}\mathcal{C} = \bigsqcup_{X,Y} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Для каждой тройки объектов $X, Y, Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ имеется отображение композиции[2]

$$\operatorname{Hom}(Y,Z) \times \operatorname{Hom}(X,Y) \to \operatorname{Hom}(X,Z)\,, \quad (\varphi,\psi) \mapsto \varphi \circ \psi \quad (= \varphi\psi\,)\,, \tag{9-1}$$

ассоциативное в том смысле, что $(\chi \circ \varphi) \circ \psi = \chi \circ (\varphi \circ \psi)$ всякий раз, когда эти композиции определены. Наконец, у каждого объекта $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ есть *тождественный морфизм* $\operatorname{Id}_X \in \operatorname{Hom}(X,X)$, который для любых стрелок $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Z \to X$ удовлетворяет условиям[3] $\varphi \circ \operatorname{Id}_X = \varphi$ и $\operatorname{Id}_X \circ \psi = \psi$.

Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ — это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из $\mathcal{C}$. Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ называется *полной*, если $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ для любых $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$. Категория называется *малой*, если $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ это *множество*, а не больший класс. В этом случае $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ тоже является множеством.

Пример 9.1 (категории, не являющиеся малыми)
Часто возникающие в примерах категории, *не* являющиеся малыми — это категория $\mathcal{S}et$ всех множеств и всех отображений, категория $\mathcal{T}op$ топологических пространств и непрерывных отображений, категория векторных пространств над полем $\Bbbk$ и $\Bbbk$-линейных отображений $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ и её полная подкатегория $vec_{\Bbbk}$ конечномерных пространств, категории R-$\mathcal{M}od$ и $\mathcal{M}od$-R левых и правых модулей над кольцом R и R-линейных отображений и их полные подкатегории R-mod и mod-R конечно представимых[4] модулей, категория $\mathcal{A}b = \mathbb{Z}$-$\mathcal{M}od$ абелевых групп и их гомоморфизмов, категория $\mathcal{G}rp$ всех групп и групповых гомоморфизмов, категория $\mathcal{C}mr$ коммутативных колец с единицей и гомоморфизмов, переводящих единицу в единицу, и т. п.

---

[1] не хотелось бы вдаваться в точную формализацию этого термина (содержательную в той же мере, как формализация арифметики и теории множеств, изучаемые в стандартном курсе математической логики); отметим лишь, что такая формализация возможна и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют

[2] значок «$\circ$», как и знак умножения, принято опускать, если понятно о чём речь

[3] выкладка $\operatorname{Id}' = \operatorname{Id}' \circ \operatorname{Id}'' = \operatorname{Id}''$ показывает, что тождественный морфизм единствен

[4] модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю

Пример 9.2 (чумы и топологии)
Каждое частично упорядоченное множество M это малая категория, объекты которой суть элементы $m \in M$, а стрелки суть неравенства:

$$\mathrm{Hom}_M(n,m) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } n \leqslant m, \\ \varnothing\,, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

и прозведением стрелок $k \leqslant \ell$ и $\ell \leqslant n$ является стрелка $k \leqslant n$. Важным примером такой категории является категория $\mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств топологического пространства X, стрелками в которой являются включения:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(X)}(U,W) = \begin{cases} \text{вложение } U \hookrightarrow W, \text{ если } U \subseteq W \\ \text{пустое множество, когда } U \nsubseteq W. \end{cases}$$

Пример 9.3 (малые категории и ассоциативные алгебры)
Всякую ассоциативную алгебру A с единицей $e \in A$ можно рассматривать как малую категорию с одним объектом e и множеством стрелок $\mathrm{Hom}(e,e) = A$, композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией $\mathcal{C}$ можно связать *алгебру стрелок* $K[\mathcal{C}]$, состоящую из формальных конечных линейных комбинаций стрелок категории $\mathcal{C}$ с коэффициентами в каком – нибудь коммутативном кольце K:

$$K[\mathcal{C}] = \bigoplus_{X,Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \mathrm{Hom}(X,Y) \otimes K = \left\{ \sum x_i \varphi_i \,\middle|\, \varphi_i \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}),\ x_i \in K \right\},$$

где для множества M мы обозначаем через $M \otimes K$ свободный K-модуль с базисом M, образованный всеми конечными формальными линейными комбинациями элементов множества M с коэффициентами из K. Умножение в алгебре $K[\mathcal{C}]$ задаётся композицией стрелок

$$\varphi\psi \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi \circ \psi & \text{если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{во всех прочих случаях} \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на их линейные комбинации. Алгебру $K[\mathcal{C}]$ можно представлять себе как алгебру финитных квадратных матриц[1], строки и столбцы которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке (Y,X) стоят элементы из своего пространства $\mathrm{Hom}(X,Y) \otimes K$. Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого $f \in K[\mathcal{C}]$ существует идемпотент $e_f = e_f^2$ со свойствами $e_f \circ f = f \circ e_f = f$. В качестве такового можно взять сумму тождественных эндоморфизмов Id_X всех объектов X, являющихся началами и концами стрелок, линейной комбинацией которых является f.

---

[1] возможно бесконечного размера, но с конечным числом ненулевых элементов

9.1.1. Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Стрелка φ в категории $\mathcal{C}$ называется *мономорфизмом* (соотв. *эпиморфизмом*), если на неё можно сокращать слева (соотв. справа), т. е. когда $\varphi\alpha = \varphi\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ (соотв. $\alpha\varphi = \beta\varphi \Rightarrow \alpha = \beta$). Стрелка $\varphi : X \to Y$ называется *изоморфизмом* (или *обратимой* стрелкой), если существует такая стрелка $\psi : Y \to X$, что $\varphi\psi = \mathrm{Id}_Y$ и $\psi\varphi = \mathrm{Id}_X$. В этой ситуации объекты X и Y называются *изоморфными*, а морфизмы φ и ψ — *обратными* друг к другу.

Пример 9.4 (комбинаторные симплексы)
Обозначим через $\varDelta_{\mathrm{big}}$ категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества X, а морфизмами — сохраняющие порядок отображения[1]. Категория $\varDelta_{\mathrm{big}}$ не является малой[2], но содержит полную малую подкатегорию $\varDelta \subset \varDelta_{\mathrm{big}}$, объектами которой являются конечные подмножества в $\mathbb{Z}$ вида

$$[n] \overset{\text{def}}{=} \{0,\, 1,\, \dots\, ,\, n\}\,, \quad n \geqslant 0\,, \tag{9-2}$$

со стандартным порядком. Множество (9-2) называется n-мерным *комбинаторным симплексом*, а категория $\varDelta$ — *симплициальной категорией*. Для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\varDelta_{\mathrm{big}}$ имеется *единственный* изоморфизм $n_X : X \xrightarrow{\sim} [n]$ с *единственным* $[n] \in \mathrm{Ob}\,\varDelta$, а именно нумерация элементов X в порядке возрастания.

Упражнение 9.1. Сколько всего стрелок в множестве $\mathrm{Hom}_{\varDelta}([n],[m])$? Сколько среди них инъективных? Сколько сюрьективных? Покажите, что алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\varDelta]$, как абстрактная ассоциативная алгебра, порождается стрелками

$$e_n = \mathrm{Id}_{[n]} \qquad \text{(тождественное отображение)} \tag{9-3}$$

$$\partial^{(i)}_n : [n-1] \hookrightarrow [n] \qquad \text{(вложение, образ которого не содержит } i\text{)} \tag{9-4}$$

$$s^{(i)}_n : [n+1] \twoheadrightarrow [n] \qquad \text{(наложение, склеивающее } i \text{ с } (i+1)\text{)} \tag{9-5}$$

и опишите образующие идеала соотношений между этими стрелками.

9.1.2. Обращение стрелок. С каждой категорией $\mathcal{C}$ связана *противоположная* категория $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\ , \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)\ , \quad \varphi^{\mathrm{opp}} \circ \psi^{\mathrm{opp}} = (\psi \circ \varphi)^{\mathrm{opp}}\ .$$

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход от алгебры $C = K[\mathcal{C}]$ к противоположной алгебре C^{opp} из тех же элементов, но с происходящим в противоположном порядке умножением.

---

[1] т. е. такие $\varphi : X \to Y$, что $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$

[2] по упомянутым выше логическим причинам, см. сноску на стр. 140

9.2. Функторы. Функтор[1] $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ это отображение $\operatorname{Ob}\mathcal{C} \to \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$, и набор таких отображений[2]

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)), \quad \varphi \mapsto F(\varphi), \tag{9-6}$$

что $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ для всех $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ всякий раз, когда композиция $\varphi \circ \psi$ определена. На языке ассоциативных алгебр функторы суть *гомоморфизмы* одной алгебры стрелок в другую. Если все отображения (9-6) сюрьективны, функтор F называется *полным*[3]. Образ такого функтора является полной подкатегорией. Если все отображения (9-6) инъективны, функтор F называется *строгим*[4]. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок. Полные строгие функторы иногда называют *вполне строгими*.

Простейшие функторы — это *тождественный функтор* $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, тождественно действующий на объектах и морфизмах, и *забывающие функторы*, действующие из какой-либо категории множеств с дополнительной структурой[5], морфизмы в которой суть сохраняющие эту структуру отображения множеств, в категорию $\mathcal{S}et$ всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре.

Пример 9.5 (геометрическая реализация комбинаторных симплексов) Зададим функтор $\Delta \to \mathcal{T}op$ из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя n-мерному комбинаторному симплексу $[n]$ стандартный n-мерный симплекс[6]

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_\nu = 1\,,\ x_\nu \geqslant 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \tag{9-7}$$

а стрелке $\varphi : [n] \to [m]$ — аффинное отображение $\varphi_* : \Delta^n \to \Delta^m$, действующее на базисные векторы по правилу $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$. Это строгий, но не полный функтор. Образующие элементы (9-4) и (9-5) алгебры стрелок категории Δ переводятся этим функтором, соответственно, во *вложение i-той грани* $\Delta^{(n-1)} \hookrightarrow \Delta^n$ и в *вырождение вдоль i-того ребра*[7] $\Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^{(n-1)}$.

9.2.1. Предпучки. Функтор $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ называется *контравариантным функтором* из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ или *предпучком* объектов категории $\mathcal{D}$ на категории $\mathcal{C}$. Такой функтор оборачивает композицию: $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

---

[1] иногда вместо слова «функтор» говорят *ковариантный функтор*

[2] по одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$

[3] по-английски: *full*

[4] по-английски: *faithful*

[5] например, геометрической — такой, как топология или структура гладкого многообразия, или алгебраической — такой, как структура группы, кольца или модуля

[6] т. е. выпуклую оболочку концов стандартных базисных векторов $e_0, e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$

[7] т. е. в проекцию симплекса на грань вдоль ребра, соединяющего i-тую вершину с $(i+1)$-й

Пример 9.6 (триангулированные пространства)

Обозначим через $\varDelta_{\mathrm{s}} \subset \varDelta$ неполную подкатегорию, объектами которой являются комбинаторные симплексы: $\mathrm{Ob}\,\varDelta_{\mathrm{s}} = \mathrm{Ob}\,\varDelta$, а качестве морфизмов допускаются только *строго возрастающие*[1] отображения. Категория $\varDelta_{\mathrm{s}}$ называется *полусимплициальной категорией*.

Упражнение 9.2. Убедитесь, что алгебра стрелок $K[\varDelta_{\mathrm{s}}]$ порождается тождественными стрелками $e_n = \mathrm{Id}_{[n]}$ и отображениями вложения граней $\partial_n^{(i)}$ из (9-4).

Предпучок множеств $X : \varDelta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории $\varDelta_{\mathrm{s}}$ называется *полусимплициальным множеством* и является ни чем иным, как комбинаторным описанием *триангулированного топологического пространства* $|X|$, которое называется *геометрической реализацией* полусимплициального множества X. В самом деле, функтор X задаёт для каждого целого неотрицательного n множество $X_n = X([n])$, точки которого следует воспринимать как дизъюнктный набор n-мерных симплексов (9-7), из коих будет склеиваться пространство $|X|$. Стрелки $\varphi : [n] \to [m]$ в категории $\varDelta_{\mathrm{s}}$ биективно соответствуют n-мерным граням m-мерного симплекса $\varDelta^m$, и отображение $X(\varphi) : X_m \to X_n$, которое функтор X сопоставляет стрелке φ, задаёт *правило склейки*: оно указывает данному m-мерному симплексу $x \in X_m$, какой именно n-мерный симплекс $X(\varphi)x \in X_n$ надлежит приклеить к нему в качестве φ-той n-мерной грани.

Упражнение 9.3. Существует ли триангуляция окружности S^1 а) тремя 0-мерными и тремя 1-мерным симплексами[2] б) одним 0-мерным и одним 1-мерным симплексом, а также триангуляция двумерной сферы S^2 в) четырьмя 0-мерными, шестью 1-мерными и четырьмя 2-мерным симплексами г) двумя 0-мерными, одним 1-мерным и одним 2-мерным симплексом и д) триангуляция 2-мерного тора одним 0-мерным, тремя 1-мерными и двумя 2-мерным симплексами? Если да, задайте все отображения $X(\varphi)$ явно, если нет, объясните почему.

Пример 9.7 (симплициальные множества)

Предпучок множеств $X : \varDelta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на всей симплициальной категории называется *симплициальным множеством*. Из симплициального множества X также можно изготовить топологическое пространство $|X|$, склеив стандартные правильные симплексы $\varDelta_x^n$, биективно сопоставленные точкам $x \in X_n$, согласно отображениям $\varphi^* \stackrel{\text{def}}{=} X(\varphi) : X_m \to X_n$, в которые функтор X переводит неубывающие отображения $\varphi : [n] \to [m]$ категории $\varDelta$: для каждого $x \in X_m$ надо приклеить точку $s \in \varDelta^n_{\varphi^*(x)}$ к точке $\varphi_*(s) \in \varDelta^m_x$, где $\varphi_* : \varDelta^n \to \varDelta^m$ — аффинное отображение симплексов, действующее на вершины как φ. Результат такой склейки формально описывается как топологическое фактор простран-

---

[1] т. е. сохраняющие порядок и инъективные

[2] т. е. можно ли получить окружность в качестве геометричекой реализации полусимплициального множества X, у которого X_0 и X_1 состоят из трёх элементов, а все остальные X_i пусты

ство топологического произведения[1] $\prod\limits_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta^n$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему все отождествления

$$\left(x, \varphi_* s\right) \simeq (\varphi^* x, s)\;, \quad \varphi : [n] \to [m]\,, \quad x \in X_m\,, \quad s \in \Delta^n\,.$$

Стрелка $\varphi = \delta\sigma : [n] \to [m]$, которая является композицией наложения $\sigma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ и вложения $\delta : [k] \hookrightarrow [m]$, предписывает вклеить n-мерный симплекс Δ^n_z, отвечающий точке $z = \sigma^* y = \sigma^* \delta^* x$ из образа φ^*, в пространство $|X|$ в виде k-мерного симплекса Δ^k_y, предварительно выродив его линейной проекцией $\sigma_* : \Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^k$, и этот k-мерный симплекс станет δ-той гранью в m-мерного симплекса Δ^m_x. По этой причине симплексы $z \in X_n$, попадающие в образ какого-либо отображения σ^*, отвечающего стрелке $\sigma : [k] \to [n]$ с $k > n$, называются *вырожденными*: в пространстве $|X|$ их видно как симплексы меньшей размерности. Использование вырожденных симплексов позволяет комбинаторно описывать более общие клеточные структуры, чем триангуляции. Например, «псевдотриангуляция» n-мерной сферы S^n, состоящая из одной 0-нульмерной вершины и одной n-мерной клетки, соответствующая описанию сферы как топологического фактора $S^n = \Delta^n / \partial\Delta^n$ стандартного n-мерного симплекса по его границе[2], является геометрической реализацией $|X|$ симплициального множества $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, у которого $X_k = X(k)$ получается из множества $\mathrm{Hom}_\Delta([k], [n])$ отождествлением всех неэпиморфных отображений в один элемент, а правило склейки $\varphi^* : X_m \to X_k$, отвечающее неубывающему отображению $\varphi : [k] \to [m]$, переводит класс стрелки $\zeta : [k] \to [n]$ в класс стрелки $\varphi\zeta : [k] \to [n]$.

Упражнение 9.4. Убедитесь, что это описание корректно задаёт предпучок и найдите количество элементов в каждом множестве X_k, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Пример 9.8 (предпучки и пучки сечений)

Термин «предпучок» впервые возник применительно к категории $\mathcal{C} = \mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств $U \subset X$ заданного топологического пространства X. Предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ объект $F(U) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, который называется *сечениями* предпучка F над U. В зависимости от категории $\mathcal{D}$ сечения могут образовывать множество, кольцо, алгебру, векторное или топологическое пространство и т. п. Включению $U \subset W$ предпучок F сопоставляет морфизм $F(W) \to F(U)$ *ограничения сечений*, определённых над W, на подмножество $U \subset W$, и результат его применения к сечению $s \in F(W)$ обозначается через $s|_U$. Вот несколько типичных примеров таких предпучков:

---

[1] в котором множества X_n рассматриваются с *дискретной*, а симплексы $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной топологией объемлющего вещественного аффинного пространства

[2] т. е. склеивании всех точек границы в одну; скажем, двумерная сфера S^2 получается таким способом из треугольника

1) предпучок Γ_E локальных сечений непрерывного отображения $p : E \to X$ имеет в качестве $\Gamma_E(U)$ множество непрерывных отображений $s : U \to E$, таких что[1] $p \circ s = \mathrm{Id}_U$, а его отображения ограничения — это обычные ограничения сечений с большего подмножества на меньшее

2) беря в примере (1) проекцию $p : X \times Y \to X$, получаем предпучок локальных непрерывных отображений $\mathcal{C}^0(X, Y)$ пространства X в пространство Y, имеющий в качестве сечений над $U \subset X$ непрерывные отображения $s : U \to Y$

3) дальнейшими специализациями примера (1) являются так называемые *структурные предпучки* $\mathcal{O}_X$: дифференцируемых функций $X \to \mathbb{R}$ на гладком вещественном многообразии X, локальных голоморфных функций $X \to \mathbb{C}$ на комплексно аналитическом многообразии X, локальных рациональных функций $X \to \Bbbk$ на алгебраическом многообразии X над полем $\Bbbk$ и т. п. (все они являются предпучками алгебр над соответствующим полем)

4) *постоянный предпучок* S имеет в качестве $S(U)$ одно и то же фиксированное множество S для всех $U \subset X$, и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы Id_S.

Предпучок F называется *пучком*, если для любого открытого W, любого семейства открытых подмножеств $U_i \subset W$, покрывающих W, и любого набора локальных сечений $s_i \in F(U_i)$, таких что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ для всех i, j, существует единственное такое сечение $s \in F(W)$, что $s|_{U_i} = s_i$ для всех i. В случае, когда имеется не более одного такого сечения[2], предпучок F называется *отделимым*. Все предпучки (1) – (4) отделимы, и только последний из них не является пучком, поскольку для покрытия дизъюнктного объединения $W = U_1 \sqcup U_2$ множествами U_1, U_2 не всякая пара констант $s_i \in S(U_i)$ является ограничением одной константы $s \in S(W)$. Тем не менее, имеется и

5) *постоянный пучок* $S^{\sim}$, имеющий в качестве $S^{\sim}(U)$ множество *непрерывных* отображений $U \to S$ в множество S, рассматриваемое с *дискретной* топологией.

Упражнение 9.5. Найдите все первообразные действительной функции $y = 1/x$.

9.2.2. Функторы Hom. С каждым объектом $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ любой категории $\mathcal{C}$ связаны функтор $h^X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов

$$h^X(Y) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(X, Y),$$

---

[1] это требование означает, что каждая точка $x \in U$ отображается в слой $p^{-1}(x)$ над нею

[2] но может не быть и ни одного

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi_* : \mathrm{Hom}(X, Y_1) \to \mathrm{Hom}(X, Y_2)$ левого умножения на φ : $\varphi_*(\psi) \overset{\text{def}}{=} \varphi \circ \psi$, и предпучок $h_X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов

$$h_X(Y) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(Y, X)\,,$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y_2, X) \to \mathrm{Hom}(Y_1, X)$ правого умножения на φ : $\varphi^*(\psi) \overset{\text{def}}{=} \psi \circ \varphi$.

Например, предпучок $h_{[n]} : \varDelta_s \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории $\varDelta_s$ задаёт стандартную триангуляцию стандартного n-мерного симплекса: множество её k-мерных симплексов $h_{[n]}([k]) = \mathrm{Hom}([k],[m])$ это в точности множество всех k-мерных граней. Предпучок $h_U : \mathcal{U}(X) \to \mathcal{S}et$ на топологическом пространстве X имеет ровно одно сечение над всеми $W \subset U$ и пустое множество сечений над любым $W \not\subset U$. Вот ещё несколько примеров.

Пример 9.9 (двойственность в категории векторных пространств)
Предпучок $h_{\Bbbk} : \mathcal{V}ec_{\Bbbk}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ сопоставляет векторному пространству V двойственное векторное пространство $h_{\Bbbk}(V) = \mathrm{Hom}(V, \Bbbk) = V^*$, а линейному отображению $\varphi : V \to W$ — двойственное отображение $\varphi^* : W^* \to V^*$, переводящее линейную форму $\xi : W \to \Bbbk$ в линейную форму $\xi \circ \varphi : V \to \Bbbk$.

Пример 9.10 (двойственность конечных упорядоченных множеств)
Это комбинаторная версия предыдущего примера. Обозначим через через ∇_{big} категорию конечных упорядоченных множеств, содержащих $\geqslant 2$ элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный[1]. Тавтологическое включение $\nabla_{\mathrm{big}} \hookrightarrow \varDelta_{\mathrm{big}}$ является строгим, но не полным функтором. Предпучки $h_{[1]} : \varDelta_{\mathrm{big}}^{\mathrm{opp}} \to \nabla_{\mathrm{big}}$ и $h_{[1]} : \nabla_{\mathrm{big}}^{\mathrm{opp}} \to \varDelta_{\mathrm{big}}$ переводят упорядоченные множества $X \in \mathrm{Ob}\,\varDelta_{\mathrm{big}}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\nabla_{\mathrm{big}}$ в множества

$$X^* \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\varDelta_{\mathrm{big}}}(X, [1]) \quad \text{и} \quad Y^* \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\nabla_{\mathrm{big}}}(Y, [1])\,,$$

порядок на которых задаётся поточечным сравнением значений:

$$\varphi \leqslant \psi\,, \quad \text{если } \varphi(x) \leqslant \psi(x) \text{ для всех } x.$$

Стрелка $\varphi : Z_1 \to Z_2$ переводится обоими функторами в морфизм правого умножения $\varphi^* : \mathrm{Hom}(Z_2, [1]) \to \mathrm{Hom}(Z_1, [1])$, $\xi \mapsto \xi \circ \varphi$.

По-другому можно сказать, что оба дуализирующих предпучка $h_{[1]}$ сопоставляют конечному упорядоченному множеству Z множество его «дедекиндовых сечений»: множество X^* для $X \in \mathrm{Ob}\,\varDelta_{\mathrm{big}}$ это множество *всех*[2] таких разбиений $X = X_0 \sqcup X_1$, что $x_0 < x_1$ для всех $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$. Аналогично, множество Y^* для $Y \in \mathrm{Ob}\,\nabla_{\mathrm{big}}$ это множество всех *собственных*[3] разбиений $Y = Y_0 \sqcup Y_1$.

---

[1] отметим, что минимальный и максимальный элементы различны

[2] включая несобственные разбиения, в которых одно из подмножеств X_i пустое

[3] т. е. таких, что оба $Y_i \neq \varnothing$

Обратите внимание, что сечения ведут себя *контра*вариантно по отношению к морфизмам: при наличии неубывающего отображения $Z_1 \to Z_2$ разбиение второго множества Z_2 индуцирует разбиение на Z_1, но не наоборот.

9.3. Естественные преобразования. Для пары функторов $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *естественным* (или *функториальным*) *преобразованием* F в G называется такое занумерованное объектами $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ семейство стрелок $f_X : F(X) \to G(X)$ в категории $\mathcal{D}$, что для любой стрелки $\varphi : X \to Y$ из $\mathcal{C}$ возникающая в категории $\mathcal{D}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "f_X"'] & F(Y) \arrow[d, "f_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(Y) \end{tikzcd} \tag{9-8}$$

коммутативна. На языке алгебр, гомоморфизм $F : K[\mathcal{C}] \to K[\mathcal{D}]$ наделяет алгебру $K[\mathcal{D}]$ структурой модуля над алгеброй $K[\mathcal{C}]$, в которой умножение элемента $b \in K[\mathcal{D}]$ на элемент $a \in K[\mathcal{C}]$ определяется правилом $a \cdot b \overset{\text{def}}{=} F(a) \cdot b$. Пара функторов F, G задаёт на алгебре $K[\mathcal{D}]$ две различных структуры $K[\mathcal{C}]$-модуля, и естественное преобразование $f : F \to G$ это $K[\mathcal{C}]$-линейный гомоморфизм между этими модулями: для любого $\varphi \in K[\mathcal{C}]$ действие на $K[\mathcal{D}]$ операторов $F(\varphi)$ и $G(\varphi)$ удовлетворяет соотношению $f \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ f$.

Пример 9.11 (категория функторов)
Функторы из малой категории $\mathcal{C}$ в произвольную категорию $\mathcal{D}$ образуют категорию $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, объектами которой являются функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, а морфизмами — естественные преобразования $f : F \to G$. Для малой категории $\mathcal{C}$ мы будем обозначать категорию предпучков $\mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{D})$ через $p\mathcal{S}h(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Опущенная буква $\mathcal{D}$ в этой записи по умолчанию означает, что $\mathcal{D} = \mathcal{S}et$, т. е.

$$p\mathcal{S}h(\mathcal{C}) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{S}et).$$

Упражнение 9.6. Проверьте, что описанное в n° 9.2.2 сопоставление $X \mapsto h_X$ задаёт функтор $\mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$, а сопоставление $X \mapsto h^X$ — предпучок $\mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)$.

9.3.1. Эквивалентность категорий. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, если имеются функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, такие что композиция GF естественно изоморфна тождественному функтору $\operatorname{Id}_{\mathcal{C}}$, а композиция FG естественно изоморфна $\operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$, т. е. имеются естественные по $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ преобразования

$$GF(X) \xrightarrow{\sim} X \quad \text{и} \quad FG(Y) \xrightarrow{\sim} Y, \tag{9-9}$$

являющиеся для всех X и Y изоморфизмами в категориях $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Такие функторы F и G называются *квазиобратными* друг другу *эквивалентностями категорий*. Подчеркнём, что наличие изоморфизмов (9-9) не означает равенств $FG = \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ или $GF = \operatorname{Id}_{\mathcal{C}}$: объекты $GF(X)$ и X могут быть различны, как и объекты $FG(Y)$ и Y.

Пример 9.12 (выбор базиса)

Обозначим через $vec_{\Bbbk}$ категорию конечномерных векторных пространств над полем $\Bbbk$, а через $\mathcal{C} \subset vec_{\Bbbk}$ — её малую полную подкатегорию со счётным множеством объектов, коими являются *координатные* пространства $\Bbbk^n$ с $n \in \mathbb{N}$ и $\Bbbk^0 = \{0\}$. Зафиксируем в каждом пространстве $V \in \operatorname{Ob} vec_{\Bbbk}$ какой-нибудь базис, т. е. выберем для каждого $V \in \operatorname{Ob} vec_{\Bbbk}$ изоморфизм[1]

$$f_V : V \xrightarrow{\sim} \Bbbk^{\dim(V)}, \tag{9-10}$$

причём для всех координатных пространств $\Bbbk^n$ положим $f_{\Bbbk^n} = \operatorname{Id}_{\Bbbk^n}$. Рассмотрим функтор $F : vec \to \mathcal{C}$, переводящий векторное пространство V в координатное пространство $\Bbbk^{\dim V}$, а стрелку $\varphi : V \to W$ — в стрелку $F(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}$, которую можно воспринимать как матрицу оператора φ в выбранных базисах пространств V и W. Покажем, что F является эквивалентностью категорий, квазиобратной к тавтологическому вложению $G : \mathcal{C} \hookrightarrow vec$. По построению мы имеем точное равенство[2] $FG = \operatorname{Id}_{\mathcal{C}}$. Противоположная композиция $GF : vec \to vec$ принимает значения в несопоставимой с vec по мощности малой подкатегории $\mathcal{C} \subset vec$. Однако изоморфизмы (9-10) задают естественное преобразование из Id_{vec} в GF, т. к. в силу определения действия функтора F на стрелки все диаграммы (9-8) коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Id}_{vec}(V) = V \arrow[r, "\varphi = \operatorname{Id}_{vec}(\varphi)"] \arrow[d, "f_V"'] & W = \operatorname{Id}_{vec}(W) \arrow[d, "f_W"] \\
GF(V) = \Bbbk^{\dim V} \arrow[r, "GF(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}"] & \Bbbk^{\dim W} = GF(W)
\end{tikzcd}$$

Тем самым, тождественный функтор Id_{vec} естественно изоморфен композиции GF.

Упражнение 9.7. Покажите, что категория Δ_{big} канонически эквивалентна симплициалной подкатегории $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$ (см. прим. 9.4 на стр. 142).

Лемма 9.1

Функтор $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг[3] и каждый объект $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $G(X)$ для некоторого (зависящего от Y) объекта[4] $X = X(Y) \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть для каждого $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ указаны $X = X(Y) \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ и изоморфизм $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X)$, причём когда $Y = G(X(Y))$, мы положим $f_{G(X)} = \operatorname{Id}_{G(X)}$.

---

[1] переводящий выбранный базис в стандартный базис в $\Bbbk^n$

[2] а не изоморфизм функторов

[3] т. е. все отображения $G : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(Y))$ являются изоморфизмами

[4] функтор G, обладающий этим свойством, называется *по-существу сюрьективным*

Зададим функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ на объектах правилом $F(Y) = X(Y)$, а для стрелки $\varphi : Y_1 \to Y_2$ положим $F(\varphi)$ равным такой стрелке[1] $\psi : X(Y_1) \to X(Y_2)$, что $G(\psi) = f_{Y_2} \circ \varphi \circ f_{Y_1}^{-1}$. Тогда $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ и для любой стрелки $\varphi : Y_1 \to Y_2$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(Y_1) = Y_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_{Y_1}"'] & Y_2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(Y_2) \arrow[d, "f_{Y_2}"] \\
GF(Y_1) = X_1 \arrow[r, "GF(\varphi)=G(\psi)"] & X_2 = GF(Y_2)\,.
\end{tikzcd}$$

Таким образом, $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X) = GF(Y)$ задают естественный изоморфизм тождественного функтора $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ с композицией GF. □

Упражнение 9.8. Покажите, что функторы дуализации $h_{\Bbbk} : vec^{\mathrm{opp}} \to vec$ и $h_{[}1]$: $\varDelta \leftrightarrows \nabla$ из прим. 9.9 и прим. 9.10 являются квазиобратными самим себе антиэквивалентностями категорий.

9.4. Представимые функторы. Предпучок $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, естественно изоморфный предпучку h_X для некоторого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, называется *представимым*, и X в этом случае называют *представляющим объектом* предпучка F. Двойственным образом, ковариантный функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ называется *копредставимым*, если он естественно изоморфен функтору h^X для какого-нибудь $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, называемого *копредставляющим объектом* функтора F.

Упражнение 9.9. Убедитесь, что тензорное произведение конечномерных векторных пространств $U \otimes V$ копредставляет функтор $vec \to \mathcal{S}et$, сопоставляющий векторному пространству W множество билинейных отображений $U \times V \to W$.

Множество $X_n = X([n])$ всех n-мерных симплексов триангулированного топологического пространства $X : \varDelta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ можно описать как множество всех *симплициальных*[2] отображений из стандартным образом триангулированного n-мерного симплекса в X, т. е. как $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\varDelta_{\mathrm{s}})}\left(h_{[n]}, X\right)$. Обобщением этого наблюдения является

Лемма 9.2 (лемма Ионеды 1)

Для любого предпучка множеств $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на произвольной категории $\mathcal{C}$ имеется функториальная по F и A биекция

$$F(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, F)\,, \tag{9-11}$$

которая переводит элемент $a \in F(A)$ в естественное преобразование

$$f_X : \mathrm{Hom}(X, A) \to F(X)\,, \tag{9-12}$$

отправляющее стрелку $\varphi : X \to A$ в значение морфизма $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратное к (9-11) отображение сопоставляет естественному

---

[1] поскольку $G : \mathrm{Hom}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(G(X_1), G(X_2))$ является изоморфизмом, стрелка ψ существует и единственна

[2] т. е. переводящих грань в грань той же размерности и линейных на каждой грани

преобразованию (9-12) значение морфизма $f_A : h_A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h_A(A)$.

Доказательство. Для любого естественного преобразования (9-12), любого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любой стрелки $\varphi : X \to A$ мы имеем коммутативную диаграмму (9-8)

$$\begin{tikzcd}
h_A(A) = \mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "h_A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \mathrm{Hom}(X,A) = h_A(X) \arrow[d, "f_X"] \\
F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X)\,,
\end{tikzcd} \tag{9-13}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$. Это означает, что естественное преобразование $f : h_A \to F$ однозначно восстанавливается по элементу $a = f_A(\mathrm{Id}_A) \in F(A)$. Каждому элементу $a \in F(A)$ при этом отвечает преобразование (9-12), переводящее $\varphi \in \mathrm{Hom}(X,A)$ в $f_X(\varphi) = F(\varphi)(a) \in F(X)$, естественное, поскольку для любой стрелки $\psi : Y \to X$ и всех $\varphi \in h_A(X)$ имеем $f_Y\left(h_A(\psi)\varphi\right) = f_Y(\varphi\psi) = F(\varphi\psi)a = F(\psi)F(\varphi)a = F(\psi)\left(f_X(\varphi)\right)$, т. е. $f_Y \circ h_A(\psi) = F(\psi) \circ f_X$ как отображения $h_A(X) \to F(Y)$. □

Упражнение 9.10 (лемма Ионеды 2). Для ковариантного функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ постройте функториальную по F и A биекцию $F(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{S}et)}(h^A, F)$.

Следствие 9.1

Функторы $X \mapsto h_X$ и $X \mapsto h^X$ задают вполне строгие ковариантное и контравариантное вложения категории $\mathcal{C}$ в категории предпучков и ковариантных функторов соответственно. Иными словами, имеются функториальные по $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, h_B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C})}(h^A, h^B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)\,.$$

Доказательство. Применяем леммы Ионеды к функторам $F = h_B$ и $F = h^B$. □

Следствие 9.2

Если объект $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, копредставляющий функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ (соотв. представляющий предпучок $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$) существует, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

Доказательство. Если имеются два таких объекта A, B, что $F = h^A = h^B$ (соотв. $F = h_A = h_B$), то тождественному естественному преобразованию $\mathrm{Id}_F : F \to F$ отвечает по сл. 9.1 изоморфизм $B \xrightarrow{\sim} A$ (соотв. $A \xrightarrow{\sim} B$). □

9.4.1. Описание объектов универсальными свойствами. При помощи сл. 9.2 можно переносить теоретико множественные конструкции из категории $\mathcal{S}et$ в произвольные категории. А именно, скажем, что объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ является результатом применения интересующей нас теоретико множественной операции к набору объектов $X_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, если X представляет предпучок $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, который переводит $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в результат применения рассматриваемой операции к множествам $\operatorname{Hom}(Y, X_i)$. Разумеется, это неявное описание не даёт никаких гарантий *существования* определяемого объекта — функтор может оказаться непредставимым. Но если он представим, то представляющий объект, во-первых, обладает некоторыми «универсальными свойствами» , а во-вторых, единствен с точностью до *единственного* изоморфизма, сохраняющего эти свойства.

Пример 9.13 (произведение $A \times B$)
Определим *произведение* $A \times B$ объектов $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ как объект, представляющий функтор $Y \mapsto \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)$ из $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ в $\mathcal{S}et$. Если он существует, то для всех Y имеется функториальный по Y изоморфизм

$$\beta_Y : \operatorname{Hom}(Y, A \times B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,.$$

Полагая в нём $Y = A \times B$, получаем пару стрелок $A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$, изображающих элемент $\beta_{A \times B}(\mathrm{Id}_{A \times B}) \in \operatorname{Hom}(A \times B, A) \times \operatorname{Hom}(A \times B, B)$. Она универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок $A \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} B$ существует единственная такая стрелка $\varphi \times \psi : Y \to A \times B$, что $\varphi = \pi_A \circ (\varphi \times \psi)$ и $\psi = \pi_B \circ (\varphi \times \psi)$.

Упражнение 9.11. Убедитесь, что для каждой диаграммы $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$, также обладающей этим универсальным свойством, имеется единственный изоморфизм $\gamma : C \xrightarrow{\sim} A \times B$, такой что $\pi_A \circ \gamma = \pi'_A$ и $\pi_B \circ \gamma = \pi'_B$.

Пример 9.14 (копроизведение $A \otimes B$)
Двойственным образом, копроизведение $A \otimes B$ объектов $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ определяется как объект, копредставляющий ковариантный функтор $Y \mapsto \operatorname{Hom}(A, Y) \times \operatorname{Hom}(B, Y)$ из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{S}et$. Обращая все стрелки в предыдущем примере, мы можем охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму $A \xrightarrow{i_A} A \otimes B \xleftarrow{i_B} B$, универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок $A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$ в $\mathcal{C}$ имеется единственный такой морфизм $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \to Y$, что $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ i_A$ и $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ i_B$.

Упражнение 9.12. Убедитесь, что если универсальная тройка $A \xrightarrow{i_A} A \otimes B \xleftarrow{i_B} B$ существует, то она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с отображениями $i_{A,B}$, и явно опишите прямые произведения и копроизведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, модулей над фиксированным коммутативным кольцом, всех групп, коммутативных колец.

9.5. Сопряжённые функторы. Если функторы $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ между категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ связаны функториальным по $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ изоморфизмом

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \qquad (9\text{-}14)$$

то F называется *левым сопряжённым* функтором к G, а G — *правым сопряжённым* к F. С каждой парой сопряжённых функторов связаны естественные преобразования

$$\lambda : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad \varrho : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F\,. \tag{9-15}$$

Стрелка $\lambda_Y : FG(Y) \to Y$, задающая действие преобразования λ над $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, является образом элемента $\mathrm{Id}_{G(Y)}$ при изоморфизме (9-14), написанном для $X = G(Y)$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \mathrm{Id}_{G(Y)}\,.$$

Двойственным образом, стрелка $\varrho_X : X \to GF(X)Y$ получается из $\mathrm{Id}_{F(X)}$ при изоморфизме (9-14), написанном для $Y = F(X)$:

$$\mathrm{Id}_{F(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X))\,.$$

Пример 9.15 (свободные модули)

Обозначим через R-$\mathcal{M}od$ категорию левых модулей над фиксированным кольцом R, а через $G : R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$ — забывающий функтор, сопоставляющий модулю множество его элементов. Для любого множества $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}et$ ковариантный функтор R-$\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$, $M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}\big(E, G(M)\big)$, копредставим *свободным* R-модулем с базисом E. Мы будем обозначать такой свободный модуль через $R \otimes E$. По определению, он состоит из формальных линейных комбинаций $\sum\limits_{e\in E} x_e e$ элементов множества E с коэффициентами $x_e \in R$, лишь конечное число из которых отлично от нуля.

Упражнение 9.13. Установите функториальный по M и E изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathcal{M}od}(R \otimes E, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}\big(E, G(M)\big)\,. \tag{9-16}$$

Изоморфизм (9-16) означает, что функтор $E \mapsto R \otimes E$ является левым сопряжённым к забывающему функтору G. Естественное преобразование

$$\varrho_E : E \hookrightarrow G(A \otimes E)$$

вкладывает E в качестве множества базисных векторов в множество всех векторов свободного модуля $R \otimes E$, а естественное преобразование

$$\lambda_M : R \otimes G(M) \twoheadrightarrow M$$

задаёт R-линейный эпиморфизм из огромного свободного модуля, базисом в котором является множество всех векторов модуля M, на модуль M, переводя базисный вектор m в элемент $m \in M$, а формальную линейную комбинацию базисных векторов — в точно такую же комбинацию, но вычисленную внутри M. Например, при $M = R = \mathbb{R}$ векторное пространство $\mathbb{R} \otimes G(\mathbb{R})$ изоморфно пространству всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с конечным носителем, а преобразование $\lambda_{\mathbb{R}}$ сопоставляет такой функции вещественное число, равное сумме всех её (ненулевых) значений.

9.5.1. Тензорные произведения и Hom. Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Тензорным произведением $M \underset{R}{\otimes} N$ правого R-модуля M на левый R-модуль N называется фактор тензорного произведения абелевых групп[1] $M \otimes N$ по подгруппе, порождённой всевозможными разностями

$$(mx) \otimes n - m \otimes (xn) , \quad \text{где} \quad m \in M , \; x \in R , \; n \in N .$$

Это абелева группа, на которой кольцо R никак не действует, но в которой выполняются соотношения $(mx) \underset{R}{\otimes} n = m \underset{R}{\otimes} (xn)$. Тензорное умножение на фиксированный левый R-модуль N задаёт функтор из категории правых R-модулей в абелевы группы $\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b$, $X \mapsto X \underset{R}{\otimes} N$, переводящий стрелку $\varphi : X_1 \to X_2$ в стрелку $\varphi \otimes 1 : m \underset{R}{\otimes} n \mapsto \varphi(m) \underset{R}{\otimes} n$. Если левый R-модуль N одновременно является правым модулем над ещё одним кольцом S с единицей и правое действие S коммутирует с левым действием R (такие N называются *R-S бимодулями*), функтор тензорного умножения на N отображает $\mathcal{M}od\text{-}R$ в $\mathcal{M}od\text{-}S$: кольцо S действует на $M \otimes N$ справа по правилу $(m \otimes n)y = m \otimes (ny)$. С другой стороны, имеется функтор $h^N : \mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{A}b$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_S(N, Y)$, который принимает значения в $\mathcal{M}od\text{-}R$: правое действие элемента $x \in R$ на $\mathrm{Hom}_S(N, Y)$ переводит S-линейную справа стрелку $\varphi : N \to Y$ в стрелку $\varphi x : n \mapsto \varphi(xn)$ (так что выполняется равенство $(\varphi x)n = \varphi(xn)$).

Предложение 9.1

Тензорное умножение на R-S-бимодуль N сопряжено слева функтору h^N, т. е. имеется естественный по $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{M}od\text{-}R$ и $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{M}od\text{-}S$ изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(X \underset{R}{\otimes} N, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y)\big) . \tag{9-17}$$

Доказательство. Отображение из левой части (9-17) в правую сопоставляет S-линейному справа гомоморфизму $\varphi : X \underset{R}{\otimes} N \to Y$ зависящее от $x \in X$ семейство гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y$, $n \mapsto \varphi(x \otimes n)$. Каждый из них S-линеен справа: $\varphi_x(ns) = \varphi(x \underset{R}{\otimes} ns) = \varphi(x \underset{R}{\otimes} n)s = \varphi_x(n)s$, а сопоставление $x \mapsto \varphi_x$, как отображение $X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y)$, R-линейно справа:

$$\varphi_{xr} n = \varphi(xr \underset{R}{\otimes} n) = \varphi(x \underset{R}{\otimes} rn) = \varphi_x(rn) = (\varphi_x r)n .$$

Обратное отображение из правой части (9-17) в левую переводит семейство S-линейных справа гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y$, которые R-линейно справа зависят от $x \in X$, в S-линейный справа гомоморфизм $\varphi : x \underset{R}{\otimes} n \mapsto \psi_x(n)$. □

---

[1] или, что то же самое, $\mathbb{Z}$-модулей

Пример 9.16 (индуцирование и коиндуцирование)
Если кольцо A содержится в кольце B и у них общая единица, каждый правый B-модуль X одновременно является и правым A-модулем, что задаёт *функтор ограничения*

$$\mathrm{res} : \mathcal{M}od\text{-}B \to \mathcal{M}od\text{-}A\,. \tag{9-18}$$

Рассматривая B как B-A бимодуль и беря в предл. 9.1 $S = A$, а $N = R = B$, получим в качестве правого A-модуля $X \underset{B}{\otimes} B \simeq X$ ограничение $\mathrm{res}\, X$ модуля X с B на A и функториальный по B-модулю X и A-модулю Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(\mathrm{res}\, X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)\big)\,.$$

Правый B-модуль $\mathrm{coind}\, Y \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)$ называется *коиндуцированным* с A-модуля Y. Функтор коиндуцирования $\mathrm{coind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён справа к функтору ограничения.

Рассматривая B как A-B бимодуль и полагая в предл. 9.1 $S = N = B$, а $R = A$, получим в качестве правого A-модуля $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(B, Y) \simeq Y$ ограничение $\mathrm{res}\, Y$ модуля Y с B на A и функториальный по A-модулю X и B-модулю Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(X \underset{A}{\otimes} B, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(X, \mathrm{res}\, Y)\,.$$

Правый B-модуль $\mathrm{ind}\, X \overset{\text{def}}{=} X \underset{A}{\otimes} B$ называется *индуцированным* с A-модуля X. Функтор индуцирования $\mathrm{ind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён слева к функтору ограничения.

В ситуации, когда $A = \Bbbk[H]$ и $B = \Bbbk[G]$ являются групповыми алгебрами конечной группы G и её подгруппы H с коэффициентами в поле $\Bbbk$, мы получаем уже встречавшиеся нам в n° 6.3 на стр. 106 и n° 6.3.3 на стр. 110 функторы (ко)индуцирования линейных представлений группы G над полем $\Bbbk$ с представлений её подгруппы H. Как мы видели, в этом случае индуцированный и коиндуцированный модули оказываются изоморфными друг другу.

Пример 9.17 (сингулярные симплексы)
Свяжем с топологическим пространством Y симплициальное множество его *сингулярных симплексов* $S(Y) : \varDelta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, которое сопоставляет комбинаторному симплексу $[n] \in \mathrm{Ob}\, \varDelta$ множество $S_n(Y) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\varDelta^n, Y) = h_Y(\varDelta^n)$ всех непрерывных отображений правильного n-мерного симплекса $\varDelta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в Y, а неубывающему отображению $\varphi : [n] \to [m]$ — морфизм правого умножения $\varphi^* : f \mapsto f \circ \varphi_*$ на аффинное отображение $\varphi_* : \varDelta^n \to \varDelta^m$, действующее на вершины как φ. Возникающий таким образом функтор $S : \mathcal{T}op \to p\mathcal{S}h(\varDelta)$ сопряжён справа функтору $p\mathcal{S}h(\varDelta) \to \mathcal{T}op$, $X \mapsto |X|$, геометрической реализации из прим. 9.7 на стр. 144, т. е. имеет место естественный по симплициальному множеству X и топологическому пространству Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h}(X, S(Y))\,, \tag{9-19}$$

являющийся категорным аналогом изоморфизма (9-17) для модулей над кольцами. В самом деле, функтор геометрической реализации вкладывает категорию $\varDelta$ в категорию $\mathcal{T}op$ в виде дизъюнктного набора $D = \bigsqcup_{n\geqslant 0} \varDelta^n$ правильных симплексов, на котором имеется левое действие стрелок φ категории $\varDelta$ аффинными отображениями и коммутирующее с ним правое действие стрелок категории $\mathcal{T}op$, непрерывно отображающих D в произвольные топологические пространства. Поэтому множество $S(Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)$ является правым модулем над категорией $\varDelta$, как и симплициальное множество X, геометрическую реализацию которого можно понимать как произведение $|X| = X \underset{\varDelta}{\otimes} D$ — фактор дизъюнктного объединения $\bigsqcup_{n\geqslant 0} X_n \times \varDelta^n$ по соотношениям $(x\varphi, s) = (x, \varphi s)$. Тем самым, изоморфизм (9-19) имеет вид

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(X \underset{\varDelta}{\otimes} D, Y\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}\varDelta}\big(X, \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)\big)\,, \tag{9-20}$$

ничем не отличающийся от (9-17).

Упражнение 9.14. Опишите взаимно обратные изоморфизмы в (9-20) явно.

Предложение 9.2
Для существования левого сопряжённого функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ к данному функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ функтор

$$h^X_G : \mathcal{D} \to \mathcal{S}et\,, \quad Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big)\,, \tag{9-21}$$

был копредставим, и в этом случае $F(X)$ является его копредставляющим объектом.

Доказательство. Необходимость очевидна из определений. Докажем достаточность. Пусть для каждого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ функтор (9-21) представляется объектом $F(X)$, т. е. имеется естественный изоморфизм функторов $f^X : h^{F(X)} \xrightarrow{\sim} h^X_G$. Чтобы продолжить соответствие $X \mapsto F(X)$ до функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ заметим, что морфизм $\varphi : X_1 \to X_2$ задаёт естественное преобразование $\varphi^* : h^{X_2}_G \to h^{X_1}_G$ заключающееся в правом умножении на φ: стрелка $\psi : X_2 \to G(Y)$ переходит в $\psi\varphi : X_1 \to G(Y)$. По сл. 9.1 из леммы Ионеды композиция естественных преобразований $\big(f^{X_1}\big)^{-1} \circ \varphi^* \circ f^{X_2} : h^{F(X_2)} \to h^{F(X_1)}$ задаётся правым умножением на единственную стрелку $F(X_1) \to F(X_2)$, которую мы и объявим образом $F(\varphi)$ стрелки φ под действием функтора F. Прямо по построению мы получаем функториальный по X изоморфизм $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. □

Упражнение 9.15. Докажите двойственное утверждение: для существования правого сопряжённого функтора G к функтору $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ был представим предпучок $h^G_Y : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$, и в таком случае $G(X)$ представляет этот предпучок.

Предложение 9.3
Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, когда существуют такие естественные преобразования $t : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$, что композиции $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ и $G \xrightarrow{s\circ G} GFG \xrightarrow{G\circ t} G$ являются тождественными эндоморфизмами функторов F и G.

Доказательство. Если имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), Y\big) \arrow[r, bend left, "\varrho"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big) \arrow[l, bend left, "\lambda"]
\end{tikzcd} \tag{9-22}$$

то для любых стрелки $\varphi : X_1 \to X_2$ в $\mathcal{C}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_1), Y) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, G(Y)) \arrow[l, "\lambda", "\sim"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_2), Y) \arrow[u, "F(\varphi)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, G(Y)) \arrow[l, "\lambda", "\sim"'] \arrow[u, "\varphi^*"']
\end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой задаются правым умножением на $F(\varphi)$ и на φ соответственно. Рисуя это для $Y = F(X)$ и морфизма $\varphi = s_X : X \to GF(X)$, задающего действие над X естественного преобразования $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ из форм. (9-15) на стр. 153, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)) \arrow[l, "\lambda", "\sim"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X), F(X)) \arrow[u, "F(s_X)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X), GF(X)) \arrow[l, "\lambda", "\sim"'] \arrow[u, "s_X^*"']
\end{tikzcd}$$

верхняя стрелка λ которой переводит s_X в $\mathrm{Id}_{F(X)}$, а нижняя стрелка λ переводит $\mathrm{Id}_{GF(X)}$ в морфизм $t_{F(X)} : FGF(X) \to F(X)$, задающий действие второго естественного преобразования $t : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ из формулы (9-15) над объектом $F(X)$. Таким образом,

$$\mathrm{Id}_{F(X)} = \lambda(s_X) = \lambda s_X^* \left(\mathrm{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \lambda \left(\mathrm{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \left(t_{F(X)}\right) = t_{F(X)} \circ F(s_X) ,$$

а это и значит, что композиция $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ задаёт тождественное преобразование функтора F. Проверка того, что $G \xrightarrow{s\circ G} GFG \xrightarrow{G\circ t} G$ совпадает с Id_G полностью симметрична. Наоборот, если имеются преобразования $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ и $t : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, зададим в (9-22) действие λ и ϱ на стрелки $\varphi : F(X) \to Y$ и $\psi : X \to G(Y)$ правилами:

$$\varrho(\varphi) = G(\varphi) \circ s_X \quad \text{и} \quad \lambda(\psi) = t_Y \circ F(\psi) ,$$

в правых частях которых стоят сквозные отображения вдоль стрелок

$$X \xrightarrow{s_X} GF(X) \xrightarrow{G(\varphi)} G(Y) \quad \text{и} \quad F(X) \xrightarrow{F(\psi)} FG(Y) \xrightarrow{t_Y} Y .$$

Композиция $\lambda\varrho(\varphi) = t_Y \circ FG(\varphi) \circ F(s_X) : F(X) \to Y$ представляет собою путь из левого нижнего угла в правый верхний на диаграмме

$$\begin{tikzcd}
& F(X) \arrow[rr, "\varphi"] & & Y & \\
F(X) \arrow[ur, equal, "\mathrm{Id}_{F(X)}"] \arrow[rr, "F(s_X)"] & & FGF(X) \arrow[ul, "t_{F(X)}"'] \arrow[rr, "FG(\varphi)"] & & FG(Y) \arrow[ul, "t_Y"']
\end{tikzcd}$$

правый параллелограмм которой коммутативен в силу естественности преобразования t, а левый треугольник — в силу равенства $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ и Id_F. Поэтому $\lambda\varrho(\varphi) = \varphi$. Равенство $\varrho\lambda(\psi) = \psi$ проверяется симметричным образом. □

9.6. Пределы диаграмм. Любую малую категорию $\mathcal{N}$ можно воспринимать как диаграмму, вершинами которой служат объекты, а стрелками — морфизмы категории $\mathcal{N}$. Всякий функтор $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ даёт реализацию такой диаграммы в категории $\mathcal{C}$, т. е. является диаграммой в категории $\mathcal{C}$ с вершинами в объектах $X_\nu = X(\nu)$, занумерованных множеством $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$, и стрелками $\varkappa_{\mu\nu} = X(\nu \to \mu) : X_\nu \to X_\mu$, занумерованными множеством $\operatorname{Mor}\mathcal{N}$. Каждый объект $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ задаёт *постоянную диаграмму* $\overline{Y}$, в которой все объекты $\overline{Y}_\nu = Y$ и все стрелки равны Id_Y. С любой диаграммой $X \in \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ связан предпучок множеств $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X)$. Если он представим, т. е. существует объект $L \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ с естественным по $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ изоморфизмом

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X) , \tag{9-23}$$

то представляющий объект L называется *пределом*[1] диаграммы X и обозначается $L = \lim X_\nu$. Двойственным образом, объект $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, копредставляющий ассоциированный с диаграммой X ковариантный функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y})$, называется *копределом*[2] диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и обозначается $C = \operatorname{colim} X_\nu$. В этом случае есть функториальная по Y биекция

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y}) . \tag{9-24}$$

Как и все (ко) представляющие объекты, (ко) пределы однозначно характеризуются своими «универсальными свойствами». При $Y = L$ формула (9-23) сопоставляет тождественному эндоморфизму Id_L предела $L = \lim X_\nu$ естественное преобразование $f : \overline{L} \to X$, т. е. набор стрелок $\pi_\nu : \lim X_\nu \to X_\nu$, которые коммутируют со всеми стрелками диаграммы X. Он универсален в том

---

[1] или *проективным* пределом

[2] или *инъективным пределом*

смысле, что для любого $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ с набором коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X стрелок $\psi_\nu : Y \to X_\nu$, существует единственный морфизм $\alpha : Y \to \lim X_\nu$, такой что $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha$ для всех ν. Двойственным образом, для копредела имеется канонический набор коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X стрелок $\iota_\nu : X_\nu \to \operatorname{colim} X_\nu$, такой что для каждого $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ с набором стрелок $\psi_\nu : X_\nu \to Y$, которые коммутируют со всеми стрелками диаграммы X, есть единственный морфизм $\beta : \operatorname{colim} X_\nu \to Y$, такой что $\psi_\nu = \beta \circ \iota_\nu$ для всех ν.

Упражнение 9.16. Проверьте, что универсальные свойства задают предел и копредел однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками π_ν и ι_ν соответственно.

Пример 9.18 (начальный и конечный объекты)

Простейшая диаграмма — пустая. Её предел Fin называется *конечным*, а копредел Or — *начальным* объектами категории. Эти объекты однозначно с точностью до единственного изоморфизма определяются тем, что для каждого объекта X есть единственная стрелка $X \to \mathrm{Fin}$ и единственная стрелка $\mathrm{Or} \to X$.

Упражнение 9.17. Укажите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом.

Пример 9.19 (прямые (ко) произведения)

Малая категория $\mathcal{N}$ называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами Id_ν с $\nu \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$. Соответствующие *дискретные диаграммы* $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это семейства объектов X_ν без стрелок между ними. Пределы и копределы таких диаграмм называются *прямыми произведениями* и *копроизведениями* и обозначаются, соответственно $\prod_\nu X_\nu$ и $\coprod_\nu X_\nu$. Когда индексов всего два, мы получаем прямые (ко) произведения пар объектов из прим. 9.13 и прим. 9.14. Очевидная индукция показывает, что для существования всех конечных прямых (ко) произведений достаточно существования прямых (ко) произведений любых двух объектов.

Пример 9.20 ((ко) уравнители)

(Ко) предел диаграммы вида $\bullet \rightrightarrows \bullet$, т. е. пары стрелок $X \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} Y$ называется *(ко) уравнителем*[1] этих стрелок. В категории множеств уравнитель представляет собою множество решений уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$ на $x \in X$ или, более научно, прообраз диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при каноническом отображении $\varphi \times \psi : X \to Y \times Y$. Коуравнитель является фактором множества Y по наимень-

---

[1] по-английски *(co)equalizer*

шему отношению эквивалентности[1] $R \subset Y \times Y$, содержащему образ отображения $\varphi \times \psi$, т. е. все отождествления $\varphi(x) = \psi(x)$ с $x \in X$.

Упражнение 9.18. Проверьте это и постройте (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным коммутативным кольцом.

Например, (ко) ядро гомоморфизма $f : A \to B$ в категории $\mathcal{Ab}$ абелевых групп это (ко) уравнитель f и нулевого морфизма. Интуитивно, уравнители позволяют задавать «подобъекты» при помощи «уравнений», а коуравнители — «фактор объекты» при помощи «образующих и соотношений».

Пример 9.21 (послойные произведения)

Предел диаграммы вида $\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$ называется *послойным*[2] *произведением*. Конкретная реализация такой диаграммы выглядит как $X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y$, и её предел обозначается $X \underset{B}{\times} Y$. Он включается в коммутативный *декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd}
X \underset{B}{\times} Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\
X \arrow[r, "\xi"] & B
\end{tikzcd} \tag{9-25}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\
X \arrow[r, "\xi"] & B
\end{tikzcd}$$

имеется единственный такой морфизм $\varphi' \times \psi' : Z \to X \underset{B}{\times} Y$, что $\varphi' = \varphi \circ (\varphi' \times \psi')$ и $\psi' = \psi \circ (\varphi' \times \psi')$.

Упражнение 9.19. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (9-25) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с φ и ψ.

---

[1] Напомним, что *отношение эквивалентности* на Y это подмножество $R \subset Y \times Y$, которое *рефлексивно* (содержит диагональ Δ_Y), *симметрично* (переходит в себя при транспозиции сомножителей) и *транзитивно* (т. е. (y_1, y_2), $(y_2.y_3) \in R \Rightarrow (y_1, y_3) \in R$). Пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности, и всякое отображение $\xi : Y \to Z$ определяет отношение эквивалентности $R_\xi = \{(y_1, y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$ на Y, причём $\xi' : Y \to Z'$ тогда и только тогда представляется в виде композиции $\xi' = \eta \circ \xi$ с некоторой стрелкой $\eta : Z \to Z'$, когда $R_\xi \subset R_{\xi'}$, т. е. когда эквивалентность, отвечающая ξ, *влечёт* эквивалентность, отвечающую ξ' (в этом случае говорят, что первая эквивалентность *тоньше* или *сильнее* последней).

[2] или *расслоенным*

В категории множеств отображение $X \underset{B}{\times} Y \to B$ имеет в качестве слоя над произвольной точкой $b \in B$ прямое произведение слоёв $\varphi^{-1}(b) \times \psi^{-1}(b)$, отсюда и название.

Пример 9.22 (послойные копроизведения)
Оборачивая все стрелки в предыдущем примере, назовём *послойным копроизведением* $X \underset{B}{\otimes} Y$ копредел диаграммы $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$. Он вписывается в коммутативный *кодекартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & X \underset{B}{\otimes} Y \end{tikzcd} \tag{9-26}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi'"] \\ X \arrow[r, "\varphi'"] & Z \end{tikzcd}$$

существует единственный такой морфизм $\varphi' \otimes \psi' : X \underset{B}{\otimes} Y \to Z$, что $\varphi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \varphi$ и $\psi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \psi$.

Упражнение 9.20. Явно опишите послойные (ко) произведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп[1], коммутативных колец с единицей и модулей над коммутативным кольцом.

9.6.1. (Ко) замкнутость. Категория $\mathcal{C}$ называется (*ко*) *замкнутой*, если для любой малой категории $\mathcal{N}$ каждая диаграмма $\mathcal{N} \to \mathcal{C}$ имеет (ко) предел в $\mathcal{C}$.

Предложение 9.4
Для замкнутости категории $\mathcal{C}$ достаточно существования в $\mathcal{C}$ конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом, а для козамкнутости — существования в $\mathcal{C}$ начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

Доказательство. Мы построим предел произвольной диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, копредел строится аналогично путём обращения стрелок. Надо предъявить универсальный набор мофизмов φ_ν с общим началом в объекты диаграммы,

---

[1] в теории групп копроизведения традиционно называются *амальгамами*

решающий уравнения $\varphi_\mu = \varkappa_{\mu\nu}\varphi_\nu$, где $\varkappa_{\mu\nu} = X(\nu \to \mu) : X(\nu) \to X(\mu)$ пробегает все стрелки диаграммы. Рассмотрим произведение всех объектов диаграммы: $A = \prod\limits_\mu X_\mu$, и ещё одно произведение, куда каждый X_μ входит столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается: $B = \prod\limits_{\nu\to\mu} F_{\nu\mu}$, где $F_{\nu\mu} \overset{\text{def}}{=} X_\mu$. Для каждой стрелки $\nu \to \mu$ зададим два отображения $A \to F_{\nu\mu}$: $f_{\nu\mu} = \mathrm{Id}_{X_\mu} \circ \pi_\mu$ и $g_{\nu\mu} = \varkappa_{\mu\nu} \circ \pi_\nu$, где $\pi_\alpha : A \to X_\alpha$ суть канонические стрелки из произведения в сомножители. По универсальному свойству произведения B имеются два морфизма $f, g : A \to B$, поднимающие стрелки $f_{\nu\mu}$ и $g_{\nu\mu}$. Их уравнитель L приходит вместе с морфизмом $\varphi : L \to A$, задающим набор стрелок $\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi$ с требуемыми универсальными свойствами. □

Замечание 9.1. Для того, чтобы в категории $\mathcal{C}$ существовали (ко) пределы всех *конечных* диаграмм, в условиях предл. 9.4 достаточно требовать существования в $\mathcal{C}$ конечных (ко) произведений.

Следствие 9.3
Категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом замкнуты и козамкнуты.

Доказательство. Сделайте упр. 9.18. □

9.6.2. Фильтрующиеся диаграммы. Категория $\mathcal{F}$ называется *фильтрующейся*, если из общего конца любых двух стрелок φ, ψ с общим началом и общим концом ведёт такая стрелка ζ, что $\zeta\varphi = \zeta\psi$, и из любых двух объектов выходят стрелки с общим концом. Например, любой чум, в котором у каждых двух элементов есть общая верхняя грань, является фильтрующейся категорией[1]. Если категория индексов $\mathcal{F}$ фильтрующаяся, то диаграммы $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ и $\mathcal{F}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$ принято называть *прямыми* и *обратными фильтрующимися* диаграммами[2], а их (ко)пределы обозначать через $\varinjlim$, $\underrightarrow{\operatorname{colim}}$ и $\varprojlim$, $\underleftarrow{\operatorname{colim}}$.

Копредел любой фильтрующейся диаграммы $X : \mathcal{F} \to \mathcal{S}et$ допускает следующее явное описание. Назовём *хвостом* диаграммы X такой набор элементов $x_\nu \in X(\nu)$, что каждый индекс ν представлен в нём не более одного раза, но вместе с каждым представленным индексом ν представлены и все индексы μ, в которые ведут стрелки из ν, и для любых индексов $\nu \neq \mu$, представленных в наборе, $x_\mu = X(\nu \to \mu)x_\nu$ для некоторой стрелки $\nu \to \mu$. Назовём хвосты $\{x_\alpha\}$ и $\{y_\beta\}$ *эквивалентными*, если для любых их элементов x_α и y_β существуют такие стрелки $\alpha \to \gamma$ и $\beta \to \gamma$, что $X(\alpha \to \gamma)x_\alpha = X(\beta \to \gamma)y_\beta$, причём этот элемент лежит в обоих хвостах. Это отношение очевидно рефлексивно и симметрично. Покажем, что оно транзитивно. Пусть хвост $\{x_\alpha\}$ эквивалентен

---

[1] ср. с прим. 9.2 на стр. 140

[2] или *индуктивными* и *проективными* системами

$\{y_\beta\}$, а хвост $\{y_\beta\}$ эквивалентен $\{z_\gamma\}$. Тогда для любых трёх элементов x_α, y_β и z_γ из этих хвостов в категории индексов $\mathcal{F}$ имеется (не обязательно коммутативная) диаграмма из таких стрелок

$$\begin{tikzcd}
& & \varepsilon & & \\
& & \delta \arrow[u, "\xi"] & & \\
& \eta \arrow[ur, "\psi_{\delta\eta}"] & & \zeta \arrow[ul, "\psi_{\delta\zeta}"'] & \\
\alpha \arrow[ur, "\varphi_{\eta\alpha}"] & & \beta \arrow[ul, "\varphi_{\eta\beta}"'] \arrow[ur, "\varphi_{\zeta\beta}"] & & \gamma \arrow[ul, "\varphi_{\zeta\gamma}"']
\end{tikzcd}$$

что $x_\eta = X\left(\varphi_{\eta\alpha}\right)x_\alpha = Y\left(\varphi_{\eta\beta}\right)y_\beta = y_\eta$ и $y_\zeta = Y\left(\varphi_{\zeta\beta}\right)y_\beta = Z\left(\varphi_{\zeta\gamma}\right)z_\gamma = z_\zeta$ в категории $\mathcal{S}et$, а $\xi\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\beta} = \xi\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\beta}$ в $\operatorname{Hom}_{\mathcal{F}}(\beta,\varepsilon)$. Обозначая стрелку из последнего равенства через $\varkappa$, имеем $X\left(\varepsilon\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\alpha}\right)x_\alpha = Y(\varkappa)y_\beta = Z\left(\varepsilon\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\gamma}\right)z_\gamma$, что и требуется.

Упражнение 9.21. Убедитесь, что множество классов эквивалентных хвостов изоморфно $\operatorname{colim} X$.

Пример 9.23 (открытые окрестности)

Любой замкнутый относительно пересечений набор открытых множеств образует обратную систему в категории $\mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств данного топологического пространства X. Примером такой системы является набор открытых окрестностей любого подмножества $Z \subset X$. Её пределом в категории множеств является пересечение всех открытых окрестностей Z. В категории $\mathcal{U}(X)$ предела может и не быть.

Упражнение 9.22. Убедитесь, что в $\mathcal{U}(X)$ послойное произведение $U \underset{X}{\times} V = U \cap V$.

Пример 9.24 (разбиения отрезка)

Конечные наборы точек $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_\infty = 1$, разбивающие отрезок $[0,1]$ на непересекающиеся интервалы (как в определении интеграла Римана), образуют прямую систему в категории ∇_{big} относительно морфизмов включения, отвечающих измельчениям разбиения. Копределом этой системы в категории всех (не обязательно конечных) упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами является $[0,1]$. В категории ∇_{big} предела не существует.

Пример 9.25 (локализация коммутативного кольца)

Рассмотрим любую не содержащую нуля мультипликативную систему[1] S в произвольном коммутативном кольце K с единицей. Зададим на S структуру кате-

---

[1] напомню, что это означает, что $1 \in S$ и $s,t \in S \Rightarrow st \in S$

гории, полагая $\mathrm{Hom}_S(s,t) \overset{\text{def}}{=} \{a \in K \mid as = t\}$, и определим функтор $S \to \mathcal{M}od_K$ из этой категории в категорию K-модулей, посылая каждый объект $s \in S$ в свободный K-модуль ранга один с образующей, которую мы обозначим символом $\left[\frac{1}{s}\right]$, а каждую стрелку $a \in \mathrm{Hom}_S(s_1, s_2)$ — в гомоморфизм, переводящий базисный элемент $\left[\frac{1}{s_1}\right]$ в $a \cdot \left[\frac{1}{s_2}\right]$.

Упражнение 9.23. Покажите, что копредел получившейся диаграммы в категории $\mathcal{M}od_K$ существует и изоморфен локализации[1] KS^{-1}.

9.6.3. Функториальность (ко) пределов. Естественное преобразование диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ в диаграмму $Y : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это набор стрелок $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$, по одной для каждого $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, перестановочных со стрелками из диаграмм. Если диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и $Y : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ имеют в категории $\mathcal{C}$ пределы $L_X = \lim X_\nu$ и $L_Y = \lim Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и любого естественного преобразования $f : X \circ \tau \to Y$ существует единственный морфизм $\lim f : L_X \to L_Y$, такой что при всех $\mu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$ коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
L_X \arrow[r, "\pi_{\tau(\mu)}"] \arrow[d, "\lim f"'] & X_{\tau(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"] \\
L_Y \arrow[r, "\pi_\mu"] & Y_\mu ,
\end{tikzcd} \tag{9-27}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из предела в элементы диаграммы. В самом деле, композиции $f_\mu \circ \pi_{\tau(\mu)} : L_X \to Y_\mu$ задают систему стрелок из L_X в элементы диаграммы Y, перестановочные со всеми её стрелками, что даёт единственный морфизм $L_X \to \lim Y = L_Y$, делающий все диаграммы (9-27) коммутативными. Двойственным образом, если существуют копределы $C_X = \mathrm{colim}\, X_\nu$ и $C_Y = \mathrm{colim}\, Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ и любого естественного преобразования $f : X \to Y \circ \tau$ существует единственный морфизм $\mathrm{colim}\, f : C_X \to C_Y$, такой что коммутативны все диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X_\nu \arrow[r, "\iota_\nu"] \arrow[d, "f_\nu"'] & C_X \arrow[d, "\mathrm{colim}\, f"] \\
Y_{\tau(\nu)} \arrow[r, "\iota_{\tau(\nu)}"] & C_Y ,
\end{tikzcd}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из вершин диаграммы в копредел. При $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ и $\tau = \mathrm{Id}$ из предл. 9.2 на стр. 156 и равенств (9-23) и (9-24) на стр. 158 получаем

---

[1] т. е. модулю дробей a/s с $a \in K$, $s \in S$, где под дробью понимается класс эквивалентности пары a/s по отношению $a_1/s_1 \sim a_2/s_2$, означающему, что $\exists\, s \in S : s \cdot (a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$

Предложение 9.5
Для заданных малой категории $\mathcal{N}$ и (ко)замкнутой категории $\mathcal{C}$ копредел и предел являются, соответственно, левым и правым сопряжёнными к функтору $\mathcal{C} \to \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$, переводящему $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в постоянную диаграмму $\overline{C}$. □

Замечание 9.2. Если не предполагать (ко)замкнутости, то (ко)предел будет функториален на всех диаграммах, где определён.

Определение 9.1 (перестановочность с (ко) пределами)
Скажем, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и любой диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ из того, что L является (ко) пределом X в $\mathcal{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F \circ X$ в $\mathcal{D}$.

Предложение 9.6
Если функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то F перестановочен с копределами, а G — с пределами.

Доказательство. Сопряжённость функторов F и G даёт цепочку функториальных по $D \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ изоморфизмов $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(\operatorname{colim}X), D\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\operatorname{colim}X, G(D)\big) \simeq$ $\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}\left(X, \overline{G(D)}\right) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{D})}\left(F \circ X, \overline{D}\right)$, откуда $F(\operatorname{colim}X) \simeq \operatorname{colim}(F \circ X)$. Рассуждение про пределы аналогично. □

Следствие 9.4
Пределы коммутируют с пределами, а копределы — с пределами всякий раз, когда они существуют: если задана такая диаграмма $F : \mathcal{M} \to \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ естественных преобразований $F(\mu_1 \to \mu_2)$ диаграмм $\{F_\mu : \mathcal{N} \to \mathcal{C}\}$, что для всех $\mu \in \mathcal{M}$ и $\nu \in \mathcal{N}$ μ-тая диаграмма $F_\mu : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и диаграмма $F(\nu)$, задающая действие стрелок $F(\mu_1 \to \mu_2)_\nu$ между элементами $F_\mu(\nu)$ с фиксированным номером ν, обе имеют (ко)предел в $\mathcal{C}$, то $\lim\limits_{\mu} \lim\limits_{\nu} F_\mu \simeq \lim\limits_{\nu} \lim\limits_{\mu} F(\nu)$ и $\operatorname*{colim}\limits_{\mu} \operatorname*{colim}\limits_{\nu} F_\mu \simeq$ $\simeq \operatorname*{colim}\limits_{\nu} \operatorname*{colim}\limits_{\mu} F(\nu)$. □

Следствие 9.5
Пусть стрелки $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ задают естественное преобразование между диаграммами $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{A}b$. Если существуют $C_X = \operatorname{colim} X_\nu$ и $C_Y = \operatorname{colim} Y_\nu$, то существует и $\operatorname{colim} \operatorname{coker} f_\nu \simeq \operatorname{coker}\left(\operatorname{colim} f_\nu : C_X \to C_Y\right)$, а если существуют $L_X = \lim X_\nu$ и $L_Y = \lim Y_\nu$, то существует и $\lim \ker \varphi_\nu \simeq \ker\left(\lim f_\nu : L_X \to L_Y\right)$.

Доказательство. Будучи (ко)уравнителем f_ν и нулевого морфизма (ко)ядро является (ко)пределом. □

Следствие 9.6

Тензорное умножение на (левый) модуль N над произвольным кольцом S с единицей перестановочно с копределами диаграмм (правых) S-модулей. В частности, для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(K, L)$ имеется канонический изоморфизм абелевых групп $\mathrm{coker}\bigl(\varphi \underset{S}{\otimes} \mathrm{Id}_N : K \underset{S}{\otimes} N \to L \underset{S}{\otimes} N\bigr) \simeq \mathrm{coker}(\varphi) \underset{S}{\otimes} N$.

Доказательство. По предл. 9.1 на стр. 154, применённому к кольцам S и $R = \mathbb{Z}$, функтор $X \mapsto X \underset{S}{\otimes} N$ сопряжён слева функтору $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(N, Y)$. □

Задачи для самостоятельного решения к §9

Задача 9.1 (циклическая категория). Для каждого целого неотрицательного m обозначим через

$$[m]_{\mathrm{cyc}} \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ e^{2\pi i \frac{k}{m+1}} \right\}_{0 \leqslant k \leqslant m} \subset S^1 \subset \mathbb{C}$$

множество комплексных корней $(m+1)$-й степени из единицы, рассматриваемое как категория, в которой $\mathrm{Hom}(x, y)$ состоит из гомотопических классов непрерывных монотонных[1] путей $f : [0,1] \to S^1$ с $f(0) = x$ и $f(1) = y$ (т. е. проходимой против ЧС дуги xy и всех путей, получающихся добавлением к ней любого натурального числа оборотов против ЧС), и для $x \in \mathrm{Ob}[m]_{\mathrm{cyc}}$ обозначим через $T_x \in \mathrm{End}(x)$ эндоморфизм, отвечающий одному обороту по окружности. Объектами (малой) *циклической категории* Λ являются категории $[m]_{\mathrm{cyc}}$, а стрелки $\varphi : [n]_{\mathrm{cyc}} \to [m]_{\mathrm{cyc}}$ — это такие функторы, что $\varphi(T_x) = T_{\varphi(x)}$ для всех $x \in \mathrm{Ob}[n]_{\mathrm{cyc}}$. Доопределите представимый предпучок $h_{[0]}$ на Λ так, чтобы он принимал значения в $\Lambda \subset \mathcal{S}et$, и докажите, что $h_{[0]} : \Lambda^{\mathrm{opp}} \to \Lambda$ является эквивалентностью категорий.

Задача 9.2. Постройте левый сопряжённый к функтору забывания алгебраической структуры $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ для а) $\mathcal{C} = \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ б) $\mathcal{C} = \mathrm{Ass}_{\Bbbk}$ в) $\mathcal{C} = \mathcal{C}mr$ г) $\mathcal{C} = \mathcal{G}rp$. В каждом случае явно опишите естественное преобразование композиции сопряжённых функторов в тождественный эндофунктор.

Задача 9.3. Пусть $p \in \mathbb{N}$ — простое и $A_n = \mathbb{Z}/(p^n)$. Для всех $n > m$ обозначим через $\psi_{nm} : \mathbb{Z}/(p^n) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(p^m)$ факторизацию, а через $\varphi_{mn} : \mathbb{Z}/(p^m) \hookrightarrow \mathbb{Z}/(p^n)$ — вложение $[1] \mapsto [p^{n-m}]$. Покажите, что в $\mathcal{A}b$

а) $\lim A_n$ вдоль стрелок ψ_{mn} изоморфен группе целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_{(p)}$

б) $\mathrm{colim}\, A_n$ вдоль стрелок φ_{mn} изоморфен подгруппе классов дробей вида z/p^ℓ в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Задача 9.4. В категории $\mathcal{A}b$ положим $B_n = \mathbb{Z}/(n)$ и при $n|m$ обозначим через $\psi_{nm} : \mathbb{Z}/(m) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(n)$ факторизацию, а через $\varphi_{mn} : \mathbb{Z}/(n) \hookrightarrow \mathbb{Z}/(m)$ — вложение $[1] \mapsto [m/n]$.

---

[1] т. е. вида $t \mapsto e^{i\varphi(t)}$, где $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ — непрерывная неубывающая функция

Покажите, что

а) $\lim B_n$ вдоль стрелок ψ_{nm} изоморфен неархимедову пополнению $\prod_p \mathbb{Z}_{(p)}$ группы $\mathbb{Z}$

б) $\operatorname{colim} B_n$ вдоль стрелок φ_{mn} изоморфен $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Задача 9.5. Для любого чума $\mathcal{N}$ явно опишите предел и копредел произвольной диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{S}et$.

Задача 9.6. Два контравариантных функтора $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D}^{\text{opp}} \to \mathcal{C}$ называются *левосопряжёнными* (соотв. *правосопряжёнными*), если имеется функториальная по $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $D \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ биекция $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(D), C\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(C), D\big)$ (соотв. $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(C, G(D)\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(D, F(C)\big)$). Докажите, что левосопряжённые функторы переводят копределы в пределы, а правосопряжённые — пределы в копределы.

Задача 9.7 (точные функторы). Напомню, что пара компануемых стрелок

$$* \xrightarrow{\varphi} * \xrightarrow{\psi} *$$

в категории абелевых групп $\mathcal{A}b$ называется *точной*, если $\ker\psi = \operatorname{im}\varphi$. Более длинная цепочка стрелок называется *точной*, если каждая пара её последовательных стрелок точна. Точные последовательности вида $0 \to A \to B \to C \to 0$ называются *точными тройками*. Функтор $F : \mathcal{A}b \to \mathcal{A}b$ (соотв. $F : \mathcal{A}b^{\text{opp}} \to \mathcal{A}b$) называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра или, что то же самое, — точные последовательности вида $0 \to A \to B \to C$ (соотв. $A \to B \to C \to 0$) в точные последовательности $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ (соотв. в $0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$). Двойственным образом, F называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра, или — точные последовательности вида $A \to B \to C \to 0$ (соотв. $0 \to A \to B \to C$) в точные последовательности $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ (соотв. в $F(C) \to F(B) \to F(A) \to 0$). Функтор называется *точным*, если он точен и справа и слева. Покажите, что

а) для точности функтора необходимо и достаточно, чтобы он переводил точные тройки в точные тройки, и в этом случае он сохраняет точность любых последовательностей

б) копредставимые и представимые функторы $h^A : X \mapsto \operatorname{Hom}(A, X)$ и $h_A : X \mapsto \operatorname{Hom}(X, A)$ точны слева

в) правые сопряжённые функторы точны слева, а левые — справа

г) копредел фильтрованных диаграмм точен[1]

Задача 9.8. Приведите примеры, показывающие, что (ко)представимый функтор может быть не точен справа, а тензорное умножение на фиксированную абелеву группу N может быть не точно слева.

а) Покажите, что для точности тройки абелевых групп $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ достаточно, чтобы над любой абелевой группой X естественные преобразования

$$0 \to h_A(X) \xrightarrow{\alpha_*} h_B(X) \xrightarrow{\beta_*} h_C(X) \to 0$$

---

[1] согласно сл. 9.5 на стр. 165 это означает, что он перестановочен не только с коядрами, но и с ядрами: если стрелки $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ задают естественное преобразование фильтрованных диаграмм $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{A}b$ и существуют копределы $C_X = \operatorname{colim} X_\nu$ и $C_Y = \operatorname{colim} Y_\nu$, то существует и $\operatorname{colim}\ker f_\nu \simeq \ker\big(\operatorname{colim} f_\nu : C_X \to C_Y\big)$

составляли точную тройку, и приведите пример, показывающий, что это условие не является необходимым.

Задача 9.9. Модуль P называется *проективным*, если функтор h^P сохраняет точность. Покажите, что проективность модуля P равносильна каждому из свойств:

а) любая стрелка $\varphi : P \to X$ поднимается вдоль любого эпиморфизма $\pi : Y \twoheadrightarrow X$, т. е. существует $\psi : P \to Y : \varphi = \pi\psi$

б) любой эпиморфизм $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ расщепляется, т. е. существует такой изоморфизм $\gamma : Z \xrightarrow{\sim} \ker \pi \oplus P$, что $\pi = \pi_P \gamma$.

Задача 9.10. Покажите, что для любого кольца R с единицей категории правых модулей над кольцами матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ и $\mathrm{Mat}_{m\times m}(R)$ точно[1] эквивалентны друг другу при всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Задача 9.11. Модуль I называется *инъективным*, если функтор h_I сохраняет точность. Покажите, что инъективность объекта I абелевой категории $\mathcal{A}$ равносильна каждому из свойств:

а) любая стрелка $\varphi : X \to I$ продолжается на любое расширение[2] $\iota : X \hookrightarrow Y$

б) любое вложение $\iota : I \hookrightarrow Z$ расщепляется: $\iota = \gamma\iota_I$ для некоторого изоморфизма $\gamma : I \oplus \operatorname{coker} \iota \xrightarrow{\sim} Z$.

Задача 9.12. Покажите, что абелева группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективна и для любых $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}b$ и $a \in A$ имеется $\psi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\psi(a) \neq 0$.

Задача 9.13. Покажите, что абелева группа $I_R = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ со структурой правого R-модуля, задаваемой левым действием R на себе, инъективна и функтор h_{I_R} строг[3].

Задача 9.14 (абелевы категории). Категория $\mathcal{A}$ называется *абелевой*, если она обладает следующими свойствами:

(A_1) в $\mathcal{A}$ есть *нулевой объект* 0, одновременно являющийся и начальным, и конечным

(A_2) у каждой пары объектов есть произведение и копроизведение

(A_3) у каждой стрелки есть ядро[4] и коядро[5]

(A_4) каждый мономорфизм[6] является ядром некоторой стрелки, а каждый эпимирфизм[7] — коядром некоторой стрелки.

---

[1] т. е. задающий эквивалентность функтор точен

[2] т. е. существует такой $\psi : Y \to I$, что $\psi\iota = \varphi$

[3] переводит разные стрелки в разные

[4] *ядром* $\ker \varphi$ морфизма $\varphi : X \to Y$ называется уравнитель φ и *нулевого морфизма* (композиции канонических стрелок $X \to 0 \to Y$)

[5] *коядром* $\operatorname{coker} \varphi$ морфизма $\varphi : X \to Y$ называется коуравнитель φ и нулевого морфизма

[6] т. е. стрелка, на которую можно сокращать слева

[7] т. е. стрелка, на которую можно сокращать справа

Убедитесь, что категория $\mathcal{A}$ абелева, если и только если противоположная категория $\mathcal{A}^{\text{opp}}$ тоже абелева, и докажите, что в каждой абелевой категории[1]

а) сопоставление стрелке с концом в X её коядра корректно задаёт биективное отображение из класса подобъектов[2] объекта X в класс фактор объектов[3] объекта X, и обратное отображение сопоставляет стрелке с началом в X её ядро

б) любая одновременно мономорфная и эпиморфная стрелка обратима

в) любые два подобъекта каждого объекта имеют максимальную нижнюю грань[4] относительно естественного частичного порядка, в котором класс инъективной стрелки $\varphi : U \hookrightarrow X$ не превосходит класс инъективной стрелки $\psi : U \hookrightarrow X$, если $\varphi = \psi\xi$ для некоторого $\xi : U \to W$

г) любые две стрелки имеют уравнитель и коуравнитель, в частности, в $\mathcal{A}$ существуют все послойные произведения и копроизведения

д) образ[5] и кообраз[6] любого морфизма канонически изоморфны

е) для любой пары объектов X, Y каноническая стрелка $\iota : X \otimes Y \to X \times Y$ обратима

ж) сложение морфизмов $\varphi, \psi : X \to Y$, определяемое диаграммой[7]

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "\varphi+\psi"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & & & Y \\
X \times X \arrow[r, "\varphi\times\psi"] & Y \times Y \arrow[rr, "\iota^{-1}"] & & Y \otimes Y \arrow[u, "\nabla_Y"']
\end{tikzcd}$$

дистрибутивно по отношению к композициям морфизмов и задаёт на $\mathrm{Hom}(X, Y)$ структуру абелевой группы

з) во всяком послойном произведении

$$\begin{tikzcd}
X \underset{B}{\times} Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\
X \arrow[r, "\xi"] & B
\end{tikzcd}$$

эпиморфность ξ влечёт эпиморфность ψ, и ψ задаёт изоморфизм $\ker\varphi \xrightarrow{\sim} \ker\eta$.

Задача 9.15 (диаграмный поиск). Назовём *элементом* $a \in A$ объекта A абелевой категории $\mathcal{A}$ класс стрелок с концами в A по модулю эквивалентности, отождествляющей α_1 и α_2 при наличии такой пары эпиморфных стрелок π_1, π_2 с общим началом, что $\alpha_1\pi_1 = \alpha_2\pi_2$. Проверьте, что это эквивалентность и что всякий морфизм

---

[1] решения можно подглядеть во второй главе книги *P. Freyd*. «Abelian Categories»

[2] *подобъектом* объекта X называется класс эквивалентности инъективной стрелки с концом в X по модулю правого умножения на обратимые стрелки

[3] *фактор объектом* объекта X называется класс эквивалентности сюрьективной стрелки с началом в X по модулю левого умножения на обратимые стрелки

[4] она называется *пересечением* этих подобъектов

[5] *образом* стрелки $\varphi : X \to Y$ называется коядро канонической стрелки $X \to \ker\varphi$

[6] *кообразом* стрелки $\varphi : X \to Y$ называется ядро канонической стрелки $Y \to \mathrm{coker}\,\varphi$

[7] в которой Δ_X и ∇_Y — канонические морфизмы, отвечающие парам тождественных отображений Id_X и Id_Y

$\varphi : A \to B$ корректно отображает элементы A в элементы B, причём:

а) мономорфность φ равносильна тому, что $\forall\, a \in A\ \varphi(a) = 0 \Rightarrow a = 0$ (где $0 \in A$ — класс нулевой стрелки), и тому, что $\forall\, a_1, a_2 \in A\ \varphi(a_1) = \varphi(a_2)\ \Rightarrow\ a_1 = a_2$

б) эпиморфность φ равносильна тому, что $\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A : \varphi(a) = b$

в) $\varphi = 0 \Longleftrightarrow \forall\, a \in A\ \varphi(a) = 0$

г) $\operatorname{im}\varphi$ совпадает с ядром стрелки ψ, такой что $\psi\varphi = 0$, если и только если $\forall\, b \in B$: $\psi(b) = 0\ \exists\, a \in A : \varphi(a) = b$

д) $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$, если и только если $\exists\, a \in A : \varphi(a) = 0$ и $\xi(a) = -\xi(a_1)$, $\zeta(a) = \zeta(a_2)$ для любой аннулирующей a_2 стрелки $\xi : A \to X$ и любой аннулирующей a_1 стрелки $\zeta : A \to Z$.

Задача 9.16. Покажите, что в любой абелевой категории $\mathcal{A}$ справедливы следующие стандартные леммы о точных последовательностях:

а) в коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_4"] & X_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5
\end{tikzcd}$$

из сюрьективности φ_1, инъективности φ_5 и обратимости φ_2 и φ_4 вытекает обратимость φ_3

б) в коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi'"] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

существует стрелка $\delta : \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$, включающуюся в точную последовательность

$$0 \longrightarrow \ker\alpha \xrightarrow{\varphi_*} \ker\beta \xrightarrow{\psi_*} \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{\varphi'_*} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{\psi'_*} \operatorname{coker}\gamma \longrightarrow 0$$

Задача 9.17. Объект G называется *генератором*, если функтор $h^G : X \mapsto \operatorname{Hom}(G, X)$ строг[1]. Покажите, что абелева категория с генератором *умеренно мощна*, т. е. подобъекты любого объекта составляют множество, а не больший класс.

---

[1] переводит разные стрелки в разные

§10. Расширения коммутативных колец

10.1. Целые элементы. Всюду этом параграфе слово «кольцо» по умолчанию означает *коммутативное кольцо с единицей*, а все гомоморфизмы колец предполагаются отображающими единицу в единицу. В частности, *расширением колец* $A \subset B$ мы называем ситуацию, когда коммутативное кольцо A является подкольцом коммутативного кольца B, и у этих колец общая единица. В этой ситуации элемент $b \in B$ называется *целым* над A, если он удовлетворяет условиям идущей ниже леммы.

Лемма 10.1 (определяющие свойства целых элементов)
Следующие три свойства элемента $b \in B$ попарно эквивалентны:

(1) $b^m = a_1 b^{m-1} + \dots + a_{m-1} b + a_m$ для некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$

(2) A-линейная оболочка всех целых неотрицательных степеней b^m линейно порождается над A конечным числом элементов

(3) существует конечно порожденный A-подмодуль $M \subset B$, такой что $bM \subset M$ и для каждого $b' \in B$ из $b'M = 0$ вытекает, что[1] $b' = 0$.

Доказательство. Импликации (1) ⇒ (2) ⇒ (3) очевидны. Чтобы вывести (1) из (3), допустим, что $e_1, e_2, \dots, e_m$ порождают M над A и что A-линейный оператор умножения на $b : M \to M$, $m \mapsto bm$, представляется в этих образующих матрицей $Y \in \mathrm{Mat}_m(A)$, т. е. действует по правилу

$$(be_1, be_2, \dots, be_m) = (e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot Y \,. \tag{10-1}$$

Из матричного тождества $\det X \cdot E = X \cdot X^{\vee}$, где X — произвольная квадратная матрица, E — единичная матрица того же размера, а $X^{\vee}$ — присоединённая к X матрица[2], вытекает, что образ оператора умножения на $\det X$ содержится в линейной оболочке столбцов матрицы X. Поэтому умножение элементов модуля M на число $\det(bE - Y) \in B$ посылает их в линейную оболочку векторов $(e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot (bE - Y)$, нулевую согласно (10-1). В силу B-точности модуля M обнуление $\det(bE - Y) \cdot M$ влечёт равенство $\det(bE - Y) = 0$. Поскольку все элементы матрицы Y лежат в A, это равенство имеет такой вид, как в условии (1). □

Определение 10.1
Множество всех $b \in B$, целых над данным подкольцом $A \subset B$, называется *целым замыканием* A в B. Если оно не содержит ничего, кроме элементов самого A, то A называется *целозамкнутым* в B. Наоборот, если все $b \in B$ целы над A, то B называется *целым расширением* кольца A или *целой A-алгеброй*.

---

[1] модуль M со свойством $\forall\, b' \in B \quad b'M = 0 \Rightarrow b' = 0$ называется *точным* (по-английски *faithful*) над B

[2] состоящая из алгебраических дополнений к элементам матрицы X^t

Пример 10.1 (целозамкнутость $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}$)
Покажем, что кольцо $\mathbb{Z}$ целозамкнуто в поле $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$. Если дробь p/q с взаимно простыми $p, q \in \mathbb{Z}$ такова, что

$$\frac{p^m}{q^m} = a_1 \frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + \cdots + a_{m-1} \frac{p}{q} + a_m$$

с $a_i \in \mathbb{Z}$, то $p^m = a_1 q p^{m-1} + \cdots + a_{m-1} q^{m-1} p + a_m q^m$ делится на q, что при взаимно простых p и q возможно только если $q = \pm 1$.

Пример 10.2 (инварианты действия конечной группы)
Если конечная группа G действует на кольце B кольцевыми автоморфизмами, то кольцо B цело над *подкольцом инвариантов* $B^G \overset{\text{def}}{=} \{a \in B \mid ga = a \ \forall g \in G\}$: если G-орбита элемента $b \in B$ состоит из элементов $b_1 = b, b_2, b_3, \dots, b_n$, то элемент b является корнем приведённого[1] многочлена $B(t) = \prod(t - b_i) \in B^G[t]$.

Предложение 10.1
Целое замыкание $\overline{A}_B \subset B$ любого подкольца $A \subset B$ является подкольцом в B. Для любого кольца $C \supset B$ всякий элемент $c \in C$, целый над $\overline{A}_B$, цел и над A.

Доказательство. Если элементы $p, q \in B$ таковы, что

$$p^m = x_1 p^{m-1} + \cdots + x_{m-1} p + x_m \quad \text{и} \quad q^n = y_1 q^{n-1} + \cdots + y_{n-1} q + y_n$$

для некоторых $x_\nu, y_\mu \in A$, то произведения $p^i q^j$ с $0 \leqslant i < m - 1$ и $0 \leqslant j < n - 1$ порождают точный над B A-модуль, выдерживающий умножение и на p, и на q, а значит, и на $p + q$, и на pq. Аналогично, если

$$c^r = z_1 c^{r-1} + \cdots + z_{r-1} c + z_r, \quad \text{и} \quad z_k^{m_k} = a_{k,1} z^{m_k - 1} + \cdots + a_{k, m_k - 1} z_k + a_{k, m_k}$$

для всех $1 \leqslant k \leqslant r$ и некоторых $a_{k,\ell} \in A$, то умножение на c сохраняет A-линейную оболочку всех произведений $c^i z_1^{j_1} z_2^{j_2} \cdots z_r^{j_r}$ с $0 \leqslant i < r - 1$ и $0 \leqslant j_k < m_k - 1$. □

Следствие 10.1 (лемма Гаусса – Кронекера – Дедекинда)
Для любого расширения колец $A \subset B$ и произвольных приведённых многочленов $f, g \in B[x]$ положительной степени все коэффициенты произведения $f(x)g(x)$ целы над A, если и только если все коэффициенты и у $f(x)$ и у $g(x)$ целы над A.

Доказательство. Если коэффициенты многочленов f и g целы над A, то коэффициенты их произведения $h = fg$ тоже целы над A, поскольку целые элементы образуют кольцо. Чтобы показать обратное, рассмотрим какое-нибудь

---

[1] напомню, что многочлен называется *приведённым*, если его старший коэффициент равен единице

кольцо $C \supset B$, над которым f и g полностью разлагаются на линейные множители[1]:

$$f(x) = \prod(x - \alpha_\nu)\,, \quad g(x) = \prod(x - \beta_\mu)\,, \quad \text{для некоторых } \alpha_\nu, \beta_\mu \in C\,.$$

Если все коэффициенты $h(x) = \prod(x - \alpha_\nu)\prod(x - \beta_\mu)$ целы над A, то все корни α_ν и β_μ целы над целым замыканием A в C, а значит, и над самим A. Поскольку коэффициенты f и g являются многочленами от α_ν и β_μ, они тоже целы над A. □

Предложение 10.2

Пусть кольцо B цело над подкольцом $A \subset B$. Если B — поле, то A также является полем. Наоборот, если A — поле, и в B нет делителей нуля, то B — поле.

Доказательство. Если B — поле, целое над A, то обратный к произвольному ненулевому $a \in A$ элемент $a^{-1} \in B$ удовлетворяет уравнению

$$a^{-m} = \alpha_1\, a^{1-m} + \cdots + \alpha_{m-1}\, a^{-1} + \alpha_0\,,$$

в котором $\alpha_\nu \in A$. Умножая обе его части на a^{m-1}, получаем

$$a^{-1} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m-1}\, a^{m-2} + \alpha_0\, a^{m-1} \in A\,.$$

Обратно, если A — поле, и B — целая A-алгебра, то все неотрицательные целые степени b^i любого $b \in B$ порождают конечномерное векторное пространство V над A. Если $b \neq 0$, и в B нет делителей нуля, то линейный оператор $b : V \to V$, $x \mapsto bx$, не имеет ядра и, стало быть, биективен. Прообраз $1 \in V$ и есть b^{-1}. □

10.1.1. Целые алгебраические числа . Пусть поле $K \supset \mathbb{Q}$ конечномерно как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Элементы таких полей называются *алгебраическими числами*. По предл. 10.1 целые над $\mathbb{Z}$ алгебраические числа образуют в поле K подкольцо. Оно называется *кольцом целых* поля K и обозначается $\mathcal{O}_K$.

Упражнение 10.1. Покажите, что для любого $\xi \in K$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $n\xi$ цело над $\mathbb{Z}$.

Из упражнения вытекает, что K является полем частных кольца $\mathcal{O}_K$, и для любого базиса $\{e_i\}$ поля K как векторного пространства над $\mathbb{Q}$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что все $ne_i \in \mathcal{O}_K$.

Упражнение 10.2. Покажите, что $\mathcal{O}_K$ является свободным $\mathbb{Z}$-модулем ранга $\dim_{\mathbb{Q}} K$, и выведите из этого, что число $z \in K$ является целым , если и только если оператор умножения на z записывается целочисленной матрицей *в каком-нибудь* базисе[2] K над $\mathbb{Q}$.

---

[1] кольцо $C \supset B$, над которым заданный приведённый многочлен $f \in B[x]$ полностью раскладывается на линейные множители, можно построить индукцией по $\deg f$: если $\deg f > 0$, то B вкладывается в фактор $F = B[x]/(f)$ как подкольцо классов констант, и так как класс $\varkappa = x \operatorname{mod}(h) \in F$ является корнем f, то $f(x) = (x - \varkappa) \cdot f_1(x)$ в $F[x]$, где $\deg f_1 < \deg f$, и по индукции $f_1 = \prod(x - c_\nu)$ над некоторым кольцом $C \supset F \supset B$

[2] именно таким образом целые алгебраические числа и были впервые определены в XIX веке Дедекиндом

Определение 10.2
Вычисленный в произвольном базисе свободного $\mathbb{Z}$-модуля $\mathcal{O}_K$ определитель Грама билинейной *формы следа* $\mathrm{Sp} : K \times K \to \mathbb{Q}$, сопоставляющей числам $\alpha, \beta \in K$ след оператора умножения на $\alpha\beta$, называется *дискриминантом* поля K.

Упражнение 10.3. Убедитесь, что форма следа невырождена, а дискриминант является целым числом и не зависит от выбора базиса кольца целых как модуля над $\mathbb{Z}$.

Пример 10.3 (целые числа Кронекера)
Покажем, что целые элементы поля $\mathbb{Q}[\omega]$, где $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, исчерпываются *целыми числами Кронекера* $a + b\omega$ с $a, b \in \mathbb{Z}$. Каждое число из $\mathbb{Q}[\omega] \smallsetminus \mathbb{Q}$ можно записать как

$$\xi = \frac{p_1 + p_2\omega}{q}\,, \quad \text{где } p_1, p_2 \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N},\, p_2 \neq 0 \text{ и } \text{нод}(p_1, p_2, q) = 1\,. \tag{10-2}$$

Если оператор умножения на ξ имеет целочисленную матрицу в некотором базисе пространства K над $\mathbb{Q}$, то его след $\mathrm{tr}(\xi)$ и определитель $\det(\xi)$ лежат в $\mathbb{Z}$ и не зависят от выбора базиса. В базисе $1, \omega$ умножение на ξ записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} p_1/q & -p_2/q \\ p_2/q & (p_1 - p_2)/q \end{pmatrix}$$

Поэтому $2p_1 - p_2 = q \cdot \mathrm{tr}(\xi)$ делится на q, а $p_1^2 - p_1p_2 + p_2^2 = q^2 \cdot \det(\xi)$ делится на q^2. Тем самым, разность $(2p_1 - p_2)^2 - (p_1^2 - p_1p_2 + p_2^2) = 3p_1(p_1 - p_2)$ делится на q^2, что возможно лишь тогда, когда каждый простой делитель α числа q делит p_1 или $p_1 - p_2$. Если α делит p_1, то поскольку $2p_1 - p_2$ делится на q, α делит также и p_2, что противоречит условию $\text{нод}(p_1, p_2, q) = 1$. Аналогично, если α делит $p_1 - p_2$, то α делит и p_1, что также невозможно. Следовательно, у q нет простых делителей, т. е. $q = 1$.

10.2. Приложения к теории представлений. Пусть G — конечная группа. Значение характера χ_ϱ любого конечномерного представления ϱ группы G на любом элементе $g \in G$ цело над $\mathbb{Z}$ в силу того, что оператор $\varrho(g)$ аннулируется многочленом $t^{|G|} - 1$, все корни которого целы над $\mathbb{Z}$, а $\chi_\varrho(g)$ это сумма некоторых из них[1].

Теорема 10.1
Если комплексное представление $\varrho : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}\, V$ конечной группы G неприводимо, то $\dim V$ делит индекс $[G : Z(G)]$ центра $Z(G)$ группы G.

---

[1] напомню, что собственные числа оператора содержатся среди корней любого аннулирующего этот оператор многочлена

Доказательство. Покажем сначала, что $\dim V$ делит $|G|$. Согласно прим. 10.1 для этого достаточно убедиться, что рациональное число $|G|/\dim V$ цело над $\mathbb{Z}$. Так как V неприводимо, скалярный квадрат характера χ_V равен единице:

$$1 = (\chi_V, \chi_V) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \operatorname{tr} \varrho(g^{-1}) \cdot \operatorname{tr} \varrho(g) . \tag{10-3}$$

Функция $g \mapsto \operatorname{tr} \varrho(g^{-1})$ постоянна на классах сопряжённых элементов и принимает целые над $\mathbb{Z}$ значения. Обозначим её значение на классе $K \in \mathrm{Cl}(G)$ через $\tau(K) \in \mathbb{C}$ и перепишем (10-3) как

$$\frac{|G|}{\dim V} = \frac{1}{\dim V}\sum_{g\in G} \operatorname{tr} \varrho(g^{-1}) \cdot \operatorname{tr} \varrho(g) = \sum_{K\in \mathrm{Cl} G} \tau(K) \cdot \frac{1}{\dim V} \cdot \operatorname{tr} \sum_{g\in K} \varrho(g) . \tag{10-4}$$

Остаётся проверить, что каждое из чисел

$$\frac{1}{\dim V} \cdot \operatorname{tr} \sum_{g\in K} \varrho(g) = \frac{1}{\dim V} \cdot \operatorname{tr}\ \varrho\Big(\sum_{g\in K} g\Big)$$

является целым над $\mathbb{Z}$. Элемент $g_K = \sum\limits_{g\in K} g \in \mathbb{Z}[G] \cap Z(\mathbb{C}[G])$ лежит в конечно порождённом $\mathbb{Z}$-модуле центральных элементов групповой алгебры, являющихся целочисленными линейными комбинациями элементов группы. Неприводимое представление $\varrho : \mathbb{C}[G] \to \operatorname{End} V$ переводит этот $\mathbb{Z}$-модуль в конечно порождённый $\mathbb{Z}$-подмодуль алгебры $\operatorname{End} V$, причём все его операторы, будучи перестановочными с неприводимым действием группы, являются по лемме Шура скалярными гомотетиями. Коэффициенты этих гомотетий составляют таким образом конечно порождённый $\mathbb{Z}$-подмодуль в $\mathbb{C}$, выдерживающий умножение на каждый из коэффициентов. Следовательно, все эти коэффициенты целы над $\mathbb{Z}$. Но коэффициент гомотетии $\varrho(g_K)$ как раз и равен $\operatorname{tr} \varrho(g_K)/\dim V$, что и завершает доказательство целостности $|G|/\dim V$.

Докажем теперь утверждение теоремы, а именно установим целость над $\mathbb{Z}$ рационального числа $q = [G : Z(G)]/\dim V$. Для этого достаточно убедиться, что все его натуральные степени q^n лежат в конечно порождённом $\mathbb{Z}$-подмодуле поля $\mathbb{Q}$. Рассмотрим представление группы $G^n = G \times G \times \cdots \times G$ в пространстве $W = V^{\otimes n}$, заданное правилом $(g_1, g_2, \dots, g_n) : v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto \varrho(g_1)v_1 \otimes \varrho(g_2)v_2 \otimes \cdots \varrho(g_n)v_n$.

Упражнение 10.4. Убедитесь, что это представление неприводимо.

Подгруппа $C \subset G^n$, состоящая из элементов $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ с $c_i \in Z(G)$ и $c_1c_2 \dots c_n = 1$, содержится в ядре этого представления, поскольку по лемме Шура каждый центральный элемент c_i действует в неприводимом представлении ϱ умножением на некоторую константу, и в силу равенства $\varrho(c_1c_2 \dots c_n) = 1$ произведение этих констант равно единице. Подгруппа C имеет порядок $|Z(G)|^{n-1}$ и нормальна, поскольку лежит в центре группы G^n. Пространство W размерности

$(\dim V)^n$ является неприводимым представлением фактор группы G^n/C порядка $|G|^n/|Z(G)|^{n-1}$. По уже доказанному

$$\frac{|G|^n}{(\dim V)^n|Z(G)|^{n-1}} = |Z(G)| \cdot q^n \in \mathbb{Z}\,.$$

Тем самым, все степени q^n лежат в конечно порождённом $\mathbb{Z}$-подмодуле $|Z(G)|^{-1}\cdot \mathbb{Z}$ поля $\mathbb{Q}$, что и требовалось. □

10.3. Алгебраические элементы. Коммутативная $\Bbbk$-алгебра B называется *конечно порожденной*, если она является фактором кольца многочленов, т. е. имеется эпиморфизм $\Bbbk$-алгебр $\pi\,:\,\Bbbk[x_1,x_2,\dots,x_m] \twoheadrightarrow B$. В этом случае образы переменных $b_i = \pi(x_i) \in B$ называются *образующими* алгебры B, а ядро $\ker\pi \subset \Bbbk[x_1,x_2,\dots,x_m]$ называется *идеалом соотношений* между ними. Целость элемента $b \in B$ над полем $\Bbbk$ равносильна его *алгебраичности*, т. е. тому, что b удовлетворяет какому-нибудь — необязательно приведённому — уравнению $f(b) = 0$ с ненулевым $f \in \Bbbk[x]$. Иначе алгебраичность элемента $b \in B$ над $\Bbbk$ можно охарактеризовать тем, что *гомоморфизм вычисления*

$$\mathrm{ev}_b\,:\,\Bbbk[x]\to B\,,\quad f\mapsto f(b) \tag{10-5}$$

имеет ненулевое ядро. Так как все идеалы в $\Bbbk[x]$ главные, $\ker(\mathrm{ev}_b) = (\mu_b)$. Образующая $\mu_b \in \Bbbk[x]$ однозначно определяется по b как приведённый многочлен наименьшей степени, аннулирующий b. Этот многочлен называется *минимальным многочленом* элемента b над $\Bbbk$. Элемент $b \in B$, не являющийся алгебраическим, называется *трансцендентным* над $\Bbbk$.

Мы будем обозначать через $\Bbbk[b] = \mathrm{im}\,\mathrm{ev}_b \subset B$ наименьшую $\Bbbk$-подалгебру в B, содержащую 1 и b. Если b трансцендентен, эта подалгебра изоморфна кольцу многочленов $\Bbbk[x]$. В частности, она бесконечномерна как векторное пространство над $\Bbbk$ и не является полем. Если элемент b алгебраичен, размерность подалгебры $\Bbbk[b] = \Bbbk[x]/(\mu_b)$ как векторного пространства над $\Bbbk$ равна $\dim_{\Bbbk}\Bbbk[b] = \deg\mu_b$, и эта подалгебра является полем, если и только если минимальный многочлен μ_b неприводим.

Упражнение 10.5. Убедитесь, что следующие три свойства алгебраического над $\Bbbk$ элемента $b \in B$ с минимальным минимальный многочленом $\mu_b \in \Bbbk[x]$ эквивалентны друг другу: а) $\Bbbk[b]$ является полем б) $\Bbbk[b]$ не имеет делителей нуля в) μ_b неприводим в $\Bbbk[t]$.

Теорема 10.2

Если конечно порожденная $\Bbbk$-алгебра B является полем, то все её элементы алгебраичны над $\Bbbk$.

Доказательство. Пусть B имеет образующие $\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$ и является полем. Доказывать алгебраичность B будем индукцией по m. Когда $m = 1$, т. е. $B =$

$\Bbbk[b]$, всё очевидно: если b трансцендентен, гомоморфизм (10-5) отождествляет B с кольцом многочленов $\Bbbk[x]$, которое не является полем. Пусть $m > 1$. Если b_m алгебраичен над $\Bbbk$, то $\Bbbk[b_m]$ — поле, и по предположению индукции B алгебраично над $\Bbbk[b_m]$, а значит, по предл. 10.1 B алгебраично и над $\Bbbk$. Таким образом, достаточно показать, что b_m алгебраичен над $\Bbbk$.

Допустим, что b_m трансцендентен. Тогда гомоморфизм (10-5) продолжается до изоморфизма поля рациональных функций $\Bbbk(x)$ с наименьшим содержащим b_m подполем $\Bbbk(b_m) \subset B$. По предположению индукции, B алгебраично над $\Bbbk(b_m)$, т. е. каждая из образующих $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$ удовлетворяет некоторому полиномиальному уравнению с коэффициентами из $\Bbbk(b_m)$. Умножая эти уравнения на подходящие многочлены от b_m, мы можем добиться того, чтобы все их коэффициенты лежали в $\Bbbk[b_m]$, а также сделать все их старшие коэффициенты равными одному и тому же многочлену, который мы обозначим через $p(b_m) \in \Bbbk[b_m]$. В результате поле B оказывается целым над подалгеброй $F = \Bbbk[b_m\,,\,1/p(b_m)] \subset B$, порожденной над $\Bbbk$ элементами b_m и $1/p(b_m)$. По лемме предл. 10.2 эта подалгебра F должна быть полем, что невозможно, поскольку, к примеру, $1 + p(b_m)$ не обратим в F: если есть такой многочлен $g \in \Bbbk[x_1, x_2]$, что $g\left(b_m\,,\,1/p(b_m)\right) \cdot (1 + p(b_m)) = 1$, то, записывая рациональную функцию $g\,(\,x\,,\,1/p(x)\,)$ в виде $h(x)\,/\,p^k(x)$, где $h \in \Bbbk[x]$ не делится на p, и умножая обе части предыдущего равенства на $p^k(b_m)$, мы получим на b_m полиномиальное уравнение $h(b_m)\cdot(p(b_m)+1) = p^{k+1}(b_m)$, нетривиальное, поскольку $h(x)(1+p(x))$ не делится в $\Bbbk[x]$ на $p(x)$. □

Следствие 10.2

Всякое поле $\mathbb{F}$, которое конечно порождено как алгебра над своим подполем $\Bbbk \subset \mathbb{F}$, конечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$.

Доказательство. Индукция по числу образующих: добавление очередной алгебраической образующей приводит к конечномерному пространству над полем, порождённым предыдущими образующими. □

Определение 10.3 (нормальные кольца)

Коммутативное кольцо A без делителей нуля называется *нормальным*, если оно целозамкнуто в своём поле частных Q_A. В частности, каждое поле нормально.

Пример 10.4 (факториальные кольца нормальны)

Дословно то же рассуждение, что и в прим. 10.1, показывает, что любое факториальное[1] кольцо A нормально: многочлен $a_0t^m + a_1t^{m-1} + \dots + a_{m-1}t + a_m \in A[t]$

---

[1] напомним, что кольцо A называется *факториальным*, если в нём нет делителей нуля, и каждый необратимый элемент $a \in A$ является произведением конечного числа неприводимых, причём для любых двух разложений $a = p_1p_2 \cdots p_n = q_1q_2 \cdots q_m$ в произведение неприводимых множителей $m = n$ и (после надлежащей перенумерации) $p_i = s_iq_i$ для некоторых обратимых $s_i \in A$; например, факториальными являются любое поле, любое кольцо главных

аннулирует дробь $p/q \in Q_A$ с нод$(p,q) = 1$, только если $q|a_0$ и $p|a_m$, поэтому из $a_0 = 1$ вытекает, что $q = 1$. В частности, кольцо многочленов от любого числа переменных над факториальным кольцом нормально.

Предложение 10.3 (лемма Гаусса – 2)
Пусть A — нормальное кольцо с полем частных Q_A. Если многочлен $f \in A[x]$ раскладывается в $Q_A[x]$ в произведение приведённых множителей, то эти множители лежат в $A[x]$. ☐

Лемма 10.2
Пусть $\Bbbk = Q_A$ является полем частных коммутативного кольца A без делителей нуля. Если элемент b какой-либо Q_A-алгебры B цел над A, то он алгебраичен над Q_A и все коэффициенты его минимального многочлена $\mu_b \in Q_A[x]$ целы над A.

Доказательство. Поскольку b цел над A, он удовлетворяет уравнению $f(b) = 0$, в котором $f \in A[x]$ приведён. Тем самым, $\ker \mathrm{ev}_b \neq 0$ и $f = \mu_b \cdot q$ в кольце $Q_A[x]$. По сл. 10.1 все коэффициенты μ_b целы над A. ☐

Следствие 10.3
Пусть A — нормальное кольцо с полем частных Q_A, и B — произвольная Q_A-алгебра. Если элемент $b \in B$ цел над A, то его минимальный многочлен над полем Q_A лежит в $A[x]$. ☐

10.4. Базисы трансцендентности. Пусть $\Bbbk$-алгебра A не имеет делителей нуля. Обозначаем через Q_A её поле частных, а через $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$ — наименьшее подполе, содержащее заданные элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$.

Элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ называются *алгебраически независимыми* над $\Bbbk$, если между ними нет соотношений вида $f(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$, где f — многочлен, т. е. если отображение вычисления

$$\mathrm{ev}_{(a_1,a_2,\dots,a_m)} : \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m] \to A\,, \quad f \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

инъективно. В этом случае оно продолжается до изоморфизма полей

$$\Bbbk(x_1, x_2, \dots, x_m) \xrightarrow{\sim} \Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A\,,$$

переводящего рациональную функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в её значение на элементах a_i.

Элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ называются *алгебраически порождающими* A над $\Bbbk$, если каждый элемент алгебры A алгебраичен над $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$. В этом случае всё поле Q_A тоже алгебраично над $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$, т. к. по предл. 10.2

идеалов (в частности, кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$) и кольца многочленов $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ над любым факториальным кольцом K

целое замыкание $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$ в Q_A является полем, содержащим A, а значит, и Q_A.

Алгебраически независимый набор элементов $a_1, a_2, \dots, a_m$ из алгебры A, алгебраически порождающий A над $\Bbbk$, называется *базисом трансцендентности* A над $\Bbbk$. Поскольку собственные подмножества любого базиса трансцендентности алгебраически независимы, но не являются базисами трансцендентности, базис трансцендентности можно иначе охарактеризовать либо как такой минимальный по включению набор $a_1, a_2, \dots, a_m$, что алгебра A алгебраична над $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$, либо как максимальный по включению алгебраически независимый набор $a_1, a_2, \dots, a_m$. Доказательство того, что все базисы трансцедентности состоят из одинакового числа элементов совершенно аналогично доказательству оответствующей теоремы о базисах векторных пространств.

Лемма 10.3 (о замене)
Если $b_1, b_2, \dots, b_n \in A$ алгебраически независимы, а $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ алгебраически порождают A над $\Bbbk$, то $n \leqslant m$ и элементы a_i можно перенумеровать так, что набор $b_1, \dots, b_n, a_{n+1}, \dots, a_m$ будет алгебраически порождать A над $\Bbbk$.

Доказательство. Поскольку b_1 алгебраичен над $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$, имеется содержащее b_1 полиномиальное соотношение $f(b_1, a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$, и т. к. b_1 трансцендентен над $\Bbbk$, в это соотношение входит какое-нибудь a_i. Перенумеруем a_i так, чтобы это было a_1. Тогда a_1, а с ним и вся алгебра A алгебраичны над $\Bbbk(b_1, a_2, \dots, a_m)$. Пусть по индукции элементы $b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_m$ алгебраически порождают алгебру A над $\Bbbk$, и при этом $k < n$. Поскольку b_{k+1} алгебраичен над $\Bbbk\left(b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_m\right)$, имеется содержащее b_{k+1} полиномиальное соотношение

$$f\left(\left(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, a_{k+1}, \dots, a_m\right)\right) = 0,$$

и т. к. набор $b_1, b_2, \dots, b_n$ алгебраически независим над над $\Bbbk$, в это соотношение входит какое-нибудь a_i, откуда, в частности, следует что $m > k$. Перенумеровывая оставшиеся a_i так, чтобы это было a_{k+1}, мы как и выше заключаем, что a_{k+1}, а с ним и вся алгебра A алгебраичны над $\Bbbk\left(b_1, \dots, b_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_m\right)$, т. е. воспроизводим индуктивное предположение. □

Следствие 10.4 (теорема о базисе)
Все базисы трансцендентности конечно порождённой $\Bbbk$-алгебры состоят из одинакового числа элементов, не превосходящего число образующих, причём любой набор элементов, алгебраически порождающий A над $\Bbbk$, содержит в себе базис трансцендентности, а любой алгебраически независимый набор элементов можно дополнить до базиса трансцендентности. □

Определение 10.4
Число элементов в базисе трансцендентности конечно порождённой алгебры A над $\Bbbk$ называется *степенью трансцендентности* этой алгебры и обозначается $\operatorname{tr}\deg_{\Bbbk} A$.

Пример 10.5
Степень трансцендентности любой отличной от поля $\Bbbk$ подалгебры $A \subset \Bbbk(t)$ в поле рациональных функций $\Bbbk(t)$ равна единице. В самом деле, если $\psi = f(t)\,/\,g(t) \in A \smallsetminus \Bbbk$, то элемент t алгебраичен над наименьшим содержащим ψ подполем $\Bbbk(\psi) \subset \mathbb{Q}_A$, ибо удовлетворяет уравнению $\psi \cdot g(x) - f(x) = 0$ с коэффициентами в $\Bbbk(\psi)$.

Упражнение 10.6. Убедитесь, что многочлен $\psi \cdot g(x) - f(x)$ отличен от нуля в $\Bbbk(\psi)[x]$.

Поэтому ψ трансцендентен над $\Bbbk$ (иначе t был бы алгебраичен над $\Bbbk$), и поле $\Bbbk(t)$ алгебраично над полем $\Bbbk(\psi)$, причём последнее поле изоморфно полю рациональных функций.

Задачи для самостоятельного решения к §10

Задача 10.1 (нётеровы модули). Модуль M над коммутативным кольцом K называется *нётеровым*, если любой его подмодуль конечно порождён. Покажите, что

а) всякий сюрьективный эндоморфизм нётерова модуля является изоморфизмом

б) если M нётеров, то фактор кольцо $K/\operatorname{Ann}(M)$ по идеалу $\operatorname{Ann}(M) \overset{\text{def}}{=} \{x \in K \mid xM = 0\}$ тоже нётерово.

Задача 10.2. Пусть A-модуль M порождается элементами $m_1, m_2, \dots, m_r \in M$ и A-линейный эндоморфизм $\varphi : M \to M$ действует на них по правилу

$$(m_1, m_2, \dots, m_r) \mapsto (m_1, m_2, \dots, m_r) \cdot F\,,$$

где $F \in \operatorname{Mat}_{r\times r}(A)$. Покажите, что $\det(F) \cdot M \subset \varphi(M)$, и если M точен[1], то $I \cdot M \neq M$ ни для какого собственного идеала $I \subsetneq A$.

Задача 10.3. Пусть имеется расширение полей $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ и $\mathbb{F}$ конечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$. Покажите, что любая конечно порождённая $\Bbbk$-подалгебра $A \subset \mathbb{F}$ является полем и $\dim_{\Bbbk} A$ делит $\dim_{\Bbbk} \mathbb{F}$.

Задача 10.4. Опишите кольца целых и вычислите дискриминанты полей а) $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ б) $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ в) $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ г) $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, где $d \in \mathbb{Z}$ не делится на квадраты д) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{1}] = \mathbb{Q}[x]/(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

Задача 10.5. Цело ли кольцо $\Bbbk[x, y]$ над подкольцом многочленов f с $\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = 0$?

Задача 10.6. Цело ли кольцо непрерывных функций $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ над подкольцом таких функций f, что $f(1,0) = f(0,1)$?

Задача 10.7. Пусть $\Bbbk$ — поле, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Bbbk$ и $f \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Рассмотрим вложение $\psi : \Bbbk[t_1, t_2, \dots, t_n] \hookrightarrow \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]\,,\ t_i \mapsto x_i + a_i x_0$. При каких условиях на

---

[1] т. е. $\forall\, a \in A\ aM = 0 \Rightarrow a = 0$

f и $a_1, a_2, \dots, a_n$ фактор кольцо $\Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]/(f)$ цело над $\operatorname{im}(\psi) \operatorname{mod}(f)$?

Задача 10.8. Пусть $\Bbbk$ — бесконечное поле, и многочлен $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ отличен от константы. Найдите $\operatorname{tr}\deg_{\Bbbk} \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/(f)$.

Задача 10.9. Покажите, что любой гомоморфизм кольца A в алгебраически замкнутое поле $\Bbbk$ можно продолжить до гомоморфизма $B \to \Bbbk$ любого целого расширения $B \supset A$.

Задача 10.10. Покажите, что характер неодномерного неприводимого комплексного представления конечной группы обращается в нуль хотя бы на одном классе сопряжённости.

Задача 10.11*. Покажите, что размерность неприводимого комплексного представления конечной группы делит индекс любой её нормальной абелевой подгруппы.

Задача 10.12. Покажите, что если фактор кольцо $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ является полем, то оно конечно.

Задача 10.13. Пусть $\Bbbk$ — любое поле, а рациональная функция $\psi = f(t)/g(t) \in \Bbbk(t)$ отлична от константы, и $f, g \in \Bbbk[t]$ имеют $\text{нод}(f, g) = 1$. Покажите, что

а) размерность $\Bbbk(t)$ как векторного пространства над $\Bbbk(\psi)$ равна $\max(\deg f, \deg g)$

б) $\Bbbk(\psi) = \Bbbk(t)$, если и только если $\psi = (at + b)/(ct + d)$ дробно линейна

в) группа тождественных на $\Bbbk$ автоморфизмов поля $\Bbbk(t)$ изоморфна $\mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$.

Задача 10.14. Покажите, что всякое поле $\mathbb{F} \supset \mathbb{C}$, базис которого как векторного пространства над $\mathbb{C}$ не более, чем счётен, совпадает с $\mathbb{C}$.

Задача 10.15*. Покажите, что кольцо многочленов над нормальным кольцом нормально.

§11. Аффинная алгебраическая геометрия

11.1. Системы полиномиальных уравнений. Всякое множество полиномиальных уравнений

$$f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\,, \quad f_\nu \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]\,, \tag{11-1}$$

имеет те же решения, что и система уравнений, левые части которых составляют в $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ идеал $J = \left(x_\nu\right)$, порождённый многочленами f_ν. В силу нётеровости кольца многочленов эта большая система, в свою очередь, эквивалентна конечному множеству уравнений, отвечающих образующим идеала J, причём образующие можно выбрать из первоначальной системы (11-1). Таким образом, любая (в том числе бесконечная) система полиномиальных уравнений равносильна, с одной стороны, некоторой своей конечной подсистеме, а с другой стороны, системе, левые части которой образуют в кольце многочленов идеал.

Множество $V(J) \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) = 0 \quad \forall f \in J \,\}$ всех решений системы (11-1), левые части f_ν которой пробегают идеал $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, называется *аффинным алгебраическим многообразием*, задаваемым идеалом J. Отметим, что это множество может оказаться пустым: например, это так, когда $J = (1) = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ содержит уравнение $1 = 0$.

Для произвольной фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ множество всех многочленов, тождественно зануляющихся на Φ, образует в кольце многочленов идеал, который обозначается

$$I(\Phi) \overset{\text{def}}{=} \{\, f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \quad \forall\, p \in \Phi \,\}$$

и называется *идеалом фигуры* Φ. Множество нулей $V(I(\Phi))$ этого идеала — наименьшее аффинное алгебраическое многообразие, содержащее Φ.

Для любого идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеется тавтологическое включение

$$J \subset I(V(J))\,.$$

Вообще говоря, оно строгое: например, при $n = 1$ для идеала $J = (x^2)$ многообразие $V(J) = \{0\}$, тогда как идеал $I(V(J)) = (x) \supsetneq (x^2) = J$.

Теорема 11.1 (Nullstellensatz, или теорема Гильберта о нулях)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ для любого идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеют место *слабая теорема о нулях*: $V(J) = \varnothing \iff 1 \in J$ и *сильная теорема о нулях*:

$$f \in I(V(J)) \iff f^m \in J \text{ для некоторого } m \in \mathbb{N}\,.$$

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение, достаточно для каждого собственного[1] идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ указать точку $p \in \mathbb{A}^n$, в которой зануляются все многочлены из J. Если имеется необратимый по модулю

---

[1] т. е. отличного от всего кольца многочленов

J многочлен $g \notin J$, идеал $J' = (J, g)$ не содержит 1 и строго больше, чем J. Поскольку увеличение идеала J только усложняет нам задачу, мы можем заменить J на J'. В виду нётеровости кольца многочленов конечное число таких расширений приведёт нас к *максимальному* собственному идеалу J, фактор по которому $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/J$ является полем. Поскольку это поле конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра, каждый его элемент ϑ алгебраичен над $\Bbbk$, т. е. удовлетворяет уравнению $\mu(\vartheta) = 0$, где $\mu(t) \in \Bbbk[t]$ — неприводимый приведённый многочлен. Так как поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, многочлен μ линеен, а значит, $\vartheta \in \Bbbk$. Таким образом, $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/J = \Bbbk$, т. е. любой многочлен $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ сравним по модулю идеала J с некоторой константой. Пусть переменная x_i сравнима с $p_i \in \Bbbk$. Так как редукция по модулю J является гомоморфизмом, каждый многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(p_1, p_2, \dots, p_n) \bmod(J)$. Следовательно, все многочлены $f \in J$ зануляются в точке $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n$, что и требовалось.

Докажем второе утверждение. При $V(J) = \varnothing$ оно тривиально, поэтому мы будем считать, что $V(J) \neq \varnothing$, т. е. $J \neq (1)$. Вложим $\mathbb{A}^n$ в большее пространство $\mathbb{A}^{n+1}$ с координатами $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ в качестве гиперплоскости $t = 0$. Коль скоро многочлен $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \subset \Bbbk[t, x_1, x_2, \dots, x_n]$ тождественно обращается в нуль на $V(J)$, многочлен $g(t, x) = 1 - t\,f(x)$ тождественно равен единице на цилиндре $V(J) \subset \mathbb{A}^{n+1}$. Поэтому порождённый J и многочленом $g(t, x)$ идеал в $\Bbbk[t, x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеет пустое множество нулей в $\mathbb{A}^{n+1}$ и по слабой теореме о нулях содержит единицу, т. е. существуют такие $q_0, q_1, \dots, q_s \in \Bbbk[t, x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $f_1, f_2, \dots, f_s \in J$, что

$$q_0(x, t) \cdot \big(1 - tf(x)\big) + q_1(t, x) \cdot f_1(x) + \dots + q_s(x, t) \cdot f_s(x) = 1\,.$$

Применяя к этому равенству гомоморфизм $\Bbbk[t, x_1, x_2, \dots, x_n] \to \Bbbk(x_1, x_2, \dots, x_n)$, действующий на переменные по правилам $t \mapsto 1/f(x)$, $x_\nu \mapsto x_\nu$, получаем равенство

$$q_1\big(1/f(x),\, x\big) \cdot f_1(x) + \dots + q_s\big(1/f(x),\, x\big) \cdot f_s(x) = 1$$

в поле рациональных функций $\Bbbk(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Так как идеал J не содержит единицы, некоторые из $q_\nu\big(1/f(x), x\big)$ имеют нетривиальные знаменатели, причём в качестве общего знаменателя всех $q_\nu\big(1/f(x), x\big)$ можно взять некоторую степень f^m. Умножая обе части равенства на эту степень получаем

$$f^m(x) = \widetilde{q}_1(x) \cdot f_1(x) + \dots + \widetilde{q}_s(x) \cdot f_s(x)$$

для некоторых $\widetilde{q}_\nu \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. □

11.2. Аффинный алгебро-геометрический словарик. Всюду далее мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Аффинные алгебраические многообразия, определённые над полем $\Bbbk$, образуют категорию $\mathcal{A}\mathit{ff}_{\Bbbk}$, морфизмами в которой являются такие отображения $\varphi : X \to Y$ из аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в аффинное алгебраическое многообразие $Y \subset \mathbb{A}^m$, которые задаются в координатах формулой $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \big(\varphi_1(x),\, \varphi_2(x),\, \dots\,,\, \varphi_m(x)\big)$, где $\varphi_i(x) \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ являются многочленами. Такие отображения называются *регулярными* или *полиномиальными*. В частности, функция $f \,:\, X \to \Bbbk$ регулярна, если она является ограничением на X некоторого многочлена $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Регулярные функции на X образуют конечно порождённую приведённую[1] $\Bbbk$-алгебру, которая обозначается

$$\Bbbk[X] \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\!f\!f_{\Bbbk}}(X, \Bbbk) \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)\,, \tag{11-2}$$

где $I(X) = \{f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f|_X \equiv 0\}$ — идеал всех многочленов, тождественно зануляющихся на X.

Лемма 11.1

Всякая конечно порождённая приведённая алгебра A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ изоморфна координатной алгебре $A = \Bbbk[X]$ некоторого аффинного алгебраического многообразия X.

Доказательство. Зададим алгебру A образующими и соотношениями, т. е. представим её в виде фактор алгебры $A = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$. Приведённость алгебры A означает, что $\forall f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \quad f^n \in I \;\Rightarrow\; f \in I$. По сильной теореме о нулях это равносильно тому, что $I = I(V(I))$ является идеалом аффинного алгебраического многообразия $V(I) \subset \mathbb{A}^n$. □

11.2.1. Максимальный спектр. С каждой точкой $p \in X$ аффинного алгебраического многообразия X связан *гомоморфизм вычисления* $\mathrm{ev}_p \,:\, \Bbbk[X] \to \Bbbk$, $f \mapsto f(p)$. Переводя единицу в единицу, он эпиморфен, т. е. является факторизацией по модулю своего ядра $\mathfrak{m}_p \overset{\text{def}}{=} \ker \mathrm{ev}_p = I(\{p\}) = \{f \in \Bbbk[X] \mid f(p) = 0\}$:

$$\mathrm{ev}_p \,:\, \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \frac{\Bbbk[X]}{\mathfrak{m}_p} \simeq \Bbbk\,, \quad f \mapsto f\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}_p) = f(p) \in \Bbbk\,.$$

Так как фактор $\Bbbk[X]/\mathfrak{m}_p \simeq \Bbbk$ является полем, идеал $\mathfrak{m}_p \subset \Bbbk[X]$ максимален. Он называется *максимальным идеалом точки* $p \in X$.

Множество всех максимальных идеалов произвольной $\Bbbk$-алгебры A называется её *максимальным спектром* и обозначается $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}(A)$. Каждой точке $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ отвечает гомоморфизм факторизации $\pi_{\mathfrak{m}} \,:\, A \to A\,/\,\mathfrak{m}\,,\, a \mapsto a\,\mathrm{mod}(\mathfrak{m})$, принимающий значения в поле $A\,/\,\mathfrak{m} \supset \Bbbk$. Если алгебра A конечно порождена, поле $A\,/\,\mathfrak{m}$ тоже конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ это влечёт за собой равенство $A\,/\,\mathfrak{m} = \Bbbk$, что позволяет интерпретировать элементы *любой* конечно порождённой алгебры A над алгебраически замкнутым полем как функции на $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ со значениями в поле $\Bbbk$.

---

[1] коммутативная алгебра (или кольцо) называется *приведённой*, если в ней нет *нильпотентов* — таких ненулевых элементов a, что $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$

Лемма 11.2
Для любого аффинного алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ соответствия $p \mapsto \mathrm{ev}_p \mapsto \mathfrak{m}_p = \ker(\mathrm{ev}_p)$ устанавливают биекции между точками многообразия X, гомоморфизмами $\Bbbk[X] \to \Bbbk$, тождественными на $\Bbbk$, и максимальными идеалами алгебры $\Bbbk[X]$.

Доказательство. Биективность второго соответствия мы уже проверили выше[1]. Сопоставление точке $p \in X \subset \mathbb{A}^n$ её максимального идеала

$$\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p = I(\{p\})$$

вкладывает множество точек в множество максимальных идеалов, поскольку для $p \neq q$ всегда[2] можно указать аффинно линейную функцию $f : \mathbb{A}^n \to \Bbbk$ зануляющуюся в p и отличную от нуля в q. Чтобы показать, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любой максимальный идеал

$$\mathfrak{m} \subset \Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$$

имеет вид $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$ для некоторой точки $p \in X$, рассмотрим полный прообраз $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ идеала $\mathfrak{m}$. Поскольку $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/\widetilde{\mathfrak{m}} = \Bbbk[X]/\mathfrak{m} = \Bbbk$, идеал $\widetilde{\mathfrak{m}}$ является собственным, максимальным и содержит $I(X)$. По слабой теореме о нулях $V(\widetilde{\mathfrak{m}}) \neq \varnothing$, т. е. $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_p$ для некоторой точки $p \in \mathbb{A}^n$. Поскольку $I(X) \subset \widetilde{\mathfrak{m}}$, точка $p \in X$. Так как $\mathfrak{m}$ максимален, включение $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_p$ влечёт равенство $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$. □

Определение 11.1
Множество нильпотентных элементов[3] $\mathfrak{n}(A) \overset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}$ произвольного коммутативного кольца A называется *нильрадикалом* этого кольца.

Упражнение 11.1. Убедитесь, что нильрадикал является идеалом в A.

Следствие 11.1
Нильрадикал произвольной конечно порождённой алгебры A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ совпадает с пересечением её максимальных идеалов:

$$\mathfrak{n}(A) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec_m}\, A} \mathfrak{m}\,.$$

---

[1] отметим, что и над алгебраически незамкнутым полем $\Bbbk$ сопоставление $\varphi \mapsto \ker \varphi$ вкладывает множество тождественных на поле $\Bbbk$ гомоморфизмов $\varphi : A \to \Bbbk$ в множество максимальных идеалов алгебры A, однако над незамкнутым полем *не все* максимальные идеалы в A являются ядрами гомоморфизмов вычисления со значениями в поле $\Bbbk$: например, ядро гомоморфизма вычисления $\mathrm{ev}_i : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(i)$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, является максимальным идеалом $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{R}[x]$, но его нельзя реализовать как ядро вычисления $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, поскольку $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \ker \mathrm{ev}_i = 2$

[2] в том числе, над не замкнутым полем

[3] вместе с нулевым элементом

Иначе говоря, нильрадикал является ядром гомоморфизма из алгебры A в алгебру функций на $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\,A$, сопоставляющего элементу $a\in A$ функцию

$$\mathfrak{m}\mapsto a\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{m})\,\in A\,/\,\mathfrak{m}\simeq\Bbbk\,.$$

Доказательство. Для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ фактор $A\,/\,\mathfrak{m}$ является полем, поэтому класс любого нильпотента в нём равен нулю. Тем самым, нильрадикал лежит в пересечении всех максимальных идеалов. Наоборот, поскольку фактор алгебра $A_{\mathrm{red}}\overset{\mathrm{def}}{=}A/\mathfrak{n}(A)$ приведена, она имеет вид $\Bbbk[x_1,x_2,\dots,x_n]/I(X)$ для некоторого аффинного многообразия $X\subset\mathbb{A}^n$ и элементы алгебры A отождествляются с полиномиальными функциями на X. Если такая функция f лежит в каждом максимальном идеале, то $f(p)=0$ для всех точек $p\in X$, т. е. $f\in I(X)$ являтся нулевым элементом алгебры $\Bbbk[x_1,x_2,\dots,x_n]/I(X)$. □

Упражнение 11.2*. Покажите, что нильрадикал произвольного коммутативного кольца совпадает с пересечением всех простых идеалов этого кольца.

11.2.2. Антиэквивалентность категорий. Со всяким отображением множеств $\varphi\,:\,X\to Y$ связан *гомоморфизм поднятия* $\varphi^*\,:\,\Bbbk^Y\to\Bbbk^X\,,\,f\mapsto f\circ\varphi$, действующий из алгебры $\Bbbk^Y$ всех функций $Y\to\Bbbk$ в алгебру $\Bbbk^X$ всех функций $X\to\Bbbk$. Если аффинные многообразия $X\subset\mathbb{A}^n$ и $Y\subset\mathbb{A}^m$ имеют координатные алгебры $\Bbbk[X]=\Bbbk[x_1,x_2,\dots,x_n]/I(X)$ и $\Bbbk[Y]=\Bbbk[y_1,y_2,\dots,y_m]/I(Y)$, а отображение $\varphi\,:\,X\to Y$ задаётся в координатах формулой

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\mapsto\big(\varphi_1(x),\,\varphi_2(x),\,\dots\,,\,\varphi_m(x)\big)\ ,$$

то $\varphi^*(y_i)=\varphi_i$, и регулярность φ, означающая, что $\varphi_i(x)\in\Bbbk[x_1,x_2,\dots,x_n]$, равносильна тому, что[1] $\varphi^*\,(\Bbbk[Y])\subset\Bbbk[X]$, т. е. что поднятие регулярной функции на Y является регулярной функцией на X.

Упражнение 11.3. Проверьте, что теоретико множественное отображение топологических пространств (соотв. гладких или аналитических многообразий) $X\to Y$ является непрерывным (соотв. гладким или аналитическим) тогда и только тогда, когда его гомоморфизм поднятия переводит подалгебру непрерывных функций $C^0(Y)\subset\mathbb{R}^Y$ (соотв. подалгебру гладких или аналитических функций на Y) в подалгебру непрерывных функций $C^0(X)$ (соотв. в подалгебру гладких или аналитических функций на X).

Теорема 11.2
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ контравариантный функтор

$$\mathcal{A}\!f\!f_{\Bbbk}\to\mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}^{\mathrm{opp}}\,,\quad X\mapsto\Bbbk[X]=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}ff_{\Bbbk}}(X,\mathbb{A}^1)\,,\tag{11-3}$$

переводящий регулярный морфизм $\varphi\,:\,X\to Y$ аффинных многообразий в гомоморфизм поднятия $\varphi^*\,:\,\Bbbk[Y]\to\Bbbk[X]$, задаёт эквивалентность категорий $\mathcal{A}\!f\!f_{\Bbbk}$ и $\mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}^{\mathrm{opp}}$.

---

[1] обратите внимание, что включение $\varphi(X)\subset Y$ гарантирует включение $\varphi^*\big(I(Y)\big)\subset I(X)$, означающее, что правило $y_i\mapsto\varphi_i$ корректно задаёт гомоморфизм фактор алгебр $\Bbbk[Y]=\Bbbk[y_1,y_2,\dots,y_m]/I(Y)\to\Bbbk[x_1,x_2,\dots,x_n]=\Bbbk[X]$

Доказательство. Согласно лем. 9.1 на стр. 149 достаточно убедиться, что функтор (11-3) по-существу сюрьективен и вполне строг. Первое было установлено в лем. 11.1 на стр. 184. Для доказательства второго рассмотрим функтор

$$\mathcal{A}lg_{\Bbbk} \to \mathcal{S}et\,, \quad A \mapsto \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}lg_{\Bbbk}}(\,A\,,\,\Bbbk)\,, \tag{11-4}$$

переводящий гомоморфизм алгебр $\psi\,:\,A \to B$ в отображение поднятия

$$\psi^*\,:\,\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} B \to \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A\,,$$

которое сопоставляет эпиморфизму $\mathrm{ev}\,:\,B \to \Bbbk$ с ядром $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} B$ эпиморфизм $\psi^*(\mathrm{ev}) = \mathrm{ev}\circ\psi$ с ядром $\psi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X]$. Очевидно, что $\varphi^{**} = \varphi$ и $\psi^{**} = \psi$, т. е. отображения

$$\begin{tikzcd}\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}ff_{\Bbbk}}(X,Y) \arrow[r, shift left, "\varphi\mapsto\varphi^*"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}lg_{\Bbbk}}(\Bbbk[Y],\Bbbk[X]) \arrow[l, shift left, "\psi^*\mapsfrom\psi"]\end{tikzcd}$$

являются взаимно обратными биекциями. □

Упражнение 11.4. Убедитесь в этом.

Замечание 11.1. Согласно лем. 11.2 функтор (11-4) почти квазиобратен к функтору (11-3): применяя его к координатной алгебре $A = \Bbbk[X]$, мы получаем *множество* $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ точек многообразия X. Однако на этом множестве имеется много *разных*, хотя и изоморфных друг другу структур аффинного алгебраического многообразия, если понимать такую структуру как вложение $\varphi\,:\,\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ с сюрьективным гомоморфизмом поднятия $\varphi^*\,:\,\Bbbk[\mathbb{A}^n] \twoheadrightarrow A$, отождествляющее $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ с аффинным алгебраическим многообразием

$$V\,(\ker\varphi^*) \subset \mathbb{A}^n\,.$$

Фиксация таковой структуры равносильна выбору конкретного задания алгебры A образующими и соотношениями, т. е. фиксации изоморфизма $A \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$.

Пример 11.1 (прямая и гипербола)

Точки спектра $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[t]$ биективно соответствуют точкам $p \in \mathbb{A}^1 = \Bbbk$: всякий гомоморфизм $\mathrm{ev}\,:\,\Bbbk[t] \to \Bbbk$ однозначно определяется своим значением $\mathrm{ev}(t) = p \in \Bbbk$ на образующей t. Соответственно, максимальные идеалы $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[t]$ суть главные идеалы вида $(t-p)$. Аналогично, точки спектра алгебры полиномов Лорана $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[t, t^{-1}]$ отождествляется с дополнением до нуля $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\} = \Bbbk^*$, поскольку значение $p = \mathrm{ev}(t) = 1/(\mathrm{ev}(t^{-1})$ должно быть обратимым элементом поля $\Bbbk$. С другой стороны, алгебру полиномов Лорана можно задать образующими и соотношениями: имеется изоморфизм

$$\varphi^*\,:\,\Bbbk[t, t^{-1}] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[x,y]/(xy-1)\,, \quad t \mapsto x\,, \quad t^{-1} \mapsto y\,.$$

Алгебра $\Bbbk[x,y]\,/\,(xy-1)$ это координатная алгебра гиперболы $xy = 1$ в $\mathbb{A}^2$. Задаваемое гомоморфизмом φ отображение поднятия $\varphi : V(xy-1) \to \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\}$ проектирует гиперболу на координатную ось, отождествляя точки гиперболы с дополнением до нуля на этой оси.

Пример 11.2 (копроизведения многообразий)
Поскольку алгебра $\Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]$ является прямым произведением[1] в категории $\mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}$ и очевидно конечно порождена и приведена, коль скоро таковыми являются $\Bbbk[X]$ и $\Bbbk[Y]$, максимальный спектр $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}\big(\Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]\big) \simeq X \sqcup Y$ является копроизведением[2] X и Y в противоположной категории $\mathcal{A}\mathit{ff}_{\Bbbk} \simeq \mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}^{\mathrm{opp}}$. Иными словами, дизъюнктное объединение аффинных алгебраических многообразий X и Y также является аффинным алгебраическим многообразием.

Пример 11.3 (произведения многообразий)
Тензорное произведение $\Bbbk$-алгебр $A \otimes B$ определяется как тензорное произведение векторных пространств над $\Bbbk$. Умножение разложимых тензоров задаётся правилом $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$.

Упражнение 11.5. Убедитесь, что оно корректно задаёт на $A \otimes B$ структуру коммутативной $\Bbbk$-алгебры с единицей и что эта алгебра является копроизведением алгебр A и B в категории коммутативных $\Bbbk$-алгебр с единицами.

Универсальное свойство тензорного произведения задаёт теоретико множественную биекцию $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A) \times \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A \otimes B)$, переводящую пару гомоморфизмов вычисления $\mathrm{ev}_p : A \to \Bbbk$, $\mathrm{ev}_q : B \to \Bbbk$ в гомоморфизм $A \otimes B \to \Bbbk$, $a \otimes b \mapsto a(p)b(q)$. Если алгебры A и B конечно порождены, их тензорное произведение порождается всевозможными тензорными произведениями образующих алгебр A и B. Если алгебры A и B приведены, то $A \otimes B$ тоже приведена, поскольку всякий элемент $h \in A \otimes B$, задающий нулевую функцию на $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A \otimes B)$, равен нулю. Чтобы в этом убедиться, запишем h в виде $\sum f_\nu \otimes g_\nu$ с линейно независимыми над $\Bbbk$ элементами $g_\nu \in B$. Из равенства $(\mathrm{ev}_p \otimes \mathrm{ev}_q)h = 0$, справедливого для всех $(p,q) \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A \otimes B)$, вытекает, что при произвольно зафиксированном $p \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ линейная комбинация $\sum f_\nu(p) \cdot g_\nu \in B$ является тождественно нулевой функцией на $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} B$, и потому равна нулю, т. к. алгебра B приведена. Поэтому все $f_\nu(p) = 0$ для всех p, т. е. $f_\nu \in A$ задают нулевые функции на $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$. Поскольку A приведена, $f_\nu = 0$, а значит, и $h = 0$. Таким образом, $\Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y]$ является копроизведением в $\mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}$. Поэтому аффинное многообразие $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}\big(\Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y]\big)$ является произведением $X \times Y$ в категории $\mathcal{A}\mathit{ff}_{\Bbbk}$. Выше мы видели, что как множество оно совпадает с прямым произведением в $\mathcal{S}et$.

11.3. Топология Зарисского. На множестве $X = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ имеется каноническая топология, отражающая алгебраические свойства алгебры A. Эта топо-

---

[1] в смысле прим. 9.13 на стр. 152

[2] в смысле прим. 9.14 на стр. 152

логия называется *топологией Зарисского* и имеет в качестве замкнутых подмножеств алгебраические подмногообразия в X, т. е. множества вида

$$V(I) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in I\ \} = \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A \mid I \subset \mathfrak{m}\}\,,$$

для всевозможных идеалов $I \subset A$.

Упражнение 11.6. Убедитесь, что а) $\varnothing = V(1)$ б) $X = V(0)$

в) $\bigcap\limits_{\nu} V(I_\nu) = V\Big(\sum\limits_{\nu} I_\nu\Big)$, где идеал $\sum\limits_{\nu} I_\nu$ состоит из всех конечных сумм $\sum\limits_{\nu} f_\nu$ с $f_\nu \in I_\nu$

г) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ)$, где[1] идеал IJ является $\Bbbk$-линейной оболочкой всевозможных произведений ab с $a \in I$, $b \in J$.

Топология Зарисского имеет чисто алгебраическую природу: окрестности Зарисского отражают скорее отношения делимости, нежели «близости», и многие её свойства довольно далеки от интуитивно привычных свойств метрической топологии. Скажем, топология Зарисского на $X \times Y$ тоньше произведения топологий Зарисского на X и Y, поскольку замкнутые $Z \subset X \times Y$ не исчерпываются произведениями замкнутых подмножеств в X, Y: например, если $X = Y = \mathbb{A}^1$, то любая кривая, скажем, гипербола $V(xy - 1)$, замкнута в топологии Зарисского на $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$, в то время как произведения замкнутых множеств на $\mathbb{A}^1$ исчерпываются конечными объединениями изолированных точек и координатных прямых.

Предложение 11.1 (база открытых множеств и компактность)
Каждое открытое подмножество аффинного алгебраического многообразия X является объединением конечного числа *главных открытых множеств*

$$\mathcal{D}(f) \overset{\text{def}}{=} X \smallsetminus V(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}\,, \quad \text{где} \quad f \in \Bbbk[X]\,,$$

и *компактно*[2].

Доказательство. Пусть $U = X \smallsetminus V(I)$. Так как каждый идеал в $\Bbbk[X]$ конечно порождён, $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. Поэтому $V(I) = \bigcap V(f_i)$ и

$$U = \bigcup \big(X \smallsetminus V(f_i)\big) = \bigcup\limits_{\nu} \mathcal{D}(f_i)\,.$$

Условие, что U покрыто семейством множеств $\mathcal{D}(f_\nu)$, равносильно тому что общие нули всех функций f_ν лежат вне U, т. е. включению $V(I) \subset X \smallsetminus U$, где I — идеал, порождённый функциями f_ν. Поскольку $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ для некоего конечного поднабора функций $f_1, f_2, \dots, f_m$, множество U уже целиком покрывается отвечающими этим функциям множествами $\mathcal{D}(f_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. □

---

[1] обратите внимание, что последнее равенство равносильно равенству $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{IJ}$

[2] в том смысле, что в каждом его открытом покрытии содержится конечное подпокрытие

Предложение 11.2 (непрерывность регулярных морфизмов)
Всякий регулярный морфизм алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ непрерывен в топологии Зарисского.

Доказательство. Прообраз $\varphi^{-1}\big(V(I)\big)$ замкнутого подмножества $V(I) \subset Y$ состоит из всех таких точек $x \in X$, что $f(\varphi(x)) = 0$ для всех $f \in I$. Тем самым, он является множеством нулей идеала, порождённого в $\Bbbk[X]$ образом $\varphi^*(I)$ идеала I при гомоморфизме поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$. □

11.3.1. Неприводимые компоненты. Топологическое пространство X, представимое в виде объединения $X = X_1 \cup X_2$ своих собственных замкнутых подмножеств $X_1, X_2 \subsetneq X$, называется *приводимым*. В обычной метрической топологии практически все пространства приводимы. В топологии Зарисского приводимость многообразия X равносильна наличию делителей нуля в алгебре $\Bbbk[X]$, и неприводимые многообразия являются грубыми аналогами степеней простых чисел в арифметике.

Предложение 11.3
Аффинное алгебраическое многообразие неприводимо тогда и только тогда, когда в его координатной алгебре $\Bbbk[X]$ нет делителей нуля.

Доказательство. Разложение $X = X_1 \cup X_2$, в котором каждое X_i замкнуто, непусто и отлично от X, означает наличие ненулевых необратимых $f_1 \in I(X_1)$ и $f_2 \in I(X_2)$. Произведение $f_1 f_2$ тождественно зануляется на всём X, и значит, равно нулю $\Bbbk[X]$. Наоборот, если $f_1 f_2 = 0$ в $\Bbbk[X]$, а оба f_i ненулевые, то они необратимы в $\Bbbk[X]$, и значит, оба замкнутых подмножества $V(f_1)$ и $V(f_2)$ непусты и отличны от X. При этом $X = V(f_1) \cup V(f_2)$. □

Упражнение 11.7. Убедитесь, что $V(f)$ непусто и отлично от X для всякого ненулевого необратимого многочлена $f \in \Bbbk[X]$.

Следствие 11.2
Аффинная гиперповерхность $\{g(x) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$ неприводима тогда и только тогда, когда g является степенью неприводимого многочлена.

Теорема 11.3
Каждое аффинное алгебраическое многообразие имеет единственное разложение в конечное объединение $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$ неприводимых замкнутых подмножеств $X_i \subset X$, таких что $X_i \not\subset X_j$ при $i \neq j$.

Доказательство. Разложение строится индуктивно: если X приводимо, мы в качестве первого шага представим его в виде $X = Z_1 \cup Z_2$, где $Z_{1,2}$ — собственные замкнутые подмножества. Если после нескольких шагов мы получим разложение $X = \bigcup Z_\nu$ в котором все Z_ν неприводимы, процесс заканчивается, и, выкидывая неприводимые компоненты, содержащиеся в других неприводимых компонентах, мы получим требуемое разложение. В противном случае мы делаем следующий шаг, заменяя приводимые Z_ν объединениями их собственных замкнутых подмножеств. Если эта процедура не остановится через конечное число шагов, мы сможем построить бесконечную цепочку строго вложенных замкнутых подмножеств $X \supsetneq Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq \dots$, идеалы которых составят бесконечную строго возрастающую цепочку $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$, что противоречит нётеровости $\Bbbk[X]$.

Докажем единственность индукцией по наименьшему числу неприводимых компонент. Пусть X раскладывается на k компонент и для всех многообразий, раскладывающихся на меньшее число компонент, разложение единственно. Если неприводимое замкнутое подмножество $Y \subset X$ лежит в объединении замкнутых подмножеств $Z_1 \cup Z_2$, то $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$, а значит, $Y \subset Z_1$ или $Y \subset Z_2$. Поэтому равенство двух разложений на неприводимые компоненты $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$ влечёт включение $X_1 \subset Y_\alpha \subset X_\beta$ для некоторых α, β, откуда $X_1 = Y_\alpha = X_\beta$. Выкинем из разложений X_1 и Y_α и применим предположение индукции к замыканиям оставшихся компонент. □

Упражнение 11.8. Пусть $Z \subsetneq Y \subset X$ замкнуты и Y неприводимо. Убедитесь, что $Y = \overline{Y \smallsetminus Z}$ (замыкание берётся в X) и что неприводимость Y для этого существенна.

Определение 11.2

Неприводимые замкнутые подмножества $X_i \subset X$ из теор. 11.3, называются *неприводимыми компонентами* многообразия X.

Следствие 11.3

Элемент $f \in \Bbbk[X]$ делит нуль, если и только если он обращается в нуль на неприводимой компоненте многообразия X, но не на всём X.

Пример 11.4 («большие» открытые множества)

Топология Зарисского нехаусдорфова. Если X неприводимо, любые два непустых открытых подмножества $U_1, U_2 \subset X$ имеют непустое пересечение, иначе возникло бы разложение $X = (X \smallsetminus U_1) \cup (X \smallsetminus U_2)$. Иначе говоря, каждое непустое открытое подмножество неприводимого многообразия всюду плотно в нём.

Упражнение 11.9. Пусть X неприводимо и $f, g \in \Bbbk[X]$. Докажите, что если $f|_U = g|_U$ для некоторого непустого открытого $U \subset X$, то $f = g$ в $\Bbbk[X]$.

11.4. Рациональные функции. Элементы из $\Bbbk[X]$, не являющиеся делителями нуля, образуют *мультипликативную систему*[1] $S_X \subset \Bbbk[X]$. Кольцо частных[2]

---

[1] напомним, что подмножество S в коммутативном кольце A с единицей называется *мультипликативной системой*, если $1 \in S$, $0 \notin S$ и $s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 s_2 \in S$

[2] напомним, что кольцом частных AS^{-1} со знаменателями из мультипликативной системы S коммутативного кольца A с единицей (или *локализацией* A относительно S) называется фактор декартова произведения $A \times S$, элементы которого принято обозначать a/s и называть *дробями*, по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему равенства $a/s = (at)/(st)$

$\Bbbk[X]S_X^{-1}$ называется *кольцом рациональных функций* на X и обозначается $\Bbbk(X)$. Если X неприводимо, то $\Bbbk(X) = Q_{\Bbbk[X]}$ — это поле частных целостного кольца $\Bbbk[X]$.

Говорят, что рациональная функция $f \in \Bbbk(X)$ *определена* в точке $x \in X$, если существует такое её представление дробью $f = p/q$, в котором $p, q \in \Bbbk[X]$, q не делит нуль, и $q(x) \neq 0$. Число $f(x) = p(x)/q(x) \in \Bbbk$ называется *значением* f в точке x.

Упражнение 11.10. Убедитесь, что $f(x)$ не зависит от способа записи f в виде $f = p/q$ с $p, q \in \Bbbk[X]$, q не делящим нуль, и $q(x) \neq 0$.

Множество точек x, в которых определена рациональная функция f, называется *областью определения* функции f и обозначается $\mathrm{Dom}(f)$. Из сл. 11.3 и прим. 11.4 вытекает, что $\mathrm{Dom}(f)$ является плотным открытым подмножеством в X.

Упражнение 11.11. Убедитесь, что для совпадения двух рациональных функций как элементов кольца $\Bbbk(X)$ достаточно поточечного совпадения их значений на каком-нибудь плотном открытом подмножестве в X.

Для открытого $U \subset X$ положим $\Bbbk[U] \overset{\text{def}}{=} \{f \in \Bbbk(X) \mid \mathrm{Dom}(f) \supset U\}$ и будем называть его кольцом *рациональных функций, регулярных в* U.

Предложение 11.4

Если $h \in \Bbbk[X]$ не делит нуля, то $\Bbbk\big[\mathcal{D}(h)\big] = \Bbbk[X][h^{-1}]$ является кольцом частных $\Bbbk[X]$ со знаменателями из мультипликативной системы $\{h^k\}_{k\geqslant 0}$.

Доказательство. Для рациональной функции $f \in \Bbbk(X)$ положим

$$\left(f^{-1}\right) \overset{\text{def}}{=} \{g \in \Bbbk[X] \mid gf \in \Bbbk[X]\}\,. \tag{11-5}$$

Это идеал в $\Bbbk[X]$, и лежащие в нём неделители нуля суть все возможные знаменатели, встречающиеся в разнообразных представлениях f в виде дроби. Делители нуля в $\left(f^{-1}\right)$ суть пересечения этого идеала с идеалами $I(X_i)$ неприводимых компонент X_i многообразия X. Так как неделители нуля в $\left(f^{-1}\right)$ по определению имеются, каждое из пересечений $\left(f^{-1}\right) \cap I(X_i) \subsetneq \left(f^{-1}\right)$ является собственным векторным подпространством в $\left(f^{-1}\right)$, и весь идеал $\left(f^{-1}\right)$ является объединением этих подпространств и подпространства, порождённого неделителями нуля. Если последнее подпространство тоже собственное, пространство $\left(f^{-1}\right)$ оказалось бы объединением конечного набора собственных подпространств, что невозможно над бесконечным полем[1].

Упражнение 11.12. Убедитесь в этом.

со всевозможными $a \in A$ и $s, t \in S$ (если Вы впервые с этим сталкиваетесь, то Вам следует убедиться, что $a_1/s_1 = a_2/s_2$ тогда и только тогда, когда $t(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$ для некоторого $t \in S$, и что обычные правила сложения и умножения дробей задают на AS^{-1} структуру коммутативного кольца)

[1] а алгебраически замкнутое поле бесконечно

Таким образом, неделители нуля линейно порождают (f^{-1}) как векторное пространство над $\Bbbk$, и $X \smallsetminus \mathrm{Dom}(f) = V\Big(\big(f^{-1}\big)\Big)$. Включение $\mathcal{D}(h) \subset \mathrm{Dom}(f)$ равносильно включению $V(h) \supset V\Big(\big(f^{-1}\big)\Big)$, т. е. занулению функции h на общих нулях всех знаменателей функции f. По теореме Гильберта о нулях $h^d \in \big(f^{-1}\big)$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$. Тем самым, $f = p/h^d$, где $p = h^d \cdot f \in \Bbbk[X]$. ☐

11.4.1. Аффинность главных открытых множеств. Если $h \in \Bbbk[X]$ не делит нуль, то главное открытое подмножество $\mathcal{D}(h) = \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X][h^{-1}] = \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X][t]/(1 - ht)$ всюду плотно в X и является аффинным алгебраическим многообразием: например, его можно реализовать замкнутой гиперповерхностью $V(1 - ht) \subset X \times \mathbb{A}^1$. Вложение $i : \mathcal{D} \hookrightarrow X$ является регулярным морфизмом аффинных многообразий: его гомоморфизм подъёма задаёт каноническое вложение $i^* : \Bbbk[X] \hookrightarrow \Bbbk[X][h^{-1}] \simeq \Bbbk[\mathcal{D}(h)]$ и продолжается до изоморфизма колец частных $i^* : \Bbbk(X) \xrightarrow{\sim} \Bbbk\big(\mathcal{D}(h)\big)$.

Замечание 11.2. Два *разных* толкования записи $\Bbbk\big[\mathcal{D}(h)\big]$ — как координатной алгебры абстрактного аффинного многообразия, коим является $\mathcal{D}(h)$, и как подкольца в $\Bbbk(X)$, состоящего из рациональных функций, определённых всюду в $\mathcal{D}(h) \subset X$, при этом *согласованы* друг с другом. В частности, согласованы друг с другом и два толкования обозначения $\Bbbk[X]$ — как координатной алгебры самого многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и как алгебры всюду регулярных рациональных функций: $\Bbbk[x_1, x_2, \dots , x_n]/I(X) = \Bbbk[X] = \{f \in \Bbbk(X) \mid \mathrm{Dom}(f) = X\}$, что вытекает из предл. 11.4 при $h = 1$ и отвечает несобственному $\mathcal{D}(h) = X$.

Предостережение 11.1. Неглавное открытое подмножество $U \subset X$, вообще говоря, *не является* аффинным подмногообразием: каноническое вложение

$$U \hookrightarrow \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[U],$$

сопоставляющее точке $u \in U$ её максимальный идеал $\mathfrak{m}_u = \ker \mathrm{ev}_u \subset \Bbbk[U]$, может быть не биективно.

Упражнение 11.13. Пусть $n \geqslant 2$ и $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus O$ — дополнение к началу координат в аффинном пространстве. Покажите, что $\Bbbk[U] = \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ и, тем самым, $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[U] = \mathbb{A}^n \neq U$.

Предложение 11.5

Пусть аффинное алгебраическое многообразие X раскладывается на неприводимые компоненты: $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$. Тогда $\Bbbk(X) = \Bbbk(X_1) \times \Bbbk(X_2) \times \ldots \times \Bbbk(X_k)$.

Доказательство. В идеале $I = I\Big(\bigcup\limits_{i \neq j}(X_i \cap X_j)\Big) \subset \Bbbk[X]$, состоящем из функций, зануляющихся на всех попарных пересечениях различных неприводимых компонент многообразия X, выберем какую-нибудь ненулевую функцию $f \in I$, не делящую нуль в алгебре $\Bbbk[X]$.

Упражнение 11.14. Убедитесь, что I линейно порождается такими функциями как векторное пространство над $\Bbbk$.

Главное открытое подмножество $W = \mathcal{D}(f) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][f^{-1}] \subset X$ аффинно и является дизъюнктным объединением подмножеств $W_i = W \cap X_i \subset X_i$. Каждое W_i является главным открытым подмножеством многообразия X_i и тоже аффинно: $W_i = \mathcal{D}(f_i) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X_i][f_i^{-1}] \subset X_i$, где $f_i = f \operatorname{mod}(I(X_i)) \in \Bbbk[X_i]$. Согласно прим. 11.2 $\Bbbk[W] \simeq \Bbbk[W_1] \times \Bbbk[W_2] \times \cdots \times \Bbbk[W_k]$.

Упражнение 11.15. Проверьте, что кольцо частных прямого произведения коммутативных колец с единицами изоморфно прямому произведению колец частных сомножителей: $(K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_k)S^{-1}_{K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_k} \simeq K_1 S^{-1}_{K_1} \times K_2 S^{-1}_{K_2} \times \cdots \times K_k S^{-1}_{K_k}$.

Таким образом, $\Bbbk(X) \simeq \Bbbk(W) \simeq \prod \Bbbk(W_i) \simeq \prod \Bbbk(X_i)$. □

11.5. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр. Всякий гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ канонически разлагается в композицию эпиморфизма и вложения:

$$\Bbbk[Y] \overset{\varphi_1^*}{\twoheadrightarrow} \Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*) \xhookrightarrow{\varphi_2^*} \Bbbk[X]\,. \tag{11-6}$$

Поскольку алгебра $\Bbbk[Y]$ конечно порождена, а алгебра $\Bbbk[X]$ приведена, алгебра $\Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*) \subset \Bbbk[X]$ тоже является конечно порождённой приведённой $\Bbbk$-алгеброй, отвечающей аффинному многообразию

$$Z = \operatorname{Spec_m}(\operatorname{im}(\varphi^*)) \simeq V(\ker(\varphi^*)) \subset Y\,.$$

Инъективность гомоморфизма $\varphi_1^* : \Bbbk[Z] \to \Bbbk[X]$ означает отсутствие ненулевых функций $f \in \Bbbk[Z]$, зануляющихся на $\varphi_1(X) \subset Z$, т. е.*плотность* $\varphi_1(X)$ в Z. Тем самым, $Z = \overline{\varphi(X)} \subset Y$ есть замыкание образа $\varphi(X)$ в многообразии Y, вложенное в Y как множество $V(\ker \varphi^*)$ нулей идеала $\ker \varphi^*$. Иными словами, алгебраическое разложение (11-6) геометрически означает разложение регулярного морфизма многообразий $\varphi : X \to Y$ в композицию

$$X \xrightarrow{\varphi_1} Z = \overline{\varphi(X)} \xhookrightarrow{\varphi_2} Y$$

регулярного морфизма $X \to Z$ с плотным образом и регулярного вложения Z в Y в качестве замкнутого подмногообразия.

11.5.1. Замкнутые вложения. Морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *замкнутым вложением*, если его гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to k[X]$ сюрьективен. Это означает, что φ является изоморфизмом между X и замкнутым подмногообразием $V(\ker \varphi^*) \subset Y$. Если замкнутое подмножество $Z \subset X$ неприводимо, гомоморфизм поднятия $i^* : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \Bbbk[Z]$, отвечающий замкнутому вложению

$i : Z \hookrightarrow X$, принимает значения в целостном кольце $\Bbbk[Z]$, которое канонически вложено в своё поле частных $\Bbbk(Z)$. По универсальному свойству кольца частных $\Bbbk(X)$ эпиморфизм i^* однозначно продолжается до эпиморфизма

$$\mathrm{ev}_Z : \Bbbk(X) \twoheadrightarrow \Bbbk(Z)\,, \tag{11-7}$$

который ограничивает рациональные функции с X на Z и может интуитивно восприниматься как гомоморфизм вычисления рациональных функций на X в «в общей точке» неприводимого подмногообразия $Z \subset X$, где вычисляемая функция всегда определена, а результат такого вычисления лежит в поле $\Bbbk(Z)$.

В частности, когда $Z \subset X$ является неприводимой компонентой приводимого аффинного многообразия X, из сюрьективности гомоморфизма (11-7) вытекает, что всякая рациональная функция на Z является ограничением некоторой рациональной функции на X, т. е. записывается дробью вида p/q, знаменатель которой

$$q \operatorname{mod}(I(X_i)) \in \Bbbk[X_i] = \Bbbk[X]/I(X_i)$$

представляется элементом $q \in \Bbbk[X]$, не делящим нуль в $\Bbbk[X]$.

Упражнение 11.16. Укажите такого представителя для функции $1/x \in \Bbbk\big(\operatorname{Spec_m} \Bbbk[x]\big)$ на прямой $Z = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[x] = V(y)$ координатного креста $X = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[x,y]/(xy)$ на плоскости $\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[x,y]$.

11.5.2. Доминантные морфизмы. Если X неприводимо и гомоморфизм алгебр $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ инъективен, то соответствующий морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *доминантным*. Как мы видели выше, инъективность гомоморфизма поднятия означает, что $\overline{\varphi(X)} = Y$. Если X приводимо, то морфизм φ называется *доминантным*, если доминантно его ограничение на *каждую* неприводимую компоненту многообразия X. В этом случае ограничение $\varphi_i = \varphi|_{X_i}$ морфизма φ каждую неприводимую компоненту $X_i \subset X$ задаёт вложение $\varphi_i^* : \Bbbk[Y] \hookrightarrow \Bbbk[X_i] \subset \Bbbk(X_i)$ в *поле* рациональных функций на X_i. По универсальному свойству кольца частных это вложение однозначно продолжается до вложения в то же поле кольца рациональных функций: $\Bbbk(Y) \hookrightarrow \Bbbk(X_i)$. Таким образом, каждый доминантный морфизм $X \to Y$ задаёт вложение

$$\Bbbk(Y) \hookrightarrow \prod \Bbbk(X_i) = \Bbbk(X)\,.$$

Упражнение 11.17. Покажите, что любой доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$ раскладывается в композицию

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\psi"] & Y \times \mathbb{A}^m \arrow[r, two heads, "\pi"] & Y \end{tikzcd}\ , \tag{11-8}$$

где ψ — замкнутое вложение, а π — естественная проекция вдоль $\mathbb{A}^m$.

11.5.3. Конечные морфизмы. Наличие регулярного морфизма $\varphi : X \to Y$ позволяет рассматривать $\Bbbk[X]$ как алгебру над $\varphi^*(\Bbbk[Y]) = \Bbbk[\overline{\varphi(X)}] \subset \Bbbk[X]$. Морфизм φ называется *конечным*, если алгебра $\Bbbk[X]$ является целой над своей подалгеброй $\varphi^*(k[Y])$ или, что то же самое, если $\Bbbk[X]$ является конечно порождённым $\varphi^*(k[Y])$-модулем[1].

Лемма 11.3
Любой конечный морфизм $\varphi : X \to Y$ аффинных алгебраических многообразий переводит каждое замкнутое подмножество $Z \subset X$ в замкнутое подмножество $\varphi(Z) \subset Y$, причём индуцированный морфизм $\varphi|_Z : Z \to \varphi(Z)$ тоже конечен. Если X неприводимо и $Z \neq X$, то $\varphi(Z) \neq Y$.

Доказательство. Пусть $I = I(Z) \subset \Bbbk[X]$ — идеал замкнутого подмножества $Z \subset X$. Ограничение $\varphi|_Z : Z \to Y$ отвечает сквозному гомоморфизму алгебр

$$\varphi_Z^* : k[Y] \xrightarrow{\varphi^*} k[X] \to \Bbbk[X]/I\,.$$

Поскольку алгебра $\Bbbk[X]$ конечно порождена как $\varphi^*(k[Y])$-модуль, алгебра

$$\Bbbk[Z] = \Bbbk[X]/I$$

также конечно порождена как модуль над алгеброй

$$\Bbbk[\,\overline{\varphi(Z)}\,] = \varphi|_Z^*(k[Y]) = \varphi^*(k[Y])/(I \cap \varphi^*(k[Y]))\,.$$

Тем самым, $Z \to \overline{\varphi(Z)}$ — конечный морфизм. Равенство $\varphi(Z) = \overline{\varphi(Z)}$ можно доказывать отдельно для каждой неприводимой компоненты многообразия Z, при этом, по предыдущему, мы можем заменить X на Z, а Y на $\overline{Z}$. Итак, достаточно показать, что всякий конечный доминантный морфизм $\varphi : Z \to Y$ неприводимого аффинного многообразия Z сюрьективен. На алгебраическом языке это означает, что для любого расширения алгебр $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk[Z]$, такого что $\Bbbk[Z]$ не имеет делителей нуля и является конечно порождённым $\Bbbk[Y]$ модулем, всякий максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$ имеет вид $\widetilde{\mathfrak{m}} \cap \Bbbk[Y]$ для некоторого собственного максимального идеала $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[Z]$. Если идеал $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z]$, порождённый $\mathfrak{m}$ в $\Bbbk[Z]$, является собственным в $\Bbbk[Z]$, то в качестве $\widetilde{\mathfrak{m}}$ можно взять любой максимальный идеал, содержащий $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z]$. Таким образом, мы должны показать, что $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z] \neq \Bbbk[Z]$ ни для какого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$.

Предположим противное: пусть $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z] = \Bbbk[Z]$ для какого-то собственного идеала $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$. Если функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ порождают $\Bbbk[Z]$ как $\Bbbk[Y]$-модуль, то каждая из них записывается в виде $f_i = \sum\limits_{\nu} f_\nu \beta_{\nu i}$ с $\beta_{\nu i} \in \mathfrak{m}$, откуда

$$(f_1, f_2, \dots, f_m) \cdot (E - B) = 0\,,$$

---

[1] т. е. $\exists\, f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$, такие что любой $h \in \Bbbk[X]$ записывается как $h = \sum \varphi^*(g_i) f_i$ с подходящими $g_i \in \Bbbk[Y]$

где $B = \left(\beta_{\nu i}\right) \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathfrak{m})$, а E — единичная матрица, т. е. *нулевой* эндоморфизм $\Bbbk[Y]$-модуля $\Bbbk[Z]$ представляется в образующих $\{f_\nu\}$ умножением на матрицу $E-B$. Поэтому умножение на $\det(E-B)$ тоже аннулирует[1] модуль $\Bbbk[Z]$. Так как в $\Bbbk[Z]$ нет делителей нуля, $\det(E-B)=0$. Раскрывая этот определитель, заключаем, что $1\in\mathfrak{m}$, т. е. $\mathfrak{m}=\Bbbk[Y]$ не является собственным.

Для доказательства неравенства $\varphi(Z)\neq Y$ при $Z\subsetneq X$ рассмотрим какую-нибудь ненулевую функцию $f\in\Bbbk[X]$, тождественно зануляющуюся вдоль Z, и запишем для неё целое уравнение над $\varphi^*(k[Y])$ минимальной степени:

$$f^m+\varphi^*(g_1)\,f^{m-1}+\,\cdots\,+\varphi^*(g_{m-1})\,f+\varphi^*(g_m)=0\,.$$

Вычисляя его левую часть в точках $z\in Z$, получим $\varphi^*(g_m)|_z=g_m|_{\varphi(Z)}\equiv 0$, но при этом $g_m\neq 0$ в $\Bbbk[Y]$, т. к. иначе мы могли бы сократить уравнение на f (ибо в $\Bbbk[X]$ нет делителей нуля). Таким образом, $\varphi(Z)\subset V(g_m)\subsetneq Y$. □

11.5.4. Нормальные многообразия. Аффинное алгебраическое многообразие Y называется *нормальным*, если оно неприводимо и его координатная алгебра $\Bbbk[Y]$ целозамкнута в поле рациональных функций $\Bbbk(Y)=Q_{\Bbbk[Y]}$, т. е. является *нормальным кольцом* в смысле опр. 10.3. Например, любое аффинное многообразие с факториальной координатной алгеброй нормально. В частности, все аффинные пространства $\mathbb{A}^n$ нормальны[2].

Лемма 11.4

Всякий сюрьективный конечный морфизм $\varphi : X\to Y$ в нормальное многообразие Y открыт[3] и сюрьективно отображает каждую неприводимую компоненту X на Y.

Доказательство. Отождествим $\Bbbk[Y]$ с подалгеброй в $\Bbbk[X]$ при помощи φ^*. Открытость φ означает, что образ любого главного открытого множества $\mathcal{D}(f)\subset\subset X$ содержит некоторую главную открытую окрестность каждой своей точки, т. е. для любой функции $f\in\Bbbk[X]$ и любой точки $p\in X$, где $f(p)\neq 0$, мы должны указать такую функцию $a\in\Bbbk[Y]$, что на Y

$$\varphi(p)\in\mathcal{D}(a)\subset\varphi(\mathcal{D}(f))$$

Для этого рассмотрим отображение $\psi=\varphi\times f : X\to Y\times\mathbb{A}^1,\, p\mapsto\left(\varphi(p),f(p)\right)$. Его гомоморфизм поднятия $\psi^* : \Bbbk[Y\times\mathbb{A}^1]=\Bbbk[Y][t]\to k[X]$ есть вычисление полиномов от t с коэффициентами в $\Bbbk[Y]$ на элементе $f\in\Bbbk[X]$. По сл. 10.3 минимальный многочлен μ_f элемента f над полем $\Bbbk(Y)$ лежит в $\Bbbk[Y]$. Тем самым, ψ^* это факторизация по главному идеалу $(\mu_f)=\ker\psi^*$. Поэтому ψ конечен и

---

[1] в силу равенства $\det(E-B)\cdot E=(E-B)\cdot(E-B)^\vee$, где $(E-B)^\vee$ — присоединённая к $(E-B)$ матрица (транспонированная к матрице алгебраических дополнений)

[2] включая точку $\mathbb{A}^0=\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\Bbbk$

[3] т. е. $\varphi(U)$ открыто в Y для любого открытого $U\subset X$

сюрьективно отображает X на гиперповерхность, заданную в $Y \times \mathbb{A}^1$ уравнением $\mu_f(y;t) = t^m + a_1(y)\,t^{m-1} + \dots + a_m(y) = 0$. В слое $\{\varphi(p)\} \times \mathbb{A}^1 \subset Y \times \mathbb{A}^1$ над точкой $\varphi(p) \in Y$ многочлен $\mu_f(\varphi(p);t) \in \Bbbk[t]$ имеет ненулевой корень $t = f(p)$. Стало быть, хоть один из его коэффициентов, скажем a_i, отличен от нуля в точке $\varphi(p)$. Над всеми точками $q \in \mathcal{D}(a_i) \subset Y$ коэффициент $a_i(q)$ также отличен от нуля, а значит, у многочлена $\mu_f(q;t) \in \Bbbk[t]$ также есть ненулевой корень. Следовательно, все эти точки q тоже лежат в образе множества $\mathcal{D}(f)$, т. е. $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a_i) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$, как и требовалось.

Что касается ограничения φ на неприводимые компоненты $X_i \subset X$, то для каждого i множество $U_i = X \smallsetminus \bigcup\limits_{\nu \neq i} X_\nu = X_i \smallsetminus \bigcup\limits_{\nu \neq i} (X_i \cap X_\nu)$ открыто в X и плотно в X_i. Поскольку $\varphi(U_i)$ открыто, а Y неприводимо, $\varphi(U_i)$ плотно в Y, откуда $\varphi(X_i) = \overline{\varphi(U_i)} = Y$. □

Задачи для самостоятельного решения к §11

Задача 11.1. Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, и многочлен $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ тождественно зануляется вдоль неприводимой гиперповерхности $V(g) \subset \mathbb{A}^n$, задаваемой многочленом $g \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Покажите, что g делит f.

Задача 11.2. Для пары идеалов I, J кольца $A = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ положим

$$K = \{ab \mid a \in I,\ b \in J\}$$

и обозначим через IJ идеал, порождённый множеством K. Верно ли, что а) $K = IJ$ б) $K = I \cap J$ в) $IJ = I \cap J$ г) $1 \in I + J \Rightarrow IJ = I \cap J$ д) $V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J)$ е) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$ ж) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$ з) $(I = \sqrt{I}\ \&\ J = \sqrt{J}) \Rightarrow IJ = \sqrt{IJ}$.

Задача 11.3. Пусть $J = (xy, yz, zx) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Можно ли задать многообразие $V(J)$ двумя полиномиальными уравнениями?

Задача 11.4. Найдите какой-нибудь многочлен $f \in I(V(J)) \smallsetminus J$ для идеала

$$J = (x^2 + y^2 - 1, y - 1) \subset \Bbbk[x, y]\,.$$

Задача 11.5. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$ для идеалов

а) $J = (xy, (x - y)z)$ б) $J = (xy + yz + zx, x^2 + y^2 + z^2)$.

Задача 11.6. Пусть известны системы уравнений, задающих аффинные алгебраические многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$. Напишите систему уравнений, задающую

$X \times Y \subset \mathbb{A}^{n+m}$.

Задача 11.7. Докажите, что произведение неприводимых многообразий неприводимо.

Задача 11.8. Докажите, что максимальный спектр конечномерной[1] $\Bbbk$-алгебры конечен, а любой конечный морфизм имеет конечные слои.

Задача 11.9. Приведите пример регулярного не конечного морфизма с конечными слоями.

Задача 11.10. Пусть $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $\deg f > 0$. При каком условии на вектор $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$ параллельная проекция гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ в направлении v на гиперплоскость $x_n = 0$ является: а) доминантной б) конечной в) сюрьективной?

Задача 11.11. Докажите, что проекция аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ из любой точки $p \notin V(f)$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ доминантна (основное поле алгебраически замкнуто).

Задача 11.12. Покажите, что образ доминантного морфизма содержит открытое плотное множество.

Задача 11.13. Покажите, что открытое подмножество U аффинного многообразия X является его аффинным подмногообразием[2] тогда и только тогда, когда для некоторых $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[U]$, порождающих единичный идеал в кольце $\Bbbk[U]$, каждое из главных открытых подмножеств $U_i = \mathcal{D}\left(f_i\right)$ является аффинным многообразием с координатным кольцом $\Bbbk[U_i]$.

Задача 11.14. Для рациональной функции $f \in \Bbbk(X)$ покажите, что:

а) если $x \in \operatorname{Dom}(f)$, то значение $f(x) = p(x)/q(x) \in \Bbbk$ не зависит от способа записи $f = p/q$ с $p, q \in \Bbbk[X]$ и $q(x) \neq 0$

б) $\operatorname{Dom}(f)$ открыто и плотно в X

в) отображение $f : \operatorname{Dom}(f) \to \Bbbk$, $x \mapsto f(x)$, непрерывно в топологии Зарисского

г) идеал $I_f = \{q \in \Bbbk[X] \mid qf \in \Bbbk[X]\}$ как векторное пространство над $\Bbbk$ линейно порождается содержащимися в нём неделителями нуля

д) $\operatorname{Dom}(f) = X \smallsetminus V(I_f)$

е) если $\mathcal{D}(h) \subset \operatorname{Dom}(f)$, где $h \in \Bbbk[X]$, то $f = g/h^m$ для некоторых $g \in \Bbbk[X]$ и $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$

Задача 11.15. Найдите $\operatorname{Dom}(f)$ и выясните, лежит ли f в $\Bbbk[X]$, для функции

а) $f = (1-y)/x$ на $V(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$

б) $f = y/x$ на $V(x^3 + x^2 - y^2) \subset \mathbb{A}^2$

в) $f = x_1/x_3$ на $X = V(x_1x_2 - x_3x_4) \subset \mathbb{A}^4$.

Задача 11.16 (фактор по конечной группе). Пусть конечная группа G действует регулярными автоморфизмами на аффинном алгебраическом многообразии X над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Обозначим через

$$R = \Bbbk[X]^G \subset \Bbbk[X]$$

---

[1] как векторное пространство $\Bbbk$

[2] т. е. существует аффинное многообразие Y и регулярный морфизм $Y \hookrightarrow X$ гомеоморфно отображающий Y на U

подалгебру G-инвариантов. Покажите, что

а) $\Bbbk$-линейный оператор $\natural : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow R$, $f \mapsto f^\natural \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum\limits_{\sigma \in G} \sigma f$, обладает для всех $f \in \Bbbk[X]$ и $h \in R$ свойствами: $f^\natural \in R\,, \quad h^\natural = h\,, \quad (fh)^\natural = f^\natural h$

б) алгебра R конечно порождена и не имеет нильпотентов.

в) Постройте такие аффинное алгебраическое многообразие X/G и конечную регулярную сюрьекцию $\pi : X \twoheadrightarrow X/G$, что слои π — это в точности G-орбиты и для любого регулярного морфизма аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$, такого что $\forall\,\sigma \in G$ и $\forall\,x \in X$ $\varphi(\sigma x) = \varphi(x)$, существует единственный регулярный морфизм $\psi : X/G \to Y$, такой что $\psi \circ \pi = \varphi$.

г) Опишите явными уравнениями в подходящем аффинном пространстве фактор $\mathbb{C}^2/G$, где $G = \mathbb{Z}/(n)$ действует на $\mathbb{C}^2$ по правилу $[k]_n : (x, y) \mapsto (e^{2\pi i k/n}x, e^{2\pi i k/n}y)$.

Задача 11.17. Докажите, что для кольца A непрерывных[1] функций на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве[2] X отображение $X \to \operatorname{Spec}_m A$, $x \mapsto \ker \mathrm{ev}_x$, биективно и топология Зарисского на $\operatorname{Spec}_m A$ отождествляется им с исходной топологией на X.

Задача 11.18*. Всякий ли простой идеал кольца непрерывных функций $[0\,,1] \to \mathbb{R}$ максимален?

---

[1] вещественных или комплексных

[2] если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$

§12. Алгебраические многообразия

Всюду в этом параграфе мы продолжаем по умолчанию считать, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто.

12.1. Определения и примеры. Алгебраическое многообразие определяется по той же самой схеме, что и гладкое или аналитическое многообразие в дифференциальной геометрии, т. е. как топологическое пространство, каждая точка которого обладает открытой окрестностью, гомеоморфной некоторой стандартной «локальной карте», и любые две таких карты регулярным образом согласованы на их пересечении. При этом в качестве стандартных локальных карт допускаются *произвольные*[1] аффинные алгебраические многообразия, а регулярность согласования двух таких карт на их пересечении означает, что переход от одной карты к другой задаётся рациональными функциями. Точные определения таковы.

Алгебраической аффинной картой на топологическом пространстве X называется гомеоморфизм $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ какого либо аффинного алгебраического многообразия X_U с топологией Зарисского на открытое подмножество $U \subset X$ с индуцированной из X топологией. Две алгебраических аффинных карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ и $\varphi_W : X_W \xrightarrow{\sim} W$ на X называются *совместимыми*, если *гомеоморфизм склейки*

$$\varphi_{WU} \overset{\text{def}}{=} \varphi_W^{-1} \circ \varphi_U\big|_{\varphi_U^{-1}(U\cap W)} : \varphi_U^{-1}(U \cap W) \xrightarrow{\sim} \varphi_W^{-1}(U \cap W)\,,$$

отождествляющий между собою прообразы пересечения $U \cap W$ в многообразиях X_U и X_W, регулярен в том смысле, что его гомоморфизм поднятия

$$\varphi_{WU}^* : f \mapsto f \circ \varphi_{WU}$$

является изоморфизмом алгебры определённых всюду в $\varphi_U^{-1}(U \cap W)$ рациональных функций на X_U с алгеброй определённых всюду в $\varphi_W^{-1}(U \cap W)$ рациональных функций на X_W :

$$\varphi_{WU}^* : \Bbbk\left[\varphi_W^{-1}(U \cap W)\right] \xrightarrow{\sim} \Bbbk\left[\varphi_U^{-1}(U \cap W)\right]\,.$$

Открытое покрытие $X = \bigcup U_\nu$ попарно совместимыми алгебраическими картами называется *алгебраическим атласом* на X. Два алгебраических атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также представляет собой алгебраический атлас. Топологическое пространство X, с зафиксированным на нём классом эквивалентных алгебраических атласов называется *алгебраическим многообразием*. Алгебраические многообразия, обладающие конечным атласом, называются многообразиями *конечного типа*.

---

[1] в том числе *не* гладкие — такие, как крест $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(\Bbbk[x,y]/(xy))$

Пример 12.1 (проективные пространства)
Проективное пространство $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}\left(\Bbbk^{n+1}\right)$ с однородными координатами

$$x = (x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n)$$

обладает алгебраическим атласом из $(n+1)$ стандартных аффинных карт

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n) \mid x_i \neq 0\}\,, \quad 0 \leqslant i \leqslant n\,.$$

Обозначим через $X_i \simeq \mathbb{A}^n$ аффинное пространство с координатами[1]

$$t_i = \left(t_{i,0},\ \dots\ , t_{i,i-1}, t_{i,i+1},\ \dots\ , t_{i,n}\right)\,.$$

Отображение $\varphi_i : t_i \mapsto \left(t_{i,0} : \dots : t_{i,i-1} : 1 : t_{i,i+1} : \dots : t_{i,n}\right)$ задаёт биекцию

$$\varphi_i : X_i \xrightarrow{\sim} U_i\,, \tag{12-1}$$

в которой прообразом пересечения $U_i \cap U_j$ является главное открытое множество $\mathcal{D}\left(t_{i,j}\right) \subset X_i$. Отображение склейки

$$\varphi_{ji} = \varphi_j^{-1}\varphi_i : X_i \supset \mathcal{D}\left(t_{i,j}\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}\left(t_{j,i}\right) \subset X_j$$

действует по формуле $t_i \mapsto t_{i,j}^{-1} \cdot t_j$ и является изоморфизмом аффинных алгебраических многообразий $\mathcal{D}\left(t_{i,j}\right) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk\left[t_{i,j}^{-1}, t_{i,0},\ \dots\ , t_{i,i-1}, t_{i,i+1},\ \dots\ , t_{i,n}\right]$ и $\mathcal{D}\left(t_{j,i}\right) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk\left[t_{j,i}^{-1}, t_{j,0},\ \dots\ , t_{j,j-1}, t_{j,j+1},\ \dots\ , t_{j,n}\right]$.

Упражнение 12.1. Убедитесь в этом.

Поэтому перенос топологии Зарисского с $X_i \simeq \mathbb{A}^n$ на U_i при помощи биекции (12-1) определяет согласованные индуцированные топологии на пересечениях $U_i \cap U_j$ и корректно наделяет $\mathbb{P}_n$ топологией, в которой все отображения (12-1) являются гомеоморфизмами.

Пример 12.2 (грассманианы)
Точками грассманова многообразия $\operatorname{Gr}(k, m)$ являются k-мерные векторные подпространства в координатном векторном пространстве $\Bbbk^m$. Иначе их можно воспринимать как орбиты матриц x ранга k из k строк ширины m под действием полной линейной группы $\operatorname{GL}_k(\Bbbk)$ левыми умножениями. При этом орбите матрицы x отвечает линейная оболочка её строк, а подпространству — орбита матрицы, по строкам которой записаны координаты базисных векторов любого базиса этого подпространства в стандартном базисе пространства $\Bbbk^m$. Грассманиан $\operatorname{Gr}(k, m)$ покрывается $\binom{m}{k}$ стандартными аффинными картами U_I, занумерованными строго возрастающими наборами индексов $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant m$. Если обозначить через $s_I(x)$ подматрицу матрицы x, образованную столбцами с номерами из I, то

$$U_I = \{x \in \operatorname{Mat}_{k\times m}(\Bbbk) \mid \ \det s_I(x) \neq 0\}.$$

---

[1] первый индекс i является номером карты, а сами координаты $t_{i,\nu}$ в i-той карте нумеруются вторым индексом $\nu \neq i$, $0 \leqslant \nu \leqslant n$

Упражнение 12.2. Убедитесь, что карта U_I состоит из всех k-мерных подпространств $W \subset \Bbbk^m$, которые изоморфно проектируются на k-мерную координатную плоскость, натянутую на стандартные базисные векторы e_i с $i \in I$ пространства $\Bbbk^m$, вдоль дополнительной $(m-k)$-мерной координатной плоскости, натянутой на остальные базисные векторы.

Обозначим через $X_I \simeq \mathrm{Mat}_{k\times(m-k)}(\Bbbk) \simeq \mathbb{A}^{k(m-k)}$ аффинное пространство всех матриц из k строк ширины $m-k$ и будем нумеровать столбцы этих матриц индексами ν из дополнительного к I набора $\hat{I} = \{1, 2, \dots, m\} \smallsetminus I$. Отображение

$$\varphi_I : X_I \xrightarrow{\sim} U_I \,, \tag{12-2}$$

превращающее $k\times(m-k)$-матрицу $t \in X_I$ в $k\times m$-матрицу $\varphi_I(t)$ дописыванием к ней единичной $k\times k$-матрицы в столбцы с номерами из I, биективно. Прообраз

$$\varphi_I^{-1}\left(U_I \cap U_J\right) = \mathcal{D}\Big(\det s_J\big(\varphi_I(t)\big)\Big) \subset X_I \,.$$

Упражнение 12.3. Убедитесь, что отображение склейки

$$\varphi_{JI} = \varphi_J^{-1}\varphi_I : X_I \supset \mathcal{D}\Big(\det s_J\big(\varphi_I(t)\big)\Big) \to \mathcal{D}\Big(\det s_I\big(\varphi_J(t)\big)\Big) \subset X_J$$

действует по формуле $t \mapsto s_{\hat{J}}\Big(s_J^{-1}\big(\varphi_I(t)\big) \cdot \varphi_I(t)\Big)$ и является изоморфизмом аффинных алгебраических многообразий.

Отсюда мы как и в предыдущем примере заключаем, что грассманиан $\mathrm{Gr}(k, n)$ является алгебраическим многообразием конечного типа. Отметим, что при $k = 1, m = n + 1$ проделанное только что построение превращается в построение из прим. 12.1.

Пример 12.3 (прямое произведение многообразий)
Структура алгебраического многообразия на прямом произведении алгебраических многообразий X и Y задаётся атласом, состоящим из всех попарных произведений $U \times W$ аффинных карт $U \subset X$ и $W \subset X$ на X, Y.

12.1.1. Структурный пучок и регулярные морфизмы. Функция $f : X \to \Bbbk$ называется *регулярной* в точке x алгебраического многообразия X, если существуют такие порывающая x аффинная карта $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U \ni x$ и определённая в x рациональная функция $\widetilde{f} \in \Bbbk(X_U)$, что значения $\varphi_U^* f(z) = \widetilde{f}(z)$ совпадают во всех точках $z \in \mathrm{Dom}\,\widetilde{f}$. Функции $U \to \Bbbk$ на открытом подмножестве $U \subset X$, регулярные в каждой точке этого подмножества, образуют коммутативное кольцо, которое обозначается $\mathcal{O}_X(U)$ и называется кольцом *локальных регулярных функций* на U. Сопоставление $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ является пучком $\Bbbk$-алгебр на топологическом пространстве X в смысле прим. 9.8 на стр. 145. Он называется *структурным пучком* алгебраического многообразия X.

Отображение алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ называется *регулярным*, если $\forall\, x \in X$ и любой локальной регулярной функции $f \in \mathcal{O}_Y(W)$, определённой в какой-либо окрестности $W \ni \varphi(x)$, существует такая окрестность $U \subset \varphi^{-1}(W)$ точки x, что $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}_X(U)$. Иными словами, над каждым открытом $U \subset Y$ гомоморфизм поднятия должен переводить локальные регулярные функции на U в локальные регулярные функции на $\varphi^{-1}(U)$, т. е. быть гомоморфизмом $\varphi^* : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X\left(\varphi^{-1}(U)\right)$. Например, множество регулярных морфизмов $X \to \mathbb{A}^1$ совпадает с $\mathcal{O}_x(X)$.

Упражнение 12.4. Покажите, что для каждой аффинной карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ гомоморфизм подъёма $\varphi_U^* : \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\sim} \Bbbk[X_U]$ отождествляет кольцо локальных регулярных на U функций с координатной алгеброй аффинного многообразия X_U.

12.1.2. Замкнутые подмногообразия. Каждое замкнутое подмножество Z алгебраического многообразия X имеет естественную структуру алгебраического многообразия. А именно, для каждой аффинной карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ прообраз пересечения $\varphi_U^{-1}(Z \cap U)$ является замкнутым подмножеством в X_U, т. е. аффинным алгебраическим многообразием с координатным кольцом

$$\Bbbk[X_U]/\varphi_U^* I(Z \cap U) \simeq \mathcal{O}_x(U)/I(Z \cap U),$$

где идеал $I(Z \cap U) \subset \mathcal{O}_X(U)$ состоит из всех локальных регулярных на U функций[1], тождественно зануляющихся на $Z \cap U$. Аффинные карты

$$\varphi_U^{-1}(Z \cap U) \xrightarrow{\sim} Z \cap U \subset Z$$

образуют алгебраический атлас на Z. Сопоставление $U \mapsto I(Z \cap U)$ является подпучком идеалов в структурном пучке $\Bbbk$-алгебр $\mathcal{O}_X$. Он называется *пучком идеалов* замкнутого подмногообразия $Z \subset X$ и обозначается $\mathcal{I}_z \subset \mathcal{O}_X$. В этой ситуации пишут, что $Z = V\left(\mathcal{I}_Z\right)$.

Регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *замкнутым вложением*, если его образ $\varphi(X) \subset Y$ является замкнутым подмногообразием и φ устанавливает изоморфизм между X и $\varphi(X)$. В частности, алгебраическое многообразие X тогда и только тогда допускает замкнутое вложение в аффинное пространство, когда оно является аффинным алгебраическим многообразием в смысле n° 11.1 на стр. 182, т. е. является множеством нулей системы полиномиальных уравнений в аффинном пространстве.

Пример 12.4 (семейства подмногообразий)
Каждый регулярный морфизм $\pi : X \to Y$ может восприниматься как семейство замкнутых подмногообразий $X_y = \pi^{-1}(y) \subset X$, параметризованное точками $y \in Y$. Если $\pi : X \to Y$, $\pi' : X' \to Y$ — два семейства с одной и той же базой, то регулярный морфизм $\varphi : X \to X'$ называется *морфизмом семейств*[2], если он переводит X_y в X'_y для каждого $y \in Y$, т. е. если $\pi = \pi' \circ \varphi$. Семейство $\pi : X \to Y$ называется *постоянным* или *тривиальным*, если оно изоморфно над Y прямому произведению $\pi_Y : X_0 \times Y \to Y$ для некоторого многообразия X_0.

---

[1] ср. с упр. 12.4

[2] или *морфизмом над* Y

12.1.3. Отделимость. Стандартный атлас на $\mathbb{P}_1$ состоит из двух карт

$$\varphi_i : \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} U_i \subset \mathbb{P}_1 , \quad i = 0, 1 .$$

Их пересечение видно внутри каждой из них как дополнение к началу координат:

$$\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) = \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\} = \{t \in \mathbb{A}^1 \mid t \neq 0\} .$$

Карты склеены по этому пересечению посредством отображения склейки

$$\varphi_{01} : t \mapsto 1/t . \tag{12-3}$$

Если вместо этого отображения воспользоваться тождественным отображением

$$\widetilde{\varphi}_{01} : t \mapsto t , \tag{12-4}$$

получится другое многообразие — «прямая с раздвоенной точкой»:

———:——— .

Такая патология называется *неотделимостью*. Причина её возникновения в том, что правило склейки (12-4) «не замкнуто»: его можно «продолжить по непрерывности» с $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}$ на всё $\mathbb{A}^1 = \overline{\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}}$.

В общем случае явление (не) отделимости формализуется так. Включения

$$U_0 \hookleftarrow U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_1$$

задают вложение $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_0 \times U_1$, образ которого является пересечением аффинной карты $U_0 \cap U_1 \subset X \times X$ с диагональю $\varDelta = (x, x) \subset X \times X$. Правило (12-3) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \smallsetminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t\,,\, t^{-1})$ и отождествляет пересечение $U_0 \cap U_1 \simeq \big(U_0 \times U_1\big) \cap \varDelta$ с *замкнутым* подмножеством в $U_0 \times U_1 \simeq \mathbb{A}^2$ — а именно, с гиперболой $xy = 1$. Правило (12-4) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \smallsetminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t\,,\, t)$. Образ этого вложения не замкнут в $U_0 \times U_1 \simeq \mathbb{A}^2$ — он получается выкидыванием начала координат из диагонали $x = y$.

Алгебраическое многообразие X называется *отделимым*, если для любой пары аффинных карт U, W на X образ канонического вложения $U \cap W \hookrightarrow U \times W$ замкнут, или, что то же самое, если диагональ $\varDelta \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Например, $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{P}_n$ отделимы, поскольку диагонали в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ и в $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$ задаются, соответственно, уравнениями $x_i = y_i$ и $x_i y_j = x_j y_i$. Замкнутое подмногообразие $X \subset Y$ отделимого многообразия Y тоже отделимо, ибо диагональ в $X \times X$ является прообразом диагонали в $Y \times Y$ при вложении $X \times X \hookrightarrow Y \times Y$. В частности, всякое аффинное или проективное многообразие отделимо и имеет конечный тип.

Пример 12.5 (график морфизма)
Пусть $\varphi : X \to Y$ — регулярный морфизм. Прообраз диагонали $\Delta \subset Y \times Y$ при индуцированном морфизме $\varphi \times \mathrm{Id}_Y : X \times Y \to Y \times Y$ называется *графиком* φ и обозначается через Γ_φ. Геометрически, $\Gamma_\varphi = \{(x, f(x))\} \subset X \times Y$. Если Y отделимо, то график замкнут. Например, график регулярного морфизма аффинных многообразий $\varphi : \mathrm{Spec_m}(A) \to \mathrm{Spec_m}(B)$ задаётся в $A \otimes B$ системой уравнений $1 \otimes f = \varphi^*(f) \otimes 1$, где f пробегает B.

12.1.4. Рациональные отображения. Регулярный морфизм $\varphi : U \to Y$, определённый на некотором открытом плотном подмножестве U алгебраического многообразия X, называется *рациональным отображением* из X в Y. Рациональное отображение $\psi : W \to Y$, заданное на открытом множестве $W \supset U$ и совпадающее с φ на U, называется *продолжением* рационального отображения $\varphi : U \to Y$. Объединение всех открытых множеств $W \supset U$, на которые продолжается φ, называется *областью определения* рационального отображения $\varphi : X \dashrightarrow Y$.

Упражнение 12.5 (квадратичная инволюция Кремоны). Покажите, что правило

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^{-1} : x_1^{-1} : x_2^{-1})$$

задаёт рациональное отображение $\varkappa : \mathbb{P}_2 \dashrightarrow \mathbb{P}_2$, определённое всюду, кроме трёх точек, найдите эти точки и опишите образ $\varkappa$.

Рациональные отображения $\varphi : X \dashrightarrow Y$ не являются отображениями «из X» в теоретико-множественном смысле, ибо определены не везде. В частности, композиция рациональных отображений не определена, когда образ первого отображения оказывается целиком вне области определения второго. Тем не менее, рациональные отображения часто возникают и играют важную роль в алгебраической геометрии. Например, естественная проекция $\mathbb{A}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$, переводящая точку пространства $\mathbb{A}(V)$, представленную вектором $v \in V$, в точку пространства $\mathbb{P}(V)$, представленную тем же самым вектором v, является сюрьективным рациональным отображением определённым всюду, кроме нуля.

12.2. Проективные многообразия. Алгебраическое многообразие X называется *проективным*, если оно допускает замкнутое вложение в проективное пространство, т. е. изоморфно замкнутому подмногообразию в $\mathbb{P}_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Упражнение 12.6. Покажите, что множество решений системы однородных полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства $\mathbb{P}_n$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_n$.

В частности, проективными алгебраическими многообразиями являются грассманианы $\mathrm{Gr}(k, V)$, задаваемые квадратичными соотношениями Плюккера в $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$.

Упражнение 12.7. Покажите, что прямое произведение проективных многообразий проективно, и выведите из этого, что подмножество в $\mathbb{P}_{n_1} \times \mathbb{P}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{P}_{n_m}$, задаваемое набором однородных по координатам каждого сомножителя полиномиальных уравнений на однородные координаты, является проективными алгебраическим многообразием.

Пример 12.6 (раздутие точки в $\mathbb{P}_n$)
Прямые, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_n$, образуют проективное пространство $E \simeq \mathbb{P}_{n-1}$. График инцидентности $\mathcal{B}_p = \{(q,\ell) \in \mathbb{P}_n \times E \mid q \in \ell\}$ называется *раздутием* точки $p \in \mathbb{P}_n$. Проекция $\sigma_p : \mathcal{B}_p \twoheadrightarrow \mathbb{P}_n$ биективна всюду над $\mathbb{P}_n \smallsetminus \{p\}$, но прообразом самой точки p является весь слой:

$$\sigma_p^{-1}(p) = \{p\} \times E \subset \mathbb{P}_n \times E\,.$$

Он называется *исключительным дивизором*[1]. Вторая проекция $\varrho_E : \mathcal{B}_p \twoheadrightarrow E$ реализует $\mathcal{B}_p$ как *линейное расслоение* над E, слой которого над точкой $q \in E$ — это прямая $(pq) \subset \mathbb{P}_n$. Это расслоение называется *тавтологическим* линейным расслоением над E. Из упр. 12.7 вытекает, что $\mathcal{B}_p$ является проективным многообразием: выберем однородные координаты на $\mathbb{P}_n$ так, чтобы

$$p = (1 : 0 : \dots : 0)\,,$$

и отождествим E с гиперплоскостью $V\left(x_0\right) = \{(0 : \lambda_1 : \dots : \lambda_n)\} \subset \mathbb{P}_n$, сопоставляя прямой $\ell \ni p$ точку $\lambda = \ell \cap V(x_0)$; тогда коллинеарность точек p, q, λ запишется системой однородных квадратичных уравнений

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ q_0 & q_1 & \cdots & q_n \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = 2\,, \quad \text{или} \quad q_i t_j = q_j t_i \quad \forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

на $(q,\lambda) \in \mathbb{P}_n \times E$. Иначе раздутие точки p можно представлять себе как результат вклеивания проективного пространства E в проделанное на $\mathbb{P}_n$ вместо p точечное отверстие таким образом, что приход в точку p вдоль прямой $\ell \subset \mathbb{P}_n$ приводит в точку $\ell \in E$.

Лемма 12.1
Каждое замкнутое подмногообразие $X \subset \mathbb{P}_n$ является множеством решений конечной системы полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства $\mathbb{P}_n$.

Доказательство. В обозначениях из прим. 12.1 на стр. 202 пересечение $X \cap U_i$ со стандартной открытой картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ является множеством нулей некоторого идеала I_i в кольце многочленов от n переменных $t_{i,\nu} = x_\nu / x_i$, где $0 \leqslant \nu \leqslant n$ и $\nu \neq i$. Каждый такой многочлен f можно переписать как $\overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)/x_i^d$,

---

[1] вообще *дивизорами* (*Вейля*) на алгебраическом многообразии называются элементы свободной абелевой группы, порождённой неприводимыми замкнутыми подмногообразиями коразмерности 1 (размерности алгебраических многообразий обсуждаются в n° 12.5 ниже)

где $d = \deg f$, а $\overline{f} \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ — такой однородный многочлен степени d, что $\overline{f}\left(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right) = f\left(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right)$. Для каждого i рассмотрим какое-нибудь конечное множество образующих $f_{i,\alpha}$ идеала I_i и построим по ним однородные многочлены $\overline{f}_{i,\alpha} \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Покажем, что многообразие X совпадает с множеством Z решений системы однородных полиномиальных уравнений $x_i \cdot \overline{f}_{i,\alpha}(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, где $0 \leqslant i \leqslant n$, и при каждом i второй индекс α нумерует образующие $f_{i,\alpha}$ идеала I_i. Достаточно для каждого i установить равенство $Z \cap U_i = X \cap U_i$. Поскольку пересечение множества нулей однородного многочлена $x_i \cdot \overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ со картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ задаётся в аффинных координатах t_i на U_i уравнением

$$\overline{f}\left(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right) = f\left(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right) = 0\,,$$

пересечение карты U_i с множеством общих нулей однородных многочленов $x_i \cdot \overline{f}_{i,\alpha}$, индекс i которых равен номеру карты, совпадает с $X \cap U_i$. Тем самым, $Z \cap U_i \subset X \cap U_i$, и для доказательства равенства остаётся убедиться, что каждый однородный многочлен $x_j \cdot \overline{f}_{j,\beta}$ с $j \neq i$ также зануляется на $X \cap U_i$. Но множитель x_j зануляется на гиперплоскости $V(t_{i,j}) \subset U_i$, а множитель $\overline{f}_{j,\beta}$ зануляется на дополнительном к этой гиперплоскости главном открытом множестве $\mathcal{D}(t_{i,j}) = X \cap U_i \cap U_j \subset X \cap U_i$, т. к. последнее содержится в пересечении $X \cap U_j$, на котором $\overline{f}_{j,\beta}$ равен нулю. □

Пример 12.7 (иллюстрация доказательства лем. 12.1)
Проективное многообразие $X = V(x_0 x_1 x_2) \subset \mathbb{P}_2$ представляет собою объединение трёх координатных прямых и локально, в стандартных картах U_0, U_1, U_2, задаётся, соответственно, уравнениями $t_{0,1}t_{0,2} = 0$, $t_{1,0}t_{1,2} = 0$, $t_{2,0}t_{2,1} = 0$, которым в предыдущем доказательстве отвечают однородные многочлены $\overline{f}_{0,1} = x_1 x_2$, $\overline{f}_{1,1} = x_0 x_2$, $\overline{f}_{2,1} = x_0 x_1$, а задающее X глобальное однородное уравнение $x_0 x_1 x_2 = 0$ имеет в левой части многочлен $x_0 x_1 x_2 = x_0 \cdot \overline{f}_{0,1} = x_1 \cdot \overline{f}_{1,1} = x_0 \cdot \overline{f}_{2,1}$.

12.3. Системы результатнтов. Рассматриваемые с точностью до пропорциональности ненулевые решения системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0\,, \end{cases} \tag{12-5}$$

в которой каждый $f_i \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ однороден степени d_i, образуют проективное многообразие — пересечение проективных гиперповерхностей

$$S_i = V(f_i) \subset \mathbb{P}(V)\,.$$

Проективные гиперповерхности степени d являются точками проективного пространства $\mathbb{P}(S^dV^*)$, и наборы гиперповерхностей $(S_1, S_2, \dots, S_m)$ заданных степеней $d_1, d_2, \dots, d_m$ с непустым пересечением $\bigcap\limits_i S_i \neq \varnothing$, составляют фигуру

$$\mathcal{R}(n+1;\, d_1, d_2, \dots, d_m) \subset \mathbb{P}(S^{d_1}V^*) \times \mathbb{P}(S^{d_2}V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_m}V^*)\,, \qquad (12\text{-}6)$$

которая называется *результантным множеством* системы (12-5). Например, когда число уравнений равно числу переменных и все уравнения линейны, система (12-5) превращается в систему однородных линейных уравнений $Ax = 0$ с квадратной матрицей $A = \left(a_{ij}\right)$ и имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det\left(a_{ij}\right) = 0$. Поэтому, при $m = n+1$ и $d_1 = d_2 = \dots = d_{n+1} = 1$ результантное множество является проективным алгебраическим многообразием, заданным одним полиномиальным уравнением на коэффициенты $a_{i,j}$ многочленов $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$, линейным по каждому набору коэффициентов.

Покажем, что в общем случае результантное многообразие (12-6) также является проективным алгебраическим многообразием, т. е. задаётся конечной системой полиномиальных уравнений на коэффициенты многочленов f_i, однородных по каждому из многочленов и зависящих только от числа переменных $n+1$ и набора степеней d_i. Для этого рассмотрим идеал

$$J = (f_1, f_2, \dots, f_m) \subset \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]\,.$$

Отсутствие у системы (12-5) ненулевых решений означает, что аффинное алгебраическое многообразие $V(J) \subset \mathbb{A}(V)$ либо пусто, либо совпадает с началом координат. В обоих случаях каждая из координатных функций x_i тождественно зануляется на $V(J)$, и по теореме Гильберта о нулях существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $x_i^m \in J$ для всех i. Наоборот, если J содержит некоторую степень каждой из переменных, то система уравнений с левыми частями из идеала J включает в себя уравнения $x_0^m = x_1^m = \dots = x_n^m = 0$, имеющие только нулевое решение. Таким образом, отсутствие ненулевых решений у системы (12-5) равносильно тому, что для некоторого m идеал J содержит все x_i^m. Последнее означает, что любой многочлен, степень которого больше $(n+1)(m-1)$, лежит в J, т. е. J содержит все S^dV^* с $d \gg 0$. Пересечение $J \cap S^dV^*$ является образом линейного отображения

$$\mu_d : S^{d-d_1}V^* \oplus S^{d-d_2}V^* \oplus \dots \oplus S^{d-d_m}V^* \xrightarrow{(g_0, g_1, \dots, g_n) \mapsto \sum g_\nu f_\nu} S^d\,, \qquad (12\text{-}7)$$

задаваемого в стандартных базисах из мономов матрицей, ненулевые элементы которой суть коэффициенты многочленов f_ν. При $d \gg 0$ размерность левой части (12-7) ведёт себя как $\sum\limits_{\nu=1}^{m} \binom{n+d-d_\nu}{n} \sim \frac{m}{n!}\, d^n$ и становится больше, чем размерность правой части, ведущая себя как $\binom{n+d}{n} \sim \frac{1}{n!}\, d^n$. Для всех таких d

неэпиморфность отображения (12-7), т. е. неравенство $J \cap S^dV^* \neq S^dV^*$, равносильно обнулению всех максимальных миноров матрицы μ_d.

Итак, наличие ненулевых решений у системы (12-5) эквивалентно обращению в нуль всех максимальных миноров матриц μ_d для всех таких d, что размерность левой части (12-7) не меньше, чем размерность правой. В силу нётеровости кольца многочленов, эта бесконечная система полиномиальных уравнений эквивалентна некоторой конечной подсистеме, называемой *системой результантов*.

Пример 12.8 (результант пары бинарных форм)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ каждый однородный многочлен степени d от двух переменных

$$A(t_0, t_1) = a_0\, t_1^d + a_1\, t_0\, t_1^{d-1} + a_2\, t_0^2\, t_1^{d-2} + \cdots + a_{d-1}\, t_0^{d-1}\, t_1 + a_d\, t_0^d$$

полностью раскладывается на линейные множители

$$A(t_0, t_1) = \prod_{i=0}^{d} (\alpha_i'' t_0 - \alpha_i' t_1) = \prod_{i=0}^{d} \det \begin{pmatrix} t_0 & t_1 \\ \alpha_i' & \alpha_i'' \end{pmatrix}$$

биективно соответствующие d нулям[1] $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d \in \mathbb{P}_1$, $\alpha_i = (\alpha_i' : \alpha_i')$, многочлена A на проективной прямой $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\Bbbk)$. Коэффициенты многочлена A выражаются через корни по *однородным формулам Виета*

$$a_i = (-1)^{d-i} \sigma_i(\alpha', \alpha''), \quad \text{где} \quad \sigma_i(\alpha', \alpha'') = \sum_{\#I = i} \Bigl(\prod_{i \in I} \alpha_i' \cdot \prod_{j \notin I} \alpha_j'' \Bigr),$$

где I пробегает все строго возрастающие подмножества из i индексов. В частности, a_i биоднороден бистепени $(i, d-i)$ по (α', α''). Для фиксированных степеней $m, n \in \mathbb{N}$ рассмотрим в кольце многочленов $\Bbbk[\alpha', \alpha'', \beta', \beta'']$ от четырёх наборов переменных

$$\begin{aligned} \alpha' &= (\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_n') & \alpha'' &= (\alpha_1'', \alpha_2'', \dots, \alpha_n'') \\ \beta' &= (\beta_1', \beta_2', \dots, \beta_m') & \beta'' &= (\beta_1'', \beta_2'', \dots, \beta_m'') \end{aligned}$$

произведение

$$R_{AB} \overset{\text{def}}{=} \prod_{i,j} \left(\alpha_i' \beta_j'' - \alpha_i'' \beta_j' \right) = \prod_{j=1}^{n} A(\beta_j) = (-1)^{mn} \prod_{i=1}^{m} B(\alpha_i).$$

Оно обращается в нуль , если и только если бинарные формы

$$A(t_0, t_1) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, t_0^i\, t_1^{n-i} \quad \text{и} \quad B(t_0, t_1) = \sum_{j=0}^{m} b_j\, t_0^j\, t_1^{m-j}$$

---

[1] эти нули не обязательно различны

с коэффициентами $a_i = (-1)^{n-i}\sigma_i(\alpha', \alpha'')$ и $b_j = (-1)^{m-j}\sigma_j(\beta', \beta'')$ имеют общий нуль на $\mathbb{P}_1$. Многочлен $R_{A,B}$ биоднороден бистепени (mn, mn) по (α, β) и явно выражается через коэффициенты форм A, B по *формуле Сильвестра*

$$R_{AB}=\det\underbrace{\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & & \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\
b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & & & \\
 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m
\end{pmatrix}}_{m+n}
\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}m\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}b\\b\\b\\b\end{matrix}}\right\}n\end{matrix}
\tag{12-8}$$

В самом деле, линейное отображение (12-7) для векторного пространства V^* с базисом $\{t_0, t_1\}$ переводит пару однородных многочленов $(h_1(t), h_2(t))$ в сумму $A(t)h_1(t) + B(t)h_2(t)$. При $d = m + n - 1$ оно имеет вид

$$\mu_{m+n-1} : S^{m-1}U \oplus S^{n-1}U \to S^{m+n-1}U$$

и в стандартных мономиальных базисах задаётся *квадратной* матрицей, транспонированной к матрице Сильвестра (12-8).

Упражнение 12.8. Убедитесь в этом.

Если точка (α, β) лежит на квадрике $\alpha'_i\beta''_j - \alpha''_i\beta'_j = 0$, то с точностью до постоянного множителя $(\alpha''_i t_0 - \alpha'_i t_1) = (\beta''_i t_0 - \beta'_i t_1)$. Эта линейная форма делит многочлены $A(t)$, $B(t)$ и все многочлены вида $A(t)h_1(t) + B(t)h_2(t)$. Поэтому $\operatorname{im}\mu_{m+n-1} \neq S^{m+n-1}U$, и значит, определитель Сильвестра (12-7) зануляется вдоль каждой из квадрик $\alpha'_i\beta''_j - \alpha''_i\beta'_j = 0$. По теореме о нулях, некоторая степень $R_{A,B}$ делится на произведение уравнений квадрик. В силу факториальности кольца многочленов и неприводимости уравнений квадрик такое возможно только если сам $R_{A,B}$ делится на произведение уравнений квадрик. Сравнение степеней и коэффициента при старшем мономе показывает, что частное равно 1.

Упражнение 12.9. Убедитесь в этом.

Таким образом, для пары бинарных форм результантное многообразие задаётся одним уравнением[1] $R_{AB} = 0$ на коэффициенты многочленов A, B. Многочлен $R_{A,B}$ называется *результантом* форм A и B. Отметим, что полагая $t_0 = 1$, $t_1 = x$ мы получаем из него результант двух неоднородных многочленов $A(x)$ и $B(x)$, который, в предположении, что $a_0b_0 \neq 0$, обращается в нуль, если и только если A и B имеют общий корень на аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \smallsetminus (0 : 1)$.

---

[1] в прим. 12.10 на стр. 221 ниже мы обобщим этот результат на случай произвольной системы однородных полиномиальных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных

12.4. Замкнутость проективных морфизмов. Геометрическим следствием алгебраичности результантных многообразий является замкнутость морфизмов из проективных многообразий в отделимые, неформально означающая, что проективные многообразия занимают в алгебраической геометрии примерно то же место, что компактные многообразия в дифференциальной геометрии.

Лемма 12.2
Проекция $\pi : \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ *замкнута*, т. е. переводит замкнутые множества в замкнутые.

Доказательство. Зафиксируем однородные координаты x на $\mathbb{P}_m$ и аффинные координаты t на $\mathbb{A}^n$. Замкнутое подмножество $X \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$ задаётся системой однородных по x полиномиальных уравнений $f_\nu(x,t) = 0$. Его образ $\pi(X) \subset \mathbb{A}^n$ состоит из всех точек p, при подстановке которых в эти уравнения вместо t получается система однородных уравнений $f_\nu(x,p) = 0$ на x, имеющая ненулевое решение. Это означает, что коэффициенты форм $f_\nu(x,p)$, являющиеся полиномами от p, удовлетворяют системе результантных полиномиальных уравнений. □

Следствие 12.1
Если многообразие X проективно, то проекция $X \times Y \twoheadrightarrow Y$ замкнута для любого многообразия Y.

Доказательство. Ограничиваясь на аффинные карты в Y, мы можем считать Y аффинным. Тогда $X \times Y$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$, и наша проекция получается ограничением замкнутой проекции $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ на замкнутое подмножество $X \times Y \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$. □

Следствие 12.2
Если X проективно, а Y отделимо, то любой морфизм $\varphi : X \to Y$ замкнут.

Доказательство. Образ $\varphi(Z) \subset Y$ любого подмножества $Z \subset X$ совпадает с образом пересечения $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$ при проекции $X \times Y \twoheadrightarrow Y$, где $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$ — график отображения $\varphi : X \to Y$. Если Z замкнуто в X, произведение произведение $Z \times Y$ замкнуто в $X \times Y$. Если Y отделимо, график Γ_φ тоже замкнут[1]. Если X проективно, проекция $X \times Y \twoheadrightarrow Y$ замкнута и переводит замкнутое множество $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$ в замкнутое множество $\varphi(Z) \subset Y$. □

Следствие 12.3
Любое регулярное отображение из связного проективного многообразия X в аффинное многообразие стягивает X в одну точку. В частности, $\mathcal{O}_X(X) = \Bbbk$.

---

[1] см. прим. 12.5 на стр. 206

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для отображения $\varphi : X \to \mathbb{A}^n$. Беря композицию такого отображения с координатными функциями $x_i : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$, мы сводим утверждение к случаю $n = 1$. Композиция регулярного отображения $X \to \mathbb{A}^1$ с вложением $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_1$ в качестве стандартной аффинной карты является регулярном несюрьективным отображением $X \to \mathbb{P}_1$. Так как его образ замкнут и связен, он является точкой. □

12.4.1. Конечные проекции. Регулярный морфизм алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ называется *конечным*, если прообраз $W = \varphi^{-1}(U)$ любой аффинной карты $U \subset Y$ является аффинной картой на X, и ограничение $\varphi_W : W \to U$ является конечным морфизмом аффинных многообразий в смысле n° 11.5.3 на стр. 196. Из лем. 11.3 на стр. 196 следует, что каждый конечный морфизм замкнут и ограничение конечного морфизма на замкнутое подмногообразие $Z \subset X$ также является конечным морфизмом. Более того, если X неприводимо, то собственное замкнутое подмножество $Z \subset X$ переходит в *собственное* замкнутое подмножество Y.

Упражнение 12.10. Проверьте, что композиция конечных морфизмов конечна.

Предложение 12.1

Проекция любого проективного многообразия $X \subsetneq \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \notin X$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ является конечным морфизмом.

Доказательство. Рассмотрим аффинную карту $U \subset H$ и однородные координаты $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ на $\mathbb{P}_n$, в которых $p = (1 : 0 : \dots : 0)$, гиперплоскость $H = V(x_0)$ состоит из точек $q = (0 : q_1 : \dots : q_n)$, а карта $U \subset H$ — из точек $u = (0 : u_1 : \dots : u_{n-1} : 1)$, и пусть X задаётся в этих координатах системой однородных уравнений $f_\nu(x) = 0$. Поскольку $p \notin X$, прообраз $Y = \pi_p^{-1}(U) \subset X$ является пересечением X с проколотым конусом C над U, образованным всеми прямыми $(pu) \subset \mathbb{P}_n$ с выколотой точкой[1] p. Конус C является является аффинным алгебраическим многообразием, изоморфным аффинному пространству $\mathbb{A}^n = U \times \mathbb{A}^1$: изоморфизм переводит точку $(u, t) \in U \times \mathbb{A}_1$ в точку $x = tp + u \in \mathbb{P}_n$. Пересечение $Y = C \cap X$ задаётся в координатах (u, t) уравнениями

$$f_\nu(tp + u) = \alpha_0^{(\nu)}(u)\, t^m + \alpha_1^{(\nu)}(u)\, t^{m-1} + \dots + \alpha_m^{(\nu)}(u) = 0\,, \tag{12-9}$$

и стало быть тоже является аффинным алгебраическим многообразием. Покажем, что его координатная алгебра $\Bbbk[Y] = \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_{n-1}]/I$, где идеал I порождается многочленами $f_\nu(tp + u)$ из уравнений (12-9), цела над $\Bbbk[U] = \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_{n-1}]$. Для этого достаточно найти в идеале I приведённый многочлен от t с коэффициентами из $\Bbbk[U]$ — тогда класс $t \pmod{I}$, являющийся его корнем, будет цел над $\Bbbk[U]$. Наличие в идеале I такого многочлена равносильно тому, что идеал, порождённый в $\Bbbk[U]$ старшими коэффициентами $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ всех уравнений (12-9), содержит единицу, что по теореме Гильберта означает

---

[1] т. е. аффинными прямыми $u + pt$, $t \in \Bbbk$

отсутствие у многочленов $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ общих нулей в U. Но если такой общий нуль u_0 имеется, то однородные версии уравнений (12-9)

$$f_\nu(\vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u_0) = \alpha_0^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^m + \alpha_1^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^{m-1}\vartheta_1 + \dots + \alpha_m^{(\nu)}(u_0)\vartheta_1^m = 0\,,$$

получающиеся ограничением задающих X уравнений на проективную прямую (p, u_0), имеют на этой прямой общий корень $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$, находящийся в самой точке p, что противоречит условию $p \notin X$. □

Следствие 12.4
Каждое проективное многообразие допускает конечный сюрьективный морфизм на проективное пространство.

Следствие 12.5
Каждое аффинное многообразие X допускает конечный сюрьективный морфизм на аффинное пространство.

Доказательство. Пусть $X \subsetneq \mathbb{A}^n$, где $\mathbb{A}^n$ вложено в $\mathbb{P}_n$ как стандартная карта U_0. Положим $H_\infty \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_n \smallsetminus U_0$ и обозначим через $\overline{X} \subset \mathbb{P}_n$ проективное замыкание аффинного многообразия X. Проекция $\overline{X}$ из любой точки $p \in H_\infty \smallsetminus \overline{X}$ на любую гиперплоскость $L \not\ni p$ выглядит в аффинной карте U_0 как параллельная проекция многообразия $X = \overline{X} \smallsetminus H_\infty$ на гиперплоскость $U_0 \cap L = L \smallsetminus H_\infty$ в направлении вектора p и по предл. 12.1 является конечным морфизмом аффинных многообразий. Если он не сюрьективен, повторяем процедуру. □

Упражнение 12.11. Убедитесь, что если $X \neq \mathbb{A}^n$, то $\overline{X} \cap H_\infty \neq H_\infty$.

Пример 12.9 (нормализация Нётер)
Запишем $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ в виде $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$, где каждый f_k однороден степени k. Замыкание $\overline{X}$ аффинной гиперповерхности $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ в проективном пространстве $\mathbb{P}_n$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, куда $\mathbb{A}^n$ вложено в качестве стандартной карты U_0, задаётся однородным многочленом $\overline{f} = f_0 x_0^d + f_1 x_0^{d-1} + \dots + f_{d-1}x_0 + f_d$. Бесконечно удалённая точка

$$p = (0 : p_1 : p_2 : \dots : p_n) \notin \overline{X} \iff f_d(p_1, p_2, \dots, p_n) \neq 0\,.$$

Если $f_d \neq \text{const} \cdot x_n^d$, то $p \notin \overline{X}$ можно выбрать[1] в виде $p = (0, p_1, \dots, p_{n-1}, -1)$. Проекция из этой точки на гиперплоскость $x_n = 0$ выглядит в $\mathbb{A}^n$ как параллельная проекция $\pi_p : X \to \mathbb{A}^{n-1}$ вдоль вектора $p = (p_1, \dots, p_{n-1}, -1)$ и действует по формуле

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \big(x_1 + p_1 x_n,\ x_2 + p_2 x_n,\ \dots\ ,\ x_{n-1} + p_{n-1}x_n,\ 0\big)\ ,$$

---

[1] над *любым* бесконечным полем $\Bbbk$

т. е. $\pi_p^* : \Bbbk[t_1, t_2, \dots, t_{n-1}] \to \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/(f)$ переводит t_i в $x_i + p_i x_n$. По предл. 12.1 алгебра $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/(f)$ цела[1] над $\Bbbk[t_1, t_2, \dots, t_{n-1}]$.

Упражнение 12.12. Явно предъявите уравнения целой зависимости для всех x_i.

Проекция π_p доминантна: точка $q \notin \pi_p(X)$, если и только если многочлен

$$f\left(q_1 + p_1 x_n,\ q_2 + p_2 x_n,\ \dots\ ,\ q_{n-1} + p_{n-1} x_n, x_n\right) \in \Bbbk[x_n]$$

является ненулевой константой, что означает обращение в нуль всех его коэффициентов кроме свободного члена, и в предположении, что $f \neq \mathrm{const}$, может произойти лишь внутри отличного от $\mathbb{A}^{n-1}$ замкнутого подмножества. Из лем. 11.3 на стр. 196 следует, что π_p сюрьективна. Этот факт известен как *лемма Нётер о нормализации*: всякая аффинная гиперповерхность над произвольным бесконечным полем допускает конечную сюрьективную параллельную проекцию на гиперплоскость.

Упражнение 12.13. Убедитесь в этом напрямую, без привлечения лем. 11.3.

12.5. Размерность $\dim_x X$ алгебраического многообразия X в точке $x \in X$ определяется как максимальное число $n \in \mathbb{N}$, для которого существует цепочка неприводимых замкнутых подмногообразий

$$\{x\} = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n \subset X\,. \tag{12-10}$$

Если многообразие X неприводимо, максимальная цепочка (12-10) с неизбежностью имеет $X_n = X$. Если X приводимо, размерность $\dim_x X$ равна максимальной из размерностей всех проходящих через x неприводимых компонент многообразия X.

Упражнение 12.14. Покажите, что $\dim_x X = \dim_x U$ для всякой аффинной окрестности U точки x.

Предложение 12.2

Если многообразие Y неприводимо и имеется сюрьективный морфизм

$$\varphi : Y \twoheadrightarrow X\,,$$

то $\dim_y Y \geqslant \dim_{\varphi(y)} X$ для любой точки $y \in Y$.

Доказательство. Для любой цепочки (12-10) при каждом i многообразие

$$\varphi^{-1}(X_i) \subset Y$$

имеет неприводимую компоненту Y_i, доминантно отображающуюся на X_i, и из них можно составить цепочку $\{y\} = Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_{n-1} \subsetneq Y_n = Y$. □

---

[1] откуда следует, в частности, что $\operatorname{tr}\deg \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/(f) = n - 1$

Предложение 12.3
Пусть $\varphi : X \to Y$ — конечный морфизм неприводимых многообразий, и $x \in X$. Тогда $\dim_x X \leqslant \dim_{\varphi(x)} Y$ и равенство равносильно тому, что $\varphi(X) = Y$.

Доказательство. Согласно упр. 12.14 достаточно считать X и Y аффинными. Каждая цепочка (12-10) в X по лем. 11.3 на стр. 196 порождает цепочку строго вложенных друг в друга замкнутых неприводимых подмногообразий $\varphi(X_i)$ в Y, что даёт нужное неравенство, причём когда $\varphi(X) \neq Y$, это неравенство строгое. В случае $\varphi(X) = Y$ из предл. 12.2 возникает противоположное неравенство. □

Следствие 12.6
$\dim_x \mathbb{A}^n = n$ в любой точке $x \in \mathbb{A}^n$.

Доказательство. Поскольку в $\mathbb{A}^n$ имеется цепочка вида (12-10), образованная проходящими через x аффинными подпространствами, $\dim_x \mathbb{A}^n \geqslant n$. Противоположное неравенство получается по индукции: очевидно, что $\dim \mathbb{A}^0 = 0$, и если $\dim \mathbb{A}^{n-1} = n-1$, то беря конечную проекцию последнего отличного от $\mathbb{A}_n$ элемента максимальной цепочки (12-10), написанной для $X = \mathbb{A}^n$, на гиперплоскость в $\mathbb{A}^n$, мы заключаем из предл. 12.3, что его размерность, а значит и номер, не превосходит $n - 1$. Поэтому $\dim_x \mathbb{A}^n = n$. □

Следствие 12.7
Пусть X — неприводимое аффинное многообразие и $\varphi : X \to \mathbb{A}^m$ — сюрьективный конечный морфизм. Тогда $\dim_x X = m$ в каждой точке $x \in X$, и число m не зависит от выбора φ.

Следствие 12.8
Размерность аффинного неприводимого многообразия X равна степени трансцендентности[1] алгебры $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk$.

Доказательство. Конечная сюрьекция $\pi : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ соответствует целому расширению $\pi^* : \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m] = \Bbbk[\mathbb{A}^m] \hookrightarrow \Bbbk[X]$. Последнее означает, что функции $\pi^* u_i$ образуют базис трансцендентности $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk$. □

Упражнение 12.15. Докажите, что $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ для любых неприводимых многообразий X, Y.

12.5.1. Размерности подмногообразий. Если через точку x многообразия X проходит несколько неприводимых компонент, и функция $f \in \Bbbk[X]$ тождественно обращается в ноль на одной из таких компонент, имеющей максимальную размерность $\dim_x X$, гиперповерхность $V(f) \subset X$ будет иметь в точке x ту же размерность, что и объемлющее многообразие X. Это контринтуитвное явление возможно, только если f делит нуль в $\Bbbk[X]$.

---

[1] см. n° 10.4 на стр. 178

Предложение 12.4
Если X неприводимо, то $\dim_p V(f) = \dim_p(X) - 1$ для любой непостоянной регулярной функции $f \in \mathcal{O}_X(X)$ и любой точки $p \in V(f)$.

Доказательство. Мы можем и будем предполагать X аффинным. Случай $X = \mathbb{A}^n$ был разобран в прим. 12.9. Общий случай сводится к этому рассуждением, аналогичным использованному в доказательстве лем. 11.4 на стр. 197. Зафиксируем конечную сюрьекцию $\pi : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ и рассмотрим отображение

$$\varphi = \pi \times f : X \to \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1 , \quad x \mapsto \big(\pi(x), f(x)\big) .$$

В лем. 11.4 мы видели, что оно конечно и сюрьективно отображает X на аффинную гиперповерхность $V(\mu_f) \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$ — множество нулей минимального многочлена $\mu_f(u,t) = t^n + \alpha_1(u)\, t^{n-1} + \cdots + \alpha_n(u) \in \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m][t]$ функции f над полем $\Bbbk(\mathbb{A}^m)$. Гиперповерхность $V(f) \subset X$ отображается морфизмом φ в пересечение $V(\mu_f)$ с аффинной гиперплоскостью $t = 0$, внутри которой это пересечение задаётся уравнением $\alpha_n(u) = 0$, т. е. является аффинной гиперповерхностью $V(a_n) \subset \mathbb{A}^m$ размерности $m - 1$. По предл. 12.3 $\dim V(f) = \dim V(a_n) = m - 1 = \dim X - 1$. □

Следствие 12.9
Для любых аффинного многообразия X и функций $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$ в каждой точке $p \in V(f_1, f_2, \dots, f_m)$ выполнено неравенство

$$\dim_p V(f_1, f_2, \dots, f_m) \geqslant \dim_p(X) - m .$$

Если при каждом i класс f_i не делит нуль в $\Bbbk[X]/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$, это неравенство превращается в равенство[1].

Предостережение 12.1. Предыдущее следствие отнюдь *не утверждает*, что

$$V(f_1, f_2, \dots, f_m) \neq \varnothing ,$$

и формально остаётся истинным, если $V(f_1, f_2, \dots, f_m) = \varnothing$. А такое частенько случается: например, $V(x, x+1) = \varnothing$ в $\mathbb{A}^3 = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[x, y, z]$. Из слабой теоремы Гильберта о нулях вытекает, что $V(f_1, f_2, \dots, f_m) = \varnothing$, если и только если при некотором i класс f_i в $\Bbbk[X]/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$ равен ненулевой константе.

Предложение 12.5
Для любых аффинных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^n$ в каждой точке $x \in X_1 \cap X_2$ выполняется неравенство $\dim_x(X_1 \cap X_2) \geqslant \dim_x(X_1) + \dim_x(X_2) - n$.

---

[1] последовательности функций с таким свойством называются *регулярными*

Доказательство. Пусть $\varphi_1 : X_1 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ и $\varphi_2 : X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ — замкнутые вложения. Тогда $X_1 \cap X_2$ является прообразом диагонали $\Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ при отображении

$$\varphi_1 \times \varphi_2 : X_1 \times X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n .$$

Внутри $X_1 \times X_2$ он задаётся n уравнениями $(\varphi_1 \times \varphi_2)^*(x_i) = (\varphi_1 \times \varphi_2)^*(y_i)$, которые являются поднятиями линейных уравнений $x_i = y_i$, задающих диагональ Δ в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Остаётся применить сл. 12.9. ☐

Предложение 12.6
Если размерности неприводимых проективных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}_n$ удовлетворяют неравенству $\dim(X_1) + \dim(X_2) \geqslant n$, то $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Рассмотрим в $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ аффинные конусы X_1', X_2'' образованные одномерными векторными подпространствами в V, составляющими точки проективных многообразий[1] X_1 и X_2. По предыдущему утверждению $\dim_O(X_1' \cap X_2'') \geqslant \dim_O(X_1) + 1 + \dim_O(X_2) + 1 - n - 1 \geqslant 1$. Таким образом, $X_1' \cap X_2''$ не исчерпывается точкой O. ☐

12.5.2. Размерности слоёв регулярных морфизмов. В алгебраической геометрии, в отличие от дифференциальной, размерность прообраза при регулярном отображении контролируется почти столь же жёстко, как в линейной алгебре.

Теорема 12.1
Для любого доминантного морфизма $\varphi : X \to Y$ неприводимых алгебраических многообразий в каждой точке $x \in X$ выполняется неравенство

$$\dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant \dim X - \dim Y$$

и существует плотное открытое подмножество $U \subset Y$, над каждой точкой $y \in U$ которого $\dim_x \varphi^{-1}(y) = \dim_x X - \dim_y Y$ в каждой точке $x \in \varphi^{-1}(y)$.

Доказательство. Беря композицию φ с конечным сюрьективным морфизмом какой-нибудь аффинной карты $U \ni \varphi(x)$ на пространство $\mathbb{A}^m$ и заменяя X на $\varphi^{-1}(U)$, мы сводим первое утверждение теоремы к случаю

$$Y = \mathbb{A}^m = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m] , \quad \varphi(x) = 0 .$$

Заменяя X аффинной окрестностью точки x, мы можем считать X аффинным. В этом случае $\varphi^{-1}(0)$ является непустым пересечением m гиперповерхностей $V(\varphi^*(u_i)) \subset X$, и требуемое неравенство вытекает из сл. 12.9. В доказательстве

---

[1] эти конусы имеют те же самые уравнения, что и X_1, X_2, но только теперь эти уравнения рассматриваются как аффинные

второго утверждения мы также можем и будем считать оба многообразия аффинными, а морфизм φ — ограничением проекции $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \twoheadrightarrow Y$ на замкнутое подмногообразие $X \subset Y \times \mathbb{A}^m$, как в разложении из форм. (11-8) на стр. 195. Мы собираемся применить к слоям этой проекции сл. 12.5. Для этого рассмотрим проективное замыкание $\overline{X} \subset Y \times \mathbb{P}_m$, выберем гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}_m$ и точку $p \in \mathbb{P}_m \smallsetminus H$ так, чтобы сечение $Y \times \{p\} \subset Y \times \mathbb{P}_m$ не содержалось в $\overline{X}$. Тогда послойная проекция из p на H будет удовлетворять условиям предл. 12.1 во всех слоях, располагающихся над открытым подмножеством $U \subset Y$, дополнительным к $\overline{\pi}\Big(\big(Y \times \{p\}\big) \cap \overline{X}\Big)$, где $\overline{\pi} : Y \times \mathbb{P}_m \twoheadrightarrow Y$ — проекция вдоль $\mathbb{P}_m$. Таким образом, заменяя Y любым лежащим в U главным открытым подмножеством (которое, как и Y, тоже является аффинным алгебраическим многообразием), мы можем повторить рассуждения из сл. 12.5 одновременно во всех слоях проекции π, что после конечного числа таких итераций приведёт к конечному сюрьективному отображению $\psi : X \twoheadrightarrow Y \times \mathbb{A}^n$, ограничение которого на каждый слой $\varphi^{-1}(y)$ является конечным сюрьективным морфизмом $\varphi^{-1}(y) \twoheadrightarrow \{y\} \times \mathbb{A}^n$. Конечность ψ влечёт равенство $n = \dim X - \dim Y$, а конечность его ограничений на слои — равенство $\dim_x \varphi^{-1}(y) = n$. □

Следствие 12.10 (теорема Шевалле о полунепрерывности)
Для любого морфизма алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ множества

$$X_k \overset{\text{def}}{=} \{\, x \in X \mid \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant k \,\}$$

замкнуты в X при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Если $\dim Y = 0$, то теорема тривиально верна для всех X и k. Пусть теперь $\dim Y = m$ и для всех Y меньшей размерности теорема верна для всех X и k. Покажем, что она верна для Y. Можно считать X и Y неприводимыми. Если $k \leqslant \dim(X) - \dim(Y)$, то $X_k = X$ по теор. 12.1. Для $k > \dim(X) - \dim(Y)$ заменим Y на $Y' = Y \smallsetminus U$, где U взято из теор. 12.1, а X — на $X' = \varphi^{-1}(Y')$. Тогда $X_k \subset X'$, $\dim Y' < \dim Y$, и применимо индуктивное предположение. □

Следствие 12.11
Для любого замкнутого морфизма $X \xrightarrow{\varphi} Y$ множество

$$Y_k \overset{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geqslant k\}$$

замкнуто в Y при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 12.2 (размерностный критерий неприводимости)
Если регулярный морфизм $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ сюрьективен, а все его слои неприводимы и имеют одинаковые размерности, то неприводимость Y влечёт неприводимость X.

Доказательство. Пусть $X = X_1 \cup X_2$ приводимо. Положим

$$Y_1 \overset{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_1\}\,, \quad Y_2 \overset{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_2\}\,.$$

Поскольку каждый слой φ, будучи неприводимым, целиком содержится либо в X_1, либо в X_2, мы заключаем, что $Y = Y_1 \cup Y_2$, причём оба подмножества Y_i отличны от Y, коль скоро оба подмножества X_i отличны от X. Так как Y_i совпадает с множеством таких точек в Y, над которыми слой отображения $\varphi|_{X_i}X_i \to Y$ достигает своей максимальной размерности, из сл. 12.11 вытекает, что Y_i замкнуто. Тем самым, приводимость X влечёт приводимость Y. □

12.6. Размерности проективных многообразий. По предл. 12.6 всякое d-мерное неприводимое многообразие $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ пересекается со всеми проективными подпространствами $H \subset \mathbb{P}_n$ размерности $\dim H \geqslant n - d$. Покажем, что общее подпространство H размерности $\dim H < n-d$ не пересекается с X, и, тем самым, $\dim X$ можно охарактеризовать как наибольшее такое d, что X пересекается со всеми проективными подпространствами коразмерности d. Для этого рассмотрим грассманиан $\operatorname{Gr}(n-d, n+1) = \operatorname{Gr}(n-d, V)$, точками которого являются все $(n-d-1)$-мерные проективные подпространства $H \subset \mathbb{P}(V)$, и образуем многообразие инцидентности

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{(x, H) \in X \times \operatorname{Gr}(n-d, V) \mid x \in H\} \tag{12-11}$$

Упражнение 12.16. Убедитесь, что Γ является проективным алгебраическим многообразием.

Проекция $\pi_1 : \Gamma \twoheadrightarrow X$ сюрьективна: её слой над каждой точкой x состоит из всех проективных подпространств размерности $n-d-1$, проходящих через x, и изоморфен грассманиану $\operatorname{Gr}(n-d-1, n) = \operatorname{Gr}(n-d-1, V/\Bbbk\cdot x)$ всех векторных $(n-d-1)$-мерных подпространств в фактор пространстве $V/\Bbbk\cdot x$. По теор. 12.2 многообразие Γ неприводимо и имеет размерность $d + (n-d-1)(d+1) = (n-d)(d+1)-1$. Образ $\pi_2(\Gamma) \subset \operatorname{Gr}(n-d, V)$ второй проекции $\pi_2 : \Gamma \to \operatorname{Gr}(n-d, V)$ состоит из всех $(n-d-1)$-мерных подпространств, пересекающих X. Это неприводимое замкнутое подмногообразие размерности, не превышающей $\dim \Gamma$ и, тем самым, строго меньшей, чем $\dim \operatorname{Gr}(n-d, V) = (n-d)(d+1)$. Поэтому множество не пересекающих X $(n-d-1)$-мерных подпространств содержит в себе открытое по Зарисскому всюду плотное подмножество грассманиана $\dim \operatorname{Gr}(n-d, V)$.

Соображения размерности позволяют сказать и больше. Повторяя предыдущее рассуждение для $(n-d)$-мерных подпространств H' вместо $(n-d-1)$-мерных, мы получим неприводимое проективное многообразие

$$\Gamma' \overset{\text{def}}{=} \{(x, H') \in X \times \operatorname{Gr}(n-d+1, V) \mid x \in H\}$$

размерности $\dim X + \dim \operatorname{Gr}(n-d, n) = d + d(n-d) = d(n-d+1)$. Так как $X \cap H' \neq \varnothing$ для всех H', проекция $\pi_2 : \Gamma' \twoheadrightarrow \operatorname{Gr}(n-d+1, V)$ эпиморфна, и её *общий слой*[1] имеет по теор. 12.1 размерность $\dim \Gamma - \dim \mathrm{Gr}(n-d+1, n+1) = d(n-d+1) - (n-d+1)d = 0$. Это означает, что *общая d-мерная плоскость H' пересекает X по конечному числу точек*.

Беря одну из таких плоскостей H' и проводя внутри неё $(n-d-1)$-мерную плоскость H через одну из точек пересечения $p \in X \cap H'$, мы видим, что $H \cap X$ конечно и непусто. Это означает, что у проекции $\pi_2 : \Gamma \to \mathrm{Gr}(n-d, V)$ первого многообразия инцидентности (12-11) имеется нульмерный слой. Тем самым, минимальная размерность непустого слоя этой проекции нулевая, откуда по теор. 12.1 вытекает, что $\dim \pi_2(\Gamma) = \dim \Gamma = \dim \mathrm{Gr}(n-d, V) - 1$, т. е. *пересекающие X подпространства размерности $(n-d-1)$ образуют неприводимую гиперповерхность*[2] в грассманиане.

Упражнение 12.17. Выведите отсюда, что существует неприводимый многочлен от плюккеровых координат $(n-d-1)$-мерного подпространства в $\mathbb{P}_n$, обращение которого в нуль на данном подпространстве H равносильно тому, что $H \cap X \neq \varnothing$.

Проделанные рассуждения иллюстрируют стандартный метод подсчёта размерностей при помощи многообразий инцидентности, часто используемый в геометрии.

Пример 12.10 (результант)

Фиксируем $d_0, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ и обозначим через $\mathbb{P}_{N_i} = \mathbb{P}\left(S^{d_i}V^*\right)$ пространство проективных гиперповерхностей степени d_i в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, как в n° 12.3 на стр. 208. Покажем, что результантное многообразие

$$\mathcal{R} = \{(S_0, S_1, \dots, S_n) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \mid \cap S_i \neq \varnothing\}$$

системы из $(n+1)$ однородных полиномиальных уравнений на $n+1$ неизвестных, является неприводимой гиперповерхностью[3] в $\mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$. Для этого рассмотрим многообразие инцидентности

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{(S_1, S_2, \dots, S_n, p) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \times \mathbb{P}_n \mid p \in \cap S_i\}.$$

Упражнение 12.18. Убедитесь, что G является проективным алгебраическим многообразием.

Поскольку уравнение $f(p) = 0$ линейно по f, проективные гиперповерхности степени d_i, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_n$, образуют гиперплоскость в пространстве $\mathbb{P}_{N_i}$. Поэтому проекция $\pi_2 : \Gamma \twoheadrightarrow \mathbb{P}_n$ сюрьективна, а

---

[1] т. е. все слои над точками из некоторого плотного открытого подмножества в грассманиане

[2] т. е. подмногообразие коразмерности 1

[3] т. е. существует такой неприводимый многочлен от коэффициентов уравнений, что его обращение в нуль на наборе многочленов $f_0, f_1, \dots, f_n$ равносильно существованию ненулевого решения у системы полиномиальных уравнений $f_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$; этот многочлен называется *результантом* рассматриваемой системы

все её слои являются произведениями проективных гиперплоскостей и имеют одинаковую размерность $\sum(N_i - 1) = \sum N_i - n - 1$. Поэтому Γ является неприводимым проективным многообразием размерности $\sum N_i - 1$.

Упражнение 12.19. Предъявите в $\mathbb{P}_n$ набор из $n+1$ гиперповерхностей S_i заданных степеней d_i, пересекающихся ровно в одной точке.

Из упражнения вытекает, что у проекции $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{P}_{N_0} \times \mathbb{P}_{N_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_{N_n}$ имеется нульмерный слой. Поэтому общий непустой слой тоже нульмерен, и $\dim \pi_1(\Gamma) = \dim \Gamma$. Тем самым, $\pi_1(\Gamma)$ является неприводимой гиперповерхностью в $\mathbb{P}_{N_0} \times \cdots \times \mathbb{P}_{N_n}$.

Упражнение 12.20. Покажите, что всякое неприводимое подмногообразие коразмерности 1 в произведении проективных пространств задаётся неприводимым многочленом от однородных координат, однородным по координатам каждого из проективных пространств.

Пример 12.11 (прямые на поверхностях)

Множество всех поверхностей данной степени d в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ образует проективное пространство $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$ размерности

$$N = \frac{1}{6}(d+1)(d+2)(d+3) - 1\,.$$

Множество всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ представляет собою грассманиан $\mathrm{Gr}(2,4) = \mathrm{Gr}(2,V)$, изоморфный гладкой 4-мерной квадрике в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Обозначим через

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \left\{ (S,\ell) \in \mathbb{P}_N \times \mathrm{Gr}(2,4) \;\middle|\; \ell \subset S \right\}$$

многообразие инцидентности между прямыми и поверхностями.

Упражнение 12.21. Убедитесь, что $\Gamma \subset \mathbb{P}_N \times \mathrm{Gr}(2,4)$ является проективным алгебраическим многообразием.

Проекция $\pi_2 : \Gamma \twoheadrightarrow Q_P$ сюрьективна и все её слои являются проективными пространствами одинаковой размерности: прямая ℓ, заданная уравнениями $x_0 = x_1 = 0$, тогда и только тогда лежит на поверхности $V(f)$, когда

$$f = x_2 \cdot g + x_3 \cdot h$$

лежит в образе линейного отображения

$$\psi : S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^* \to S^d V^*\,,\ (g,h) \mapsto x_2 g + x_3 h\,,$$

изоморфном фактору пространства $S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^*$ размерности

$$\frac{1}{3}\,d(d+1)(d+2)$$

по подпространству $\ker\psi = \{(g,h) = (x_3 q, -x_2 q) \mid q \in S^{d-2}V^*\}$ размерности

$$\frac{1}{6}(d-1)d(d+1)\,.$$

Поэтому содержащие ℓ поверхности составляют проективное пространство размерности

$$\frac{1}{6}\Big(\,2\,d(d+1)(d+2)-(d-1)d(d+1)\,\Big)-1=\frac{1}{6}\,d(d+1)(d+5)-1\,.$$

Следовательно, Γ является неприводимым проективным многообразием, и

$$\dim\Gamma=\frac{1}{6}\,d(d+1)(d+5)+3\,.$$

Проекция $\pi_1(\Gamma)\subset\mathbb{P}_N$ представляет собою множество поверхностей, содержащих хотя бы одну прямую. Из предыдущего вытекает, что это замкнутое неприводимое многообразие.

Упражнение 12.22. Для каждого $d\geqslant 3$ предъявите поверхность степени d в $\mathbb{P}_3$, содержащую конечное число прямых.

Из упражнения вытекает, что у проекции π_1 имеется непустой 0-мерный слой. Поэтому её общий непустой слой тоже нульмерен, и $\dim\pi_1(\Gamma)=\dim\Gamma$. Поскольку разность $N-\dim\Gamma=\frac{1}{6}\big((d+1)(d+2)(d+3)-d(d+1)(d+5)\big)-4=d-3$, мы заключаем, что на каждой кубической поверхности в $\mathbb{P}_3$ есть прямая, причём на общей кубической поверхности лежит конечное число прямых, а на общей поверхности степени $\geqslant 4$ прямых нет.

Задачи для самостоятельного решения к §12

Задача 12.1. Вычислите результант многочленов: а) x^3-3x^2+2x+1 и $2x^2-x-1$
б) $2x^4-x^3+3$ и $3x^3-x^2+4$ в) $2x^3-3x^2-x+2$ и x^4-2x^2-3x+4
г*) круговых многочленов Φ_n и Φ_m

Задача 12.2. Исключите x из уравнений: а) $x^2-xy+y^2-3=x^2y-xy^2-6=0$
б) $4x^2-7xy+y^2+13x-2y-3=9x^2-14xy+y^2+28x-4y-5=0$
в) $5x^2-6xy+5y^2-16=2x^2-xy+y^2-x-y-4=0\,.$

Задача 12.3 (дискриминант). Дискриминантом многочлена $f(x)=a_n\prod\limits_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$ называется произведение $D(f)=a_n^{2n-2}\prod\limits_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$. Выразите дискриминант $D(f)$ через результант f и его производной f' и покажите, что $D(fg)=D(f)D(g)R_{f,g}^2$.

Задача 12.4. Вычислите дискриминанты многочленов: а) $\sum\limits_{k=0}^{n}x^k$ б) $\sum\limits_{k=0}^{n}x^k/k!$
в) x^n+a г*) $\Phi_k(x)$

Задача 12.5 (инволюция Кремоны). Покажите, что правило

$$(t_0:t_1:t_2)\mapsto(t_0^{-1}:t_1^{-1}:t_2^{-1})$$

продолжается до рационального отображения $\varkappa : \mathbb{P}_2 \dashrightarrow \mathbb{P}_2$, определённого всюду кроме 3 точек. Найдите эти точки, объясните, как действует $\varkappa$ на тройке прямых, соединяющих эти точки, и опишите $\operatorname{im} \varkappa$.

Задача 12.6 (график рационального отображения). Графиком $\Gamma_\psi \subset X \times Y$ рационального отображения $\psi : X \dashrightarrow Y$, определённого на открытом плотном $U \subset X$, называется замыкание множества $\{(x, \psi(x)) \in X \times Y \mid x \in U\}$. Опишите график квадратичного преобразования Кремоны из зад. 12.5 и слои его проекций на сомножители.

Задача 12.7. Покажите, что изолированные точки слоёв любого регулярного морфизма $\varphi : X \to Y$ заметают открытое[1] подмножество в X.

Задача 12.8 (теорема Шевалле о конструктивности). Докажите, что образ регулярного морфизма алгебраических многообразий получается из конечного числа открытых и замкнутых подмножеств применением конечного числа операций пересечения, объединения и разности.

Задача 12.9. Покажите, что множество $(n-d)$-мерных проективных подпространств $H \subset \mathbb{P}(V)$, пересекающих произвольно заданное d-мерное проективное многообразие $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ по конечному множеству точек, является плотным открытым по Зарисскому подмножеством W грассманиана $\operatorname{Gr}(n+1-d, V)$, параметризующего все $(n-d)$-мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}(V)$, причём максимальное число максимально возможное число точек пересечения реализуется для всех подпространств, из некоторого плотного открытого подмножества $W' \subset W$.

Задача 12.10. Обозначим через $\mathcal{D}_k(m,n) \subset \mathbb{P}\big(\operatorname{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)\big)$ проективное многообразие $m \times n$-матриц ранга $\leqslant k$. С помощью подходящего многообразия инцидентности $\Gamma = \{(L, M) \mid L \subset \ker M\}$, где L — подпространство, а M — матрица, покажите, что $\mathcal{D}_k(m,n)$ является неприводимым проективным многообразием и найдите его размерность.

Задача 12.11. Покажите, что множество поверхностей 4-й степени в $\mathbb{P}_3$, на которых есть хоть одна прямая, образует неприводимую алгебраическую гиперповерхность в пространстве всех поверхностей 4-й степени.

Задача 12.12. Пусть 6 точек $p_1, p_2, \dots, p_6 \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ не лежат на одной конике и никакие три из них не коллинеарны. Обозначим через $W = \{f \in S^3V^* \mid \forall i \ f(p_i) = 0\}$ пространство кубических форм, зануляющихся во всех шести точках $p_1, p_2, \dots, p_6$. Отображение $\psi : \mathbb{P}_2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\} \to \mathbb{P}(W^*)$ переводит точку $p \neq p_1, p_2, \dots, p_6$ в подпространство $\operatorname{Ann} p = \{f \in W \mid f(p) = 0\}$. Покажите, что

а) $\operatorname{Ann} p$ имеет коразмерность 1 в W

б) $\dim W = 4$ и замыкание образа отображения ψ является гладкой[2] кубической поверхностью $S \subset \mathbb{P}_3$

в) отображение ψ продолжается до регулярного изоморфизма $\widetilde{\psi} : \sigma^{-1}_{p_1, p_2, \dots, p_6}\mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} S$ между S и раздутием $\mathbb{P}_2$ в заданных 6 точках.

г) Явно предъявите 27 пучков плоских кубических кривых, которые проходят через точки $p_1, p_2, \dots, p_6$ и переводятся изоморфизмом $\widetilde{\psi}$ в 27 прямых, лежащих на

---

[1] возможно, пустое

[2] т. е. без особых точек, см. n° 2.4.5 на стр. 31

кубической поверхности S.

Задача 12.13. Покажите, что множество n-мерных проективных подпространств, лежащих на гладкой $(2n+1)$-мерной квадрике в $\mathbb{P}_{2n+2}$ (соотв. на гладкой $2n$-мерной квадрике в $\mathbb{P}_{2n+1}$) является неприводимым проективным многообразием (соотв. дизъюнктным объединением двух изоморфных друг другу проективных многообразий) и выясните размерности этих многообразий.

Задача 12.14. Покажите, что множество прямых, лежащих на гладкой квадрике в $\mathbb{P}_4$, является проективным алгебраическим многообразием, выясните, приводимо ли оно, и найдите его размерность.

Задача 12.15 (многообразие секущих). Для неприводимого $X \subset \mathbb{P}(V)$ обозначим через $\mathcal{S}(X) \subset \mathrm{Gr}(2, V)$ замыкание множества всех прямых (p, q) с $p, q \in X$ и $p \neq q$, а через $S(X) \subset \mathbb{P}(V)$ — объединение в $\mathbb{P}(V)$ всех прямых ℓ из $\mathcal{S}(X)$. Покажите, что

а) $\mathcal{S}(X)$ неприводимо и $\dim \mathcal{S}(X) = 2 \dim X$

б) $S(X)$ неприводимо и $\dim S(X) \leqslant 2 \dim X + 1$

в) если X — скрученная[1] кривая, то $\dim S(X) = 3$

---

[1] т. е. не содержащаяся в плоскости

§13. Алгебраические расширения полей

13.1. Конечные расширения. Поле $\mathbb{F} \supset \Bbbk$, конечномерное как векторное пространство над полем $\Bbbk$, называется *конечным расширением* поля $\Bbbk$. Его размерность $\dim_{\Bbbk} \mathbb{F}$ называется *степенью* $\mathbb{F}$ над $\Bbbk$ и обозначается $\deg \mathbb{F} / \Bbbk$ или $[\mathbb{F} : \Bbbk]$.

Упражнение 13.1. Пусть расширения полей $\Bbbk \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{F}$ конечны и $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{F}$ составляют базис $\mathbb{F}$ над $\mathbb{K}$, а $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{K}$ составляют базис $\mathbb{K}$ над $\Bbbk$. Покажите, что mn попарных произведений $f_i t_j$ составляют базис $\mathbb{F}$ над $\Bbbk$. В частности,

$$\deg \mathbb{F}/\Bbbk = \deg \mathbb{F}/\mathbb{K} \cdot \deg \mathbb{K}/\Bbbk. \tag{13-1}$$

Поскольку целость и алгебраичность элемента над полем означают одно и то же, из доказанных в n° 10.1 на стр. 171 свойств целых элементов вытекает, что всякая коммутативная $\Bbbk$-алгебра A, конечномерная как векторное пространство над $\Bbbk$, алгебраична над $\Bbbk$, и если в A нет делителей нуля, то A является полем. Наоборот, любое поле $\mathbb{K} \supset \Bbbk$, конечно порождённое как $\Bbbk$-алгебра, является конечным расширением поля $\Bbbk$. В частности, любая конечно порождённая $\Bbbk$-подалгебра $\Bbbk[a_1, a_2, \dots, a_m]$ в любом поле $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ конечной степени над $\Bbbk$ тоже является полем конечной степени над $\Bbbk$, причём эта степень делит $\deg \mathbb{F}/\Bbbk$ по упр. 13.1.

Упражнение 13.2. Убедитесь, что любое конечное поле $\mathbb{F}$ имеет положительную характеристику $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = p > 0$, является конечным расширением своего простого подполя[1] $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ и имеет порядок $|\mathbb{F}| = p^{[\mathbb{F}:\mathbb{F}_p]}$.

13.1.1. Примитивные расширения. Пусть многочлен $f \in \Bbbk[x]$ неприводим и $\deg f = n > 1$. Алгебра $\Bbbk[x]/(f)$ не имеет делителей нуля и n-мерна над $\Bbbk$. Поэтому она является полем. Элементы этого поля однозначно записываются в виде

$$b_0 + b_1\vartheta + \dots + b_{n-1}\vartheta^{n-1},$$

где $b_i \in \Bbbk$, а класс $\vartheta = x \bmod (f)$ является корнем многочлена f. Поле $\Bbbk[x]/(f)$ называется *примитивным* расширением поля $\Bbbk$, полученным *присоединением* к полю $\Bbbk$ корня ϑ неприводимого многочлена f. Если понятно, какой многочлен f имеется в виду[2], примитивное расширение $\Bbbk[x]/(f)$ часто обозначают $\Bbbk[\vartheta]$ или $\Bbbk(\vartheta)$. Так, запись $\Bbbk\left[\sqrt[m]{a}\right]$ по определению означает примитивное расширение $\Bbbk[x]/(x^m - a)$, где $a \in \Bbbk$ таков, что многочлен $x^m - a$ неприводим в $\Bbbk[x]$.

Пример 13.1 (кубические расширения)

Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле и $f = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \in \Bbbk[x]$ неприводим над $\Bbbk$. Поле $\mathbb{K} = \Bbbk[x]/(f)$ имеет степень 3 над $\Bbbk$ и его элементы однозначно записываются в виде $b_0 + b_1\vartheta + b_2\vartheta^2$, где $b_i \in \Bbbk$, а $\vartheta \in \mathbb{K}$ означает класс $x \bmod (f)$. Такие

---

[1] напомним, что *простым подполем* поля $\mathbb{F}$ называется наименьшее подполе в $\mathbb{F}$, содержащее единицу

[2] без явного указания многочлена f обозначение $\Bbbk[\vartheta]$ мало осмысленно

записи перемножаются и складываются по стандартным правилам раскрытия скобок с учётом соотношения $f(\vartheta) = 0$.

Упражнение 13.3. Пусть $\Bbbk = \mathbb{Q}$ и $f(x) = x^3 + x + 1$. Запишите $(1 + 2\vartheta)^{-1}$ и $(1 + \vartheta + \vartheta^2)^{-1}$ в виде $b_0 + b_1\vartheta + b_2\vartheta^2$.

Так как $f(\vartheta) = 0$, многочлен $f(x)$ раскладывается в $\mathbb{K}[x]$ в произведение

$$f(x) = (x - \vartheta) \cdot q(x)\,,$$

где квадратный трёхчлен $q(x) = x^2 + c_1x + c_2 \in \mathbb{K}[x]$ либо приводим над $\mathbb{K}$, и тогда

$$q(x) = (x - \vartheta_1)(x - \vartheta_2) \tag{13-2}$$

для некоторых $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{K}$, либо неприводим, и тогда разложение (13-2) пишется лишь над квадратичным расширением $\mathbb{L} = \mathbb{K}[x]/(q)$ поля $\mathbb{K}$, степень которого над исходным полем $\Bbbk$ равна 6. Чтобы выяснить, какой из этих двух случаев имеет место, заметим, что *дискриминант*[1]

$$D(f) = (\vartheta - \vartheta_1)^2(\vartheta - \vartheta_2)^2(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2 = q^2(\vartheta) \cdot D(q)\,, \tag{13-3}$$

будучи симметрическим многочленом от корней, является многочленом от коэффициентов f и лежит в $\Bbbk$.

Упражнение 13.4. Убедитесь, что $D(x^2 + px + q) = p^2 - 4q$, а $D(x^3 + px + q) = -4\,p^3 - 27\,q^2$.

Приводимость q в $\mathbb{K}[x]$ равносильна тому, что $D(q) = (\vartheta_1 - \vartheta_2)^2$ является квадратом в $\mathbb{K}$. Согласно (13-3), это эквивалентно тому, что квадратом в $\mathbb{K}$ является $D(f)$. Но если $D(f)$ квадрат в $\mathbb{K}$, то он квадрат и в $\Bbbk$: иначе многочлен $x^2 - D(f)$ был неприводим над $\Bbbk$, и квадратичное расширение $\Bbbk[x]/\big(x^2 - D(f)\big)$ поля $\Bbbk$ вкладывалось бы в поле $\mathbb{K}$ по правилу $x \bmod \big(x^2 - D(f)\big) \mapsto \sqrt{D(f)} \in \mathbb{K}$, что невозможно по упр. 13.1, т. к. $\deg \mathbb{K}/\Bbbk = 3$. Итак, неприводимый кубический многочлен $f \in \Bbbk[x]$ тогда и только тогда полностью разлагается на линейные множители над кубическим расширением $\Bbbk[x]/(f)$, когда $D(f)$ квадрат в $\Bbbk$.

Упражнение 13.5. Покажите, что следующие три условия на вещественный трёхчлен $f(x) = x^3 + px + q \in \mathbb{R}[x]$ попарно эквивалентны: а) $D(f) > 0$ б) все комплексные корни f вещественны в) при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ подстановка $x = \lambda t$ превращает уравнение $f(x) = 0$ в уравнение $4\,t^3 - 3\,t = c$ с $|c| \leqslant 1$, корнем которого является $x = \cos\big(\frac{1}{3}\,\arccos(c)\big)$.

---

[1] напомню, что *дискриминантом* приведённого многочлена $f(x) = \prod(x - \vartheta_i)$ называется произведение $D(f) \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{i<j}(\vartheta_i - \vartheta_j)^2$ квадратов разностей его корней

13.1.2. Сепарабельность. Если в рассмотренном выше прим. 13.1 характеристика исходного поля $\Bbbk$ равна 3, некоторые из корней ϑ, ϑ_1 и ϑ_2 многочлена f могут совпасть, хотя он и *неприводим* над $\Bbbk$. Скажем, над полем $\Bbbk = \mathbb{F}_3(t)$ рациональных функций с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ многочлен $f(x) = x^3 - t \in \Bbbk[x]$ неприводим, т. к. не имеет корней в $\Bbbk$, однако над примитивным расширением $\mathbb{K} = \Bbbk\left[\sqrt[3]{t}\right] = \Bbbk[x]\,/\,(f)$ он становится полным кубом[1]: $x^3 - t = \left(x - \sqrt[3]{t}\right)^3$.

Определение 13.1

Многочлен $f \in \Bbbk[x]$ называется *сепарабельным*, если у него нет кратных корней ни в каком расширении $\mathbb{K} \supset \Bbbk$. Алгебраическое расширение $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ (возможно, бесконечное) называется *сепарабельным*, если минимальный над $\Bbbk$ многочлен $\mu_\vartheta \in \Bbbk[x]$ любого элемента $\vartheta \in \mathbb{F} \smallsetminus \Bbbk$ сепарабелен.

Упражнение 13.6. Покажите, что корень $\alpha \in \mathbb{F} \supset \Bbbk$ многочлена $f \in \Bbbk[x]$ является кратным , если и только если $f'(\alpha) = 0$.

Тем самым, многочлен $f \in \Bbbk[x]$ сепарабелен тогда и только тогда, когда

$$\text{нод}(f, f') = 1\,,$$

и это условие проверяемо в самом поле $\Bbbk$ при помощи алгоритма Евклида.

Упражнение 13.7. Убедитесь, что все неприводимые многочлены над любым полем характеристики нуль сепарабельны.

Пример 13.2 (сепарабельность конечных полей)

Если многочлен f неприводим, то он не может иметь отличных от констант общих делителей ни с каким ненулевым многочленом меньшей степени. Поэтому неравенство $\text{нод}(f, f') \neq 1$ возможно только когда $f' \equiv 0$. Над полем $\Bbbk$ характеристики p равенство $f' = 0$ равносильно тому, что показатели всех мономов, входящих в f с ненулевым коэффициентом, делятся на p. Если $\Bbbk = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$, так что $\alpha^p = \alpha$ для всех $\alpha \in \Bbbk$, последнее условие означает, что многочлен f является чистой p-той степенью: $f(x) = a_n x^{np} + a_{n-1} x^{(n-1)p} + \dots + a_1 x^p + a_0 = a_n^p x^{np} + a_{n-1}^p x^{(n-1)p} + \dots + a_1^p x^p + a_0^p = \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\right)^p$ и, стало быть, приводим. Тем самым, все неприводимые многочлены над полем $\mathbb{F}_p$ сепарабельны. В частности, каждое конечное поле сепарабельно над своим простым подполем.

Упражнение 13.8. Пусть $\Bbbk = \mathbb{F}_p(t)$. Покажите что многочлен $f(x) = x^p - t \in \Bbbk[x]$ неприводим над $\Bbbk$ и несепарабелен.

Пример 13.3 (корни из единицы)

Корни уравнения $x^n = 1$ в произвольном поле $\Bbbk$ образуют конечную мультипликативную подгруппу, которая обозначается $\boldsymbol{\mu}_n(\Bbbk)$ и называется *группой*

---

[1] напомню, что $(a + b)^3 = a^3 + b^3$ в любом поле характеристики 3

корней из единицы поля $\Bbbk$. Как и всякая конечная мультипликативная подгруппа в поле, группа $\boldsymbol{\mu}_n(\Bbbk)$ циклическая. Если её порядок равен n, то говорят, что поле $\Bbbk$ *содержит все* $\sqrt[n]{1}$, и буде это так, образующие группы $\boldsymbol{\mu}_n(\Bbbk) \simeq \mathbb{Z}/(n)$ называются *первообразными корнями* степени n из единицы. Всего имеется $\varphi(n)$ первообразных корней, и если $\zeta \in \Bbbk$ — один из них, все степени ζ^m с $0 \leqslant m \leqslant n-1$ различны. Поэтому следующие три условия эквивалентны:

- поле $\Bbbk$ допускает расширение, содержащее все $\sqrt[n]{1}$
- многочлен $x^n - 1$ сепарабелен над $\Bbbk$
- $\operatorname{char}(\Bbbk)$ не делит n

Отметим, что при выполнении этих условий любой многочлен $f(x) = x^n - a$ с ненулевым $a \in \Bbbk$ сепарабелен, поскольку $f'(x) = nx^{n-1}$ имеет единственный корень нуль, не являющийся корнем f.

Лемма 13.1
Любое конечное расширение $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ можно получить в качестве верхнего этажа башни последовательных примитивных расширений

$$\Bbbk = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{L}_{k-1} \subset \mathbb{L}_k = \mathbb{F}, \qquad (13\text{-}4)$$

в которых $\mathbb{L}_i = \mathbb{L}_{i-1}[\vartheta_i] \simeq \mathbb{L}_{i-1}[x]/(f_i)$, где $f_i \in \mathbb{L}_{i-1}[x]$ — неприводимый над полем $\mathbb{L}_{i-1}$ многочлен.

Доказательство. Пусть поле $\mathbb{L}_i \subset \mathbb{F}$ уже построено. Если $\mathbb{L}_i \neq \mathbb{F}$, возьмём в качестве $f_{i+1} \in \mathbb{L}_i[x]$ минимальный многочлен любого элемента $\vartheta \in \mathbb{F} \smallsetminus \mathbb{L}_i$ над полем $\mathbb{L}_i$ и вложим примитивное расширение $\mathbb{L}_i[x]/(f)$ в поле $\mathbb{F}$ по правилу $x \bmod (f) \mapsto \vartheta$. Обозначим через $\mathbb{L}_{i+1} \supsetneq \mathbb{L}_i$ образ этого вложения. Поскольку степень поля $\mathbb{F}$ над $\mathbb{L}_{i+1}$ строго меньше, чем над $\mathbb{L}_i$, через конечное число шагов оно исчерпается. □

Лемма 13.2
Для любого многочлена $f \in \Bbbk[x]$ существует конечное расширение $\mathbb{F} \supset \Bbbk$, над которым f полностью раскладывается на линейные множители.

Доказательство. Разложим f в $\Bbbk[x]$ на неприводимые множители. Если хоть один из них, назовём его q, не линеен, перейдём от $\Bbbk$ к расширению $\mathbb{K} = \Bbbk[x]/(q) \supset \Bbbk$ и повторим процедуру. Поскольку над $\mathbb{K}$ многочлен f имеет строго большее число линейных множителей, чем над $\Bbbk$, после нескольких таких итераций мы получим требуемое расширение. □

Теорема 13.1 (теорема о примитивном элементе)
Всякое конечное сепарабельное расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ примитивно, т. е. имеет вид $\mathbb{K} = \Bbbk[x]/(f)$, где $f \in \Bbbk[x]$ — неприводимый многочлен степени $\deg \mathbb{K}/\Bbbk$.

Доказательство. Если поле $\Bbbk$ конечно, поле $\mathbb{K}$ тоже конечно, и его ненулевые элементы образуют циклическую мультипликативную группу. Если $\vartheta \in \mathbb{K}$ — образующая этой группы[1], то $\mathbb{K} = \Bbbk[\vartheta]$. Поэтому далее мы будем считать, поле $\Bbbk$ бесконечным. Индукция по длине башни из лем. 13.1 сводит теорему к случаю, когда поле $\mathbb{K} = \Bbbk[\alpha, \beta] \supset \Bbbk[\alpha] \supset \Bbbk$ является башней двух примитивных расширений и как $\Bbbk$-алгебра порождается двумя сепарабельными алгебраическими элементами α, β. Мы собираемся подобрать $t \in \Bbbk^*$ так, чтобы порождённая над $\Bbbk$ элементом $\vartheta = \alpha + t\beta$ подалгебра $\Bbbk[\vartheta] \subset \mathbb{K}$ совпадала со всем полем $\mathbb{K}$. Так как ϑ алгебраичен над $\Bbbk$, алгебра $\Bbbk[\vartheta]$ всегда будет полем. Достаточно добиться, чтобы оно содержало β: тогда и $\alpha = \vartheta - t\beta$ тоже будет в нём лежать. Обозначим через $f_\alpha(x)$ и $f_\beta(x)$ минимальные многочлены элементов α и β над полем $\Bbbk$. Элемент β является общим корнем многочлена $f_\beta(x) \in \Bbbk[x]$ и многочлена $g(x) = f_\alpha(\vartheta - tx)$, коэффициенты которого лежат в зависящем от параметра t поле $\Bbbk[\vartheta]$. Рассмотрим любое поле $\mathbb{F} \supset \mathbb{K}$, над которым f_α, f_β, а с ними и g, полностью разлагаются на линейные множители. Если мы подберём t так, чтобы β был *единственным* общим корнем многочленов f_β и g в поле $\mathbb{F}$, то выразив $(x - \beta) = \textbf{нод}\,\big(f_\beta(x), g(x)\big)$ через многочлены f_β и g по алгоритму Евклида, мы получим искомое представление β в виде рациональной функции от их коэффициентов, лежащих в поле $\Bbbk[\vartheta]$. Пусть $\deg f_\alpha = m$, $\deg f_\beta = \deg g = k$. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ корни многочленов f_α и f_β в $\mathbb{F}$, считая, что $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$. Тогда корни g суть $(\vartheta - \alpha_i)/t = \beta_1 + (\alpha_1 - \alpha_i)/t$, где $1 \leqslant i \leqslant m$. Мы хотим, чтобы $\beta_j \neq \beta_1 + (\alpha_1 - \alpha_i)/t$ для всех i, j кроме $i = j = 1$. В силу сепарабельности α при $i \neq 1$ разности $\alpha_1 - \alpha_i \neq 0$, поэтому каждое из неравенств с $i \neq 1$ запрещает ровно одно значение t. При $i = 1$ запреты выражаются неравенствами $\beta_1 \neq \beta_j$ для всех $j \neq 1$, и автоматически соблюдаются в силу сепарабельности β. Таким образом, нам не подходит всего лишь конечное множество значений t, что и доказывает теорему в случае, когда поле $\Bbbk$ бесконечно. ☐

Следствие 13.1

Если поле $\mathbb{K}$ является сепарабельным алгебраическим расширением поля $\Bbbk$ и степени всех его элементов[2] ограничены, то $\mathbb{K}$ конечно над $\Bbbk$, и $\deg \mathbb{K}/\Bbbk = \max\limits_{\vartheta \in \mathbb{K}} \deg_{\Bbbk} \vartheta$.

Доказательство. Если $\beta \in \mathbb{K}$ не лежит в примитивном расширении $\Bbbk[\alpha] \supset \Bbbk$, порождённом каким-либо другим элементом $\alpha \in \mathbb{K}$, то $\deg \Bbbk[\alpha, \beta]/\Bbbk > \deg_{\Bbbk} \alpha$, и степень примитивного элемента поля $\Bbbk[\alpha, \beta]$ строго больше $\deg \alpha$. Поэтому

---

[1] это рассуждение показывает, что любое конечное поле как алгебра над любым своим подполем всегда порождается одним элементом — образующей своей мультипликативной группы, и хотя сепарабельность не используется при этом явно, в прим. 13.2 мы видели, что все конечные поля сепарабельны над своими простыми подполями

[2] напомним, что *степенью* алгебраического элемента называется степень минимального многочлена этого элемента

подполе в $\mathbb{K}$, порождённое элементом максимальной степени, совпадает со всем $\mathbb{K}$. □

13.2. Продолжение гомоморфизмов. Поскольку у полей нет ненулевых собственных идеалов, все ненулевые гомоморфизмы полей в кольца инъективны. Каждое вложение полей $\varphi : \Bbbk \hookrightarrow \mathbb{F}$ продолжается до вложения колец многочленов $\Bbbk[x] \hookrightarrow \mathbb{F}[x]$, переводящего многочлен $f \in \Bbbk[x]$ в многочлен $f^{\varphi} \in \mathbb{F}[x]$, получающийся из $f \in \Bbbk[x]$ применением φ к каждому коэффициенту f.

Лемма 13.3
Пусть $\mathbb{K} = \Bbbk[x]/(f)$ — примитивное расширение поля $\Bbbk$, а $\varphi : \Bbbk \hookrightarrow \mathbb{F}$ — любое вложение $\Bbbk$ в произвольное поле. Вложения $\widetilde{\varphi} : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{F}$, совпадающие с φ на подполе $\Bbbk \subset \mathbb{K}$, находятся в канонической биекции с корнями многочлена f^{φ} в поле $\mathbb{F}$. В частности, таких вложений не более $\deg \mathbb{K}/\Bbbk$, и их ровно $\deg \mathbb{K}/\Bbbk$, если и только если многочлен f^{φ} полностью раскладывается над $\mathbb{F}$ в произведение $\deg f$ попарно разных линейных множителей.

Доказательство. Каждый элемент $\alpha \in \mathbb{F}$ задаёт гомоморфизм

$$\varphi_{\alpha} : \Bbbk[x] \to \mathbb{F}, \quad g(x) \mapsto g^{\varphi}(\alpha).$$

Если α является корнем многочлена $f^{\varphi} \in \mathbb{F}[x]$, то $f \in \ker \varphi_{\alpha}$, и φ_{α} корректно факторизуется до вложения полей $\widetilde{\varphi}_{\alpha} : \Bbbk[x]/(f) \hookrightarrow \mathbb{F}$, переводящего примитивный элемент $\vartheta = x \bmod (f)$ поля $\mathbb{K}$ в $\alpha \in \mathbb{F}$. При этом разные корни $\alpha \neq \beta$ задают разные вложения $\widetilde{\varphi}_{\alpha} \neq \widetilde{\varphi}_{\beta}$. С другой стороны, любое вложение $\widetilde{\varphi} : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{F}$, совпадающее с φ на подполе $\Bbbk \subset \mathbb{K}$, переводит ϑ в некоторый корень многочлена f^{φ}, т. к. $f^{\varphi}\left(\widetilde{\varphi}(\vartheta)\right) = \widetilde{\varphi}\big(f(\vartheta)\big) = \varphi(0) = 0$. Поэтому $\widetilde{\varphi}$ совпадает с одним из $\widetilde{\varphi}_{\alpha}$. □

Лемма 13.4
Пусть алгебраическое расширение[1] $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ и вложение $\varphi : \Bbbk \hookrightarrow \mathbb{F}$ таковы, что для любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ с минимальным над $\Bbbk$ многочленом $\mu_{\vartheta} \in \Bbbk[x]$ многочлен $\mu_{\vartheta}^{\varphi} \in \mathbb{F}[x]$ полностью раскладывается в $\mathbb{F}[x]$ на линейные множители. Тогда для любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ и любого корня $\xi \in \mathbb{F}$ многочлена $\mu_{\vartheta}^{\varphi}$ существует такое совпадающее с φ на подполе $\Bbbk$ вложение $\widetilde{\varphi} : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{F}$, что $\widetilde{\varphi}(\vartheta) = \xi$.

Доказательство. По лем. 13.3 вложение $\varphi : \Bbbk \hookrightarrow \mathbb{F}$ продолжается до вложения $\varphi_{\xi} : \Bbbk[\vartheta] \hookrightarrow \mathbb{F}$, переводящего ϑ в ξ. Множество всех продолжений $\psi : \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{F}$ отображения φ_{ξ} на всевозможные подполя $\Bbbk[\vartheta] \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ непусто, ибо содержит φ_{ξ}, и частично упорядочено отношением $(\mathbb{L}'', \psi'') \geqslant (\mathbb{L}', \psi')$ когда $\mathbb{L}'' \supseteq \mathbb{L}'$ и $\psi''|_{\mathbb{L}'} = \psi'$.

Упражнение 13.9. Убедитесь, что этот чум удовлетворяет условиям леммы Цорна.

Покажем, что его максимальный элемент $\psi : \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{F}$ имеет область определения $\mathbb{L} = \mathbb{K}$. Если имеется элемент $\vartheta \in \mathbb{K} \smallsetminus \mathbb{L}$, то его минимальный многочлен

---

[1] не обязательно конечное

$\mu_\vartheta \in \Bbbk[x]$ над полем $\Bbbk$ делится в $\mathbb{L}[x]$ на его минимальный многочлен $\mu_{\vartheta,\mathbb{L}}$ над полем $\mathbb{L}$. Коль скоро многочлен μ_ϑ^φ полностью раскладывается в $\mathbb{F}[x]$ на линейные множители, его делитель $\mu_{\vartheta,\mathbb{L}}^\varphi$ тоже обладает этим свойством. Поэтому к примитивному расширению $\mathbb{L} \subset \mathbb{L}[\vartheta]$ применима лем. 13.3, и вложение ψ продолжается на строго большее подполе $\mathbb{L}[\vartheta] = \mathbb{L}[x]/(\mu_{\vartheta,\mathbb{L}})$. □

Предложение 13.1

Если расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ конечно, то вложение полей $\varphi : \Bbbk \hookrightarrow \mathbb{F}$ продолжается до вложения $\psi : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{F}$ не более, чем $[\mathbb{K} : \Bbbk]$ различными способами. Наличие ровно $[\mathbb{K} : \Bbbk]$ продолжений равносильно тому, что расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ сепарабельно и образ $\mu_\vartheta^\varphi \in \mathbb{F}[x]$ минимального над $\Bbbk$ многочлена $\mu_\vartheta \in \Bbbk[x]$ любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ полностью раскладывается в $\mathbb{F}[x]$ на линейные множители.

Доказательство. Разложим $\mathbb{K}$ в башню (13-4) примитивных расширений

$$\Bbbk = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{L}_{k-1} \subset \mathbb{L}_k = \mathbb{F}\,, \tag{13-5}$$

где $\mathbb{L}_i = \mathbb{L}_{i-1}[\vartheta_i] \simeq \mathbb{L}_{i-1}[x]/(f_i)$ и многочлен $f_i \in \mathbb{L}_{i-1}[x]$ является минимальным над $\mathbb{L}_{i-1}$ многочленом элемента $\vartheta_i \in \mathbb{L}_i \smallsetminus \mathbb{L}_{i-1}$. Ограничения продолжающего φ вложения $\psi : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{F}$ на подполя $\mathbb{L}_i \subset \mathbb{K}$ образуют цепочку последовательно продолжающих друг друга вложений $\psi_i : \mathbb{L}_i \hookrightarrow \mathbb{F}$. Так как по лем. 13.3 каждый шаг этой цепочки можно осуществить не более, чем $\deg f_i = [\mathbb{L}_i : \mathbb{L}_{i-1}]$ способами, продолжающих φ вложений ψ имеется не больше, чем $\prod\limits_i [\mathbb{L}_i : \mathbb{L}_{i-1}] = [\mathbb{K} : \Bbbk]$, и их ровно столько, если и только если каждый многочлен f_i^φ имеет $\deg f_i$ различных корней в поле $\mathbb{F}$. Поскольку башню (13-5) можно начать присоединением любого элемента $\vartheta = \vartheta_1 \in \mathbb{K}$, из наличия $[\mathbb{K} : \Bbbk]$ продолжений вытекает, что образ μ_ϑ^φ минимального многочлена $\mu_f = f_1$ любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ раскладывается над $\mathbb{F}$ в произведение $\deg \mu_\vartheta$ различных линейных множителей. В частности, μ_f сепарабелен. Наоборот, если все элементы $\vartheta \in \mathbb{K}$ сепарабельны, а образы μ_ϑ^φ их минимальных многочленов полностью раскладываются над $\mathbb{F}$ на линейные множители, то эти множители будут различны, и в любой цепочке (13-5) каждый многочлен f_i, будучи делителем многочлена μ_{ϑ_i} в кольце $\mathbb{L}_{i-1}[x]$, переведётся вложением $\psi_{i-1} : \mathbb{L}_{i-1} \hookrightarrow \mathbb{F}$ в многочлен, полностью разлагающийся над $\mathbb{F}[x]$ в произведение попарно различных линейных множителей. Поэтому вложение $\varphi : \Bbbk \hookrightarrow \mathbb{F}$ будет продолжаться вдоль такой цепочки ровно $[\mathbb{K} : \Bbbk]$ способами. □

Упражнение 13.10. Пусть в условиях предл. 13.1 поле $\mathbb{K}$ как алгебра над $\Bbbk$ порождается элементами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$. Покажите, что наличие ровно $[\mathbb{K} : \Bbbk]$ продолжений равносильно тому, что каждый элемент ξ_ν сепарабелен и его минимальный многочлен полностью раскладывается в $\mathbb{F}[x]$ на линейные множители.

Предложение 13.2

Если поле $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ алгебраично[1] над $\Bbbk$, то любое вложение $\varphi : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}$, тожде-

---

[1] но не обязательно конечно

ственное на подполе $\Bbbk$, является автоморфизмом поля $\mathbb{K}$.

Доказательство. Достаточно убедиться, что $\varphi(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$. Пусть $\vartheta \in \mathbb{K}$ имеет над $\Bbbk$ минимальный многочлен $f \in \Bbbk[x]$. Вложение φ переводит корни многочлена f в корни многочлена f. Поэтому $\varphi^m\vartheta = \varphi^n\vartheta$ для некоторых $m > n$, где $\varphi^k = \varphi \circ \dots \circ \varphi$ означает k-кратную итерацию вложения $\varphi : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}$. Из инъективности φ вытекает, что $\vartheta = \varphi^{m-n}\vartheta \in \operatorname{im}\varphi$. □

13.3. Поле разложения и алгебраическое замыкание. В этом разделе мы установим существование у любого поля $\Bbbk$ некоторых специальных расширений, единственных с точностью до неканонического изоморфизма, тождественно действующего на $\Bbbk$.

Определение 13.2 (поле разложения)
Поле $\mathbb{L}_f \supset \Bbbk$ называется *полем разложения* многочлена $f \in \Bbbk[x]$, если f полностью раскладывается в $\mathbb{L}_f[x]$ на линейные множители, и для любого расширения $\mathbb{F} \supset \Bbbk$, в котором f полностью раскладывается на линейные множители, существует вложение $\mathbb{L}_f \hookrightarrow \mathbb{F}$, тождественное на подполе $\Bbbk$.

Пример 13.4 (поле разложения кубического многочлена)
В прим. 13.1 на стр. 226 мы видели, что полем разложения неприводимого кубического многочлена $f \in \Bbbk[x]$, дискриминант $D(f)$ которого является квадратом в $\Bbbk$, служит примитивное кубическое расширение $\mathbb{K} = \Bbbk[x]/(f)$, а если $D(f)$ не квадрат в $\Bbbk$, то он не квадрат и в $\mathbb{K}$, и полем разложения f в этом случае служит квадратичное расширение поля $\mathbb{K}$ при помощи $\sqrt{D(f)}$, имеющее над полем $\Bbbk$ степень 6.

Теорема 13.2
У любого многочлена $f \in \Bbbk[x]$ есть поле разложения $\mathbb{L}_f$, и между любыми двумя полями разложения многочлена f имеется тождественный на подполе $\Bbbk$ (но *не* канонический) изоморфизм.

Доказательство. Рассмотрим любое конечное над $\Bbbk$ поле $\mathbb{F} \supset \Bbbk$, над которым f полностью раскладывается на линейные множители[1] и обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{F}$ корни f, а через $\mathbb{L}_f$ — наименьшее подполе в $\mathbb{F}$, содержащее $\Bbbk$ и все эти корни. Поле $\mathbb{L}_f$ раскладывается в башню (13-4) примитивных расширений

$$\Bbbk = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2 \subset \dots \subset \mathbb{L}_{k-1} \subset \mathbb{L}_k = \mathbb{F}, \tag{13-6}$$

на каждом этаже которой присоединяется элемент[2] $\vartheta \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$. Если поле $\mathbb{F} \subset \Bbbk$ таково, что f полностью раскладывается над ним на линейные мно-

---

[1] см. лем. 13.2 на стр. 229

[2] отметим, что число k этажей башни может оказаться меньше, чем число корней m многочлена f, поскольку присоединение очередного корня может привести к автоматическому присоединению ещё нескольких

жители, включение $\Bbbk \subset \mathbb{F}$ продолжается вдоль башни (13-6) до тождественного на $\Bbbk$ вложения $\mathbb{L}_f \hookrightarrow \mathbb{F}$ по лем. 13.4: минимальный многочлен каждого присоединяемого элемента ϑ, будучи делителем многочлена f, полностью раскладываются над $\mathbb{F}$ на линейные множители. Тем самым, $\mathbb{L}_f$ является полем разложения. Для любого другого поля разложения $\mathbb{L}'_f$ имеются вложения $\varphi : \mathbb{L}_f \hookrightarrow \mathbb{L}'_f$ и $\varphi' : \mathbb{L}'_f \hookrightarrow \mathbb{L}_f$. Поскольку композиции $\varphi \circ \varphi'$ и $\varphi' \circ \varphi$ биективны по предл. 13.2, каждое из вложений сюрьективно, т. е. является изоморфизмом. □

Пример 13.5 (классификация конечных полей)
Согласно упр. 13.2 каждое конечное поле $\mathbb{F}$ характеристики p является конечным расширением своего простого подполя $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ и состоит из $q = p^n$ элементов, где $n = [\mathbb{F} : \mathbb{F}_p]$. Так как ненулевые элементы поля $\mathbb{L}$ образуют конечную мультипликативную группу порядка $q - 1$, все они удовлетворяют уравнению $x^{q-1} = 1$. Следовательно, элементы поля $\mathbb{F}$ суть q различных корней многочлена $f(x) = x^{p^n} - x \in \mathbb{F}_p[x]$, сепарабельного, поскольку $f' = 1$. Таким образом, поле $\mathbb{F}$ является полем разложения многочлена f и единственно с точностью до (неканонического) изоморфизма.

Определение 13.3 (алгебраическое замыкание)
Алгебраическое над $\Bbbk$ алгебраически замкнутое поле $\overline{\Bbbk} \supset \Bbbk$ называется *алгебраическим замыканием* поля $\Bbbk$.

Упражнение 13.11. Покажите, что любое конечное расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ допускает тождественное на $\Bbbk$ вложение в любое алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk}$ поля $\Bbbk$.

Теорема 13.3
У каждого поля $\Bbbk$ есть алгебраическое замыкание, и между любыми двумя алгебраическими замыканиями поля $\Bbbk$ имеется тождественный на $\Bbbk$ (но *не* канонический) изоморфизм.

Доказательство. Для любых двух алгебраических замыканий $\mathbb{L}', \mathbb{L}''$ поля $\Bbbk$ включение $\Bbbk \subset \mathbb{L}'$ продолжается до тождественного на $\Bbbk$ вложения $\varphi' : \mathbb{L}' \hookrightarrow \mathbb{L}''$. Симметричным образом имеется тождественное на $\Bbbk$ вложение $\varphi'' : \mathbb{L}'' \hookrightarrow \mathbb{L}'$. По предл. 13.2 композиции $\varphi' \circ \varphi''$ и $\varphi'' \circ \varphi'$ биективны. Поэтому φ' и φ'' тоже биективны, и $\mathbb{L}' \simeq \mathbb{L}''$.

Существование алгебраического замыкания устанавливается в несколько итераций. Для начала допустим, что поле $\Bbbk$ содержится в алгебраически замкнутом поле $\mathbb{F}$. Тогда множество $\overline{\Bbbk}$ алгебраичных над $\Bbbk$ элементов поля $\mathbb{F}$ является полем по предл. 10.2 на стр. 173. Любой многочлен из $\overline{\Bbbk}[x] \subset \mathbb{F}[x]$ имеет корень ϑ в $\mathbb{F}$. Поскольку ϑ алгебраичен над $\overline{\Bbbk}$, он алгебраичен и над $\Bbbk$, а значит, лежит в $\overline{\Bbbk}$. Тем самым, поле $\overline{\Bbbk}$ алгебраически замкнуто и является алгебраическим замыканием поля $\Bbbk$. Остаётся убедиться в наличии какого-нибудь алгебраически замкнутого поля $\mathbb{F} \supset \Bbbk$. Сначала установим существование поля $\mathbb{F}_1 \supset \Bbbk$, над которым каждый многочлен $f \in \Bbbk[x]$ полностью разлагается на линейные множители. Это делается при помощи трансфинитной индукции. Введём на множестве $\Bbbk[x]$ такой линейный порядок, при котором у любого подмножества имеется минимальный элемент[1]. Тогда для каждого $f \in \Bbbk[x]$ имеется поле $\mathbb{K}_f$ над которым f полностью разлагается на линейные множители и которое содержит аналогичные поля $\mathbb{K}_g$ для всех $g < f$, а также поле $\Bbbk$: для наименьшего $f \in \Bbbk[x]$ таковым полем является поле разложения f над $\Bbbk$, и буде h наименьшим многочленом, для которого такого поля нет, возьмём в качестве $\mathbb{K}_h$ поле разложения h над полем $\bigcup_{f<h} \mathbb{K}_f$. Теперь можно положить $\mathbb{F}_1 = \bigcup_{f\in\Bbbk[x]} \mathbb{K}_f$. Повторяя процедуру, строим бесконечную цепочку вложенных полей $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_3 \subset \cdots$, в которой каждый многочлен из $\mathbb{F}_i[x]$ полностью разлагается на множители над $\mathbb{F}_{i+1}$. Поле $\mathbb{L} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_i$ алгебраически замкнуто и содержит $\Bbbk$. □

Следствие 13.2

В любой башне конечных расширений $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2 \subset \mathbb{L}_3$ расширение $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_3$ сепарабельно , если и только если сепарабельны оба расширения $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2$ и $\mathbb{L}_2 \subset \mathbb{L}_3$.

Доказательство. Если поле $\mathbb{L}_3$ сепарабельно над $\mathbb{L}_1$, то сепарабельно и его подполе $\mathbb{L}_2$. Так как минимальный многочлен над $\mathbb{L}_2$ любого элемента $\vartheta \in \mathbb{L}_3$ делит сепарабельный минимальный многочлен элемента ϑ над $\mathbb{L}_1$, то $\mathbb{L}_3$ сепарабельно над $\mathbb{L}_2$. Наоборот, если оба этажа башни $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2 \subset \mathbb{L}_3$ сепарабельны, то согласно предл. 13.1 тождественное вложение $\mathbb{L}_1$ в алгебраическое замыкание $\overline{\mathbb{L}}_1$ допускает ровно $\deg \mathbb{L}_2/\mathbb{L}_1$ продолжений до вложения $\mathbb{L}_2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{L}}_1$, и каждое из них ровно $\deg \mathbb{L}_3/\mathbb{L}_2$ способами продолжается до вложения $\mathbb{L}_3 \hookrightarrow \overline{\mathbb{L}}_1$, так что всего имеется $\deg \mathbb{L}_2/\mathbb{L}_1 \cdot \deg \mathbb{L}_3/\mathbb{L}_2 = \deg \mathbb{L}_3/\mathbb{L}_1$ продолжений тождественного вложения $\mathbb{L}_1 \hookrightarrow \overline{\mathbb{L}}_1$ до вложения $\mathbb{L}_3 \hookrightarrow \overline{\mathbb{L}}_1$, что по предл. 13.1 означает сепарабельность расширения $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_3$. □

13.4. Нормальные расширения. Алгебраическое расширение $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ называется *нормальным*, если любой неприводимый над $\Bbbk$ многочлен $f \in \Bbbk[x]$, имеющий корень в $\mathbb{K}$, полностью разлагается в $\mathbb{K}[x]$ на линейные множители.

Упражнение 13.12. Покажите, что неприводимый над $\Bbbk$ приведённый многочлен $f \in \Bbbk[x]$, имеющий корень ϑ в алгебраическом расширении $\mathbb{K} \supset \Bbbk$, является минимальным многочленом элемента ϑ над $\Bbbk$.

Таким образом, нормальность алгебраического расширения $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ равносильна тому, что минимальный любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ над $\Bbbk$ полностью раскла-

---

[1] существование такого порядка на любом множестве составляет утверждение *теоремы Цермело*, которая равносильна лемме Цорна и аксиоме выбора, см. *Ван Дер Варден*. «Алгебра» (М., «Мир», 1976, стр. 246 – 249) или *П. С. Александров*. «Введение в теорию множеств и общую топологию» (М., «Наука», 1977, стр. 80 – 83.)

дывается в $\mathbb{K}[x]$ на линейные множители.

Упражнение 13.13. Убедитесь, что любое квадратичное расширение нормально.

Лемма 13.5

Фиксируем произвольное алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk}$ поля $\Bbbk$. Алгебраическое расширение $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ нормально тогда и только тогда, когда образы всех тождественных на $\Bbbk$ вложений $\mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$ совпадают друг с другом.

Доказательство. Отождествим $\mathbb{K}$ с подполем $\varphi(\mathbb{K}) \subset \overline{\Bbbk}$ при помощи одного из вложений[1] $\varphi : \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$ и будем далее считать, что $\Bbbk \subset \mathbb{K} \subset \overline{\Bbbk}$. Любое тождественное на $\Bbbk$ вложение $\psi : \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$ переводит каждый элемент $\vartheta \in \mathbb{K}$ в один из корней его минимального над полем $\Bbbk$ многочлена $\mu_\vartheta \in \Bbbk[x]$, и если для каждого $\vartheta \in \mathbb{K}$ все корни μ_ϑ лежат в $\mathbb{K}$, то и $\psi(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$. Наоборот, по лем. 13.4 для каждого корня ξ минимального многочлена $\mu_\vartheta \in \Bbbk[x]$ каждого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ имеется вложение $\psi_{\vartheta,\xi} : \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$ с $\psi_{\vartheta,\xi}(\vartheta) = \xi$, и если образы всех вложений $\psi_{\vartheta,\xi}$ лежат в $\mathbb{K}$, то и все корни всех минимальных многочленов всех элементов поля $\mathbb{K}$ лежат в $\mathbb{K}$. □

Лемма 13.6

Пусть в башне алгебраических расширений $\Bbbk \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ поле $\mathbb{K}$ нормально над $\Bbbk$. Тогда $\mathbb{K}$ нормально и над $\mathbb{L}$, а вот $\mathbb{L}$ нормально над $\Bbbk$, если и только если образ любого тождественного на $\Bbbk$ вложения $\mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{K}$ совпадает с $\mathbb{L}$.

Доказательство. Минимальный над $\mathbb{L}$ многочлен любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ делит в $\mathbb{L}[x]$ минимальный многочлен элемента ϑ над $\Bbbk$, и если в $\mathbb{K}[x]$ второй из них полностью раскладывается на линейные множители, то и первый раскладывается. Поэтому $\mathbb{K}$ нормально над $\mathbb{L}$. Второе утверждение вытекает из лем. 13.5: фиксируем алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk} \supset \mathbb{K} \supset \mathbb{L} \supset \Bbbk$ и заметим, что образы всех вложений $\mathbb{L} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$ лежат в $\mathbb{K}$, поскольку каждое такое вложение продолжается до вложения $\mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$, образ которого совпадает с $\mathbb{K}$. □

Предостережение 13.1. Башня $\mathbb{F} \supset \mathbb{L} \supset \Bbbk$ нормальных расширений $\mathbb{F} \supset \mathbb{L}$ и $\mathbb{L} \supset \Bbbk$ может не быть нормальным расширением. Например, расширение $\mathbb{Q}\left[\sqrt[4]{2}\right] \supset \mathbb{Q}$ представляется башней из двух нормальных по упр. 13.13 квадратичных расширений, не является нормальным: четыре его вложения в алгебраическое замыкание $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$, переводят примитивный элемент $x \bmod (x^4 - 2)$ поля $\mathbb{Q}\left[\sqrt[4]{2}\right] = \mathbb{Q}[x]/(x^4 - 2)$ в четыре разных комплексных корня из 2, и образы этих вложений суть *три* разных подполя в $\mathbb{C}$.

Предложение 13.3

Конечное расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ нормально тогда и только тогда, когда $\mathbb{K}$ является полем разложения некоторого многочлена[2] $f \in \Bbbk[x]$.

---

[1] существующих по лем. 13.4 на стр. 231

[2] не исключено, что приводимого над $\Bbbk$

Доказательство. Пусть нормальное над $\Bbbk$ поле $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ порождается как алгебра над $\Bbbk$ элементами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, и пусть $f_i \in \Bbbk[x]$ — минимальный многочлен элемента α_i над полем $\Bbbk$. Тогда многочлен $f = \prod f_i$ полностью раскладывается над $\mathbb{K}$ на линейные множители, и по упр. 13.10 поле $\mathbb{K}$ вкладывается в любое другое поле, над которым f полностью раскладывается на линейные множители. Следовательно, $\mathbb{K}$ является полем разложения многочлена f. Наоборот, если $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ является полем разложения некоторого многочлена $f \in \Bbbk[x]$, то любое тождественное на подполе $\Bbbk$ вложение $\mathbb{K}$ в фиксированное алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk}$ является изоморфизмом $\mathbb{K}$ на подполе $\Bbbk[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k] \subset \overline{\Bbbk}$, порождённое всеми корнями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ многочлена f в $\overline{\Bbbk}$. Поэтому $\mathbb{K}$ нормально по лем. 13.5. ☐

13.4.1. Композиты. Зафиксируем алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk}$ поля $\Bbbk$. Для любого набора содержащих $\Bbbk$ и содержащихся в $\overline{\Bbbk}$ полей $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \dots, \mathbb{K}_m$ наименьшее подполе в $\overline{\Bbbk}$, которое содержит все поля $\mathbb{K}_\nu$, называется *композитом* этих полей и обозначается $\mathbb{K}_1\mathbb{K}_2 \dots \mathbb{K}_m$. Иначе композит можно описать как пересечение всех подполей в $\overline{\Bbbk}$, содержащих каждое из полей $\mathbb{K}_i$, или как $\Bbbk$-линейную оболочку всевозможных произведений $\vartheta_1\vartheta_2 \dots \vartheta_m$, где $\vartheta_i \in \mathbb{K}_i$ для каждого i.

Предложение 13.4

Пусть поля $\mathbb{F}$ и $\mathbb{K}$ содержат $\Bbbk$ и содержатся в $\overline{\Bbbk}$. Если поле $\mathbb{K}$ нормально (соотв. сепарабельно) над $\Bbbk$, то композит $\mathbb{KF}$ нормален (соотв. сепарабелен) над $\mathbb{F}$.

Доказательство. Тождественные на подполе $\mathbb{F} \subset \mathbb{KF}$ вложения композита $\mathbb{KF}$ в алгебраическое замыкание $\overline{\mathbb{F}} = \overline{\Bbbk}$ биективно соответствуют тождественным на подполе $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ вложениям $\mathbb{K}$ в $\overline{\Bbbk}$: любое вложение $\mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$ по $\mathbb{F}$-линейности продолжается до вложения $\mathbb{KF} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$, и наоборот, каждое $\mathbb{F}$-линейное вложение $\mathbb{KF} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$ ограничивается на подполе $\mathbb{K} \subset \mathbb{KF}$. Поэтому утверждения непосредственно следуют из лем. 13.5 и предл. 13.1. ☐

Теорема 13.4 (нормальное замыкание)

Для любого конечного сепарабельного расширения $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ существует нормальное и сепарабельное над $\Bbbk$ поле $\mathbb{K} \supset \mathbb{F}$, которое вкладывается над $\mathbb{F}$ в любое другое нормальное и сепарабельное над $\Bbbk$ поле $\mathbb{K}' \supset \mathbb{F}$. Все такие поля[1] конечны над $\Bbbk$ и между любыми двумя из них имеется тождественный на подполе $\mathbb{F}$ (но *не* канонический) изоморфизм.

Доказательство. Зафиксируем алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk} \supset \Bbbk$ и возьмём в качестве $\mathbb{K}$ композит образов всех $n = \deg \mathbb{F} / \Bbbk$ различных вложений $\mathbb{F} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$. Тогда $\deg \mathbb{K} / \mathbb{F} \leqslant n$, и $\mathbb{F}$ нормально и сепарабельно как над $\mathbb{F}$ так и над $\Bbbk$, а

---

[1] они называются *нормальными замыканиями* сепарабельного расширения $\mathbb{F} \supset \Bbbk$

любое вложение $\mathbb{F}$ в любое нормальное сепарабельное расширение $\mathbb{K}' \supset \Bbbk$ продолжается до вложения $\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}'$. □

13.5. Автоморфизмы полей и соответствие Галуа. Автоморфизмы поля $\mathbb{K}$, тождественно действующие на его подполе $\Bbbk \subset \mathbb{K}$, называются *автоморфизмами* $\mathbb{K}$ *над* $\Bbbk$. Все такие автоморфизмы образуют группу

$$\mathrm{Aut}_{\Bbbk}\,\mathbb{K} \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : \mathbb{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K} \mid \varphi(t) = t \ \ \forall\, t \in \Bbbk\}\,.$$

Поскольку каждый автоморфизм $\mathbb{K}$ над $\Bbbk$ является продолжением включения $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ на расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$, порядок группы автоморфизмов конечного расширения $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ удовлетворяет неравенству из предл. 13.1 на стр. 232:

$$|\,\mathrm{Aut}_{\Bbbk}\,\mathbb{K}| \leqslant \deg \mathbb{K}/\Bbbk\,.$$

Конечные расширения, для которых это неравенство превращается в равенство, называются *расширениями Галуа*. Из предл. 13.1 вытекает, что конечное расширение является расширением Галуа , если и только если оно нормально и сепарабельно. Группа автоморфизмов расширения Галуа $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ называется *группой Галуа* и обозначается $\mathrm{Gal}\,\mathbb{K}/\Bbbk \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Aut}_{\Bbbk}\,\mathbb{K}$.

Для любой группы G автоморфизмов поля $\mathbb{K}$ элементы $t \in \mathbb{K}$, неподвижные относительно всех преобразований из G, образуют в $\mathbb{K}$ подполе

$$\mathbb{K}^G \overset{\text{def}}{=} \{t \in \mathbb{K} \mid \forall \varphi \in G \ \varphi(t) = t\}\,,$$

которое называется *полем инвариантов группы* G. Отметим, что $\mathbb{K}^G$ содержит простое подполе поля $\mathbb{K}$, изоморфное $\mathbb{Q}$, когда $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$, или $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$, когда $\mathrm{char}(\Bbbk) = p > 0$.

Теорема 13.5

Для любой конечной группы G автоморфизмов произвольного поля $\mathbb{K}$ расширение $\mathbb{K} \supset \mathbb{K}^G$ является расширением Галуа степени $|G|$, и $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}^G}\,\mathbb{K} = G$.

Доказательство. Пусть элементы $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m \in \mathbb{K}$ попарно различны и составляют G-орбиту элемента $\vartheta = \vartheta_1 \in \mathbb{K}$. Многочлен

$$f_\vartheta(x) = (x - \vartheta_1)(x - \vartheta_2) \cdots (x - \vartheta_m) \tag{13-7}$$

имеет коэффициенты в $\mathbb{K}^G$ и неприводим над $\mathbb{K}^G$, поскольку группа G переводит в себя множество корней любого многочлена положительной степени из $\mathbb{K}^G[x]$ и не может транзитивно действовать на корнях произведения двух таких многочленов. Тем самым, f_ϑ является минимальным многочленом элемента ϑ над полем $\mathbb{K}^G$. Так как f_ϑ полностью разлагается в $\mathbb{K}[x]$ в произведение попарно различных линейных множителей, расширение $\mathbb{K}^G \subset \mathbb{K}$ алгебраично, нормально и сепарабельно, и степень над $\mathbb{K}^G$ любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ не выше $|G|$. По сл. 13.1 расширение $\mathbb{K}^G \subset \mathbb{K}$ конечно и $\deg \mathbb{K}/\mathbb{K}^G \leqslant |G|$. С другой стороны, $|G| \leqslant \left|\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}^G}\,\mathbb{K}\right| \leqslant \deg \mathbb{K}/\mathbb{K}^G$. Поэтому все написанные неравенства являются равенствами, и $G = \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}^G}\,\mathbb{K}$. □

Следствие 13.3
Для любых конечного расширения полей $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ и подгруппы $G \subset \operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K}$ равенства $\mathbb{K}^G = \Bbbk$ и $|G| = \deg \mathbb{K}/\Bbbk$ эквивалентны друг другу, и в случае их выполнения $G = \operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K}$.

Доказательство. По теор. 13.5 в башне $\Bbbk \subset \mathbb{K}^G \subset \mathbb{K}$ степень $\deg \mathbb{K}\,/\,\mathbb{K}^G = |G|$, откуда всё и следует. Поучительно, однако, дать другое доказательство, не использующее теорему о примитивном элементе, скрытую в ссылке на сл. 13.1, данной при доказательстве теор. 13.5.

Итак, пусть $|G| = \deg \mathbb{K}/\Bbbk$. Из неравенств $|G| \leqslant \deg \mathbb{K}/\mathbb{K}^G \leqslant \deg \mathbb{K}/\Bbbk$ вытекает, что $\deg \mathbb{K}/\mathbb{K}^G = \deg \mathbb{K}/\Bbbk = \deg \mathbb{K}/\mathbb{K}^G \cdot \deg \mathbb{K}^G/\Bbbk$, откуда $\deg \mathbb{K}^G/\Bbbk = 1$ и $\mathbb{K}^G = \Bbbk$. Наоборот, пусть $\mathbb{K}^G = \Bbbk$. Те же рассуждения, что и в теор. 13.5 показывают, что расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ нормально и сепарабельно. Поэтому тождественное вложение $\Bbbk \hookrightarrow \mathbb{K}$ продолжается до автоморфизма поля $\mathbb{K}$ над $\Bbbk$ ровно $\deg \mathbb{K}/\Bbbk$ способами, и $\left|\operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K}\right| = \deg \mathbb{K}/\Bbbk$. Остаётся показать, что $\operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K} = G$. Поскольку коэффициенты минимального многочлена f_ϑ любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ инвариантны относительно $\operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K}$, каждый автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K}$ переводит ϑ в один из корней многочлена f_ϑ. Согласно (13-7) эти корни составляют орбиту группы G. Таким образом, для каждого $\vartheta \in \mathbb{K}$ и каждого $\varphi \in \operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K}$ существует такой элемент $g \in G$, что $g(\vartheta) = \varphi(\vartheta)$. Поэтому для каждого $\varphi \in \operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K}$ поле $\mathbb{K}$ является объединением по всем $g \in G$ конечного числа подмножеств $V_g = \{\vartheta \in \mathbb{K} \mid g(\vartheta) = \psi(\vartheta)\}$, каждое из которых является подпространством конечномерного векторного пространства $\mathbb{K}$ над полем $\Bbbk$. Если поле $\Bbbk$ бесконечно, то конечномерное пространство над ним не представимо в виде объединения конечного числа собственных подпространств[1], и значит, одно из подпространств V_g совпадает с $\mathbb{K}$, откуда[2] $\varphi = g$. Если поле $\Bbbk$ конечно, то $\mathbb{K}$ тоже конечно и порождается над $\Bbbk$ образующей ϑ циклической мультипликативной группы ненулевых элементов поля $\mathbb{K}$. В этом случае $\varphi = g$ для такого $g \in G$, что $\varphi(\vartheta) = g(\vartheta)$. □

Пример 13.6 (поле инвариантов группы треугольника)
Рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ над произвольным полем $\Bbbk$. Группа треугольника $G = S_3$ действует на ней дробно линейными преобразованиями, переставляющими точки $0 = (0 : 1)$, $1 = (1 : 1)$, $\infty = (1 : 0)$. Тождественное преобразование, циклы $\tau : 0 \mapsto 1 \mapsto \infty \mapsto 0$, $\tau^{-1} : \infty \mapsto 1 \mapsto 0 \mapsto \infty$ и отражения σ_0, σ_1, σ_∞, оставляющие на месте точки 0, 1, ∞ соответственно, преобразуют аффинную координату $t = t_0/t_1$ по формулам:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Id} : t \mapsto t & \tau : t \mapsto 1/(1-t) & \tau^{-1} : t \mapsto (t-1)/t \\ \sigma_0 : t \mapsto t/(t-1) & \sigma_1 : t \mapsto 1/t & \sigma_\infty : t \mapsto 1-t \end{array} \tag{13-8}$$

---

[1] см. упр. 11.12 на стр. 192

[2] полезно сопоставить это рассуждение с тем, что использовалось в теор. 13.1 на стр. 229

которые определяют действие G на поле рациональных функций $\mathbb{K} = \Bbbk(t)$ по правилу $g : \varphi(t) \mapsto \varphi\left(g^{-1}(t)\right)$. Поле инвариантов $\mathbb{K}^G$ этого действия состоит из таких функций $\varphi(t)$, которые не меняются при подстановках (13-8). Согласно теор. 13.5, расширение $\mathbb{K}^G \subset \mathbb{K}$ является расширением Галуа степени 6. Опишем поле $\mathbb{K}^G$ явно. Если рациональная функция $\psi(t) = p(t)/q(t)$ G-инвариантна, то G-инвариантна и любая рациональная функция от ψ. Такие функции образуют подполе $\Bbbk(\psi) \subset \mathbb{K}^G$, и функция $t \in \mathbb{K}$ является корнем многочлена $\psi \cdot q(x) - p(x)$ с коэффициентами в этом подполе. Поэтому $\dim_{\Bbbk(\psi)} \mathbb{K} \leqslant \max(\deg p, \deg q)$. Так как левая часть этого неравенства делится на $\dim_{\mathbb{K}^G} \mathbb{K} = 6$, мы заключаем, что $\max(\deg p, \deg q)$ не меньше 6, и если он равен 6, то $\mathbb{K}^G = \Bbbk(\psi)$. Инвариантную функцию ψ с $\deg p = \deg q = 6$ нетрудно построить из геометрических соображений. Рассмотрим однородный многочлен $f(t_0, t_1)$ без кратных неприводимых множителей, нули которого на $\mathbb{P}_1$ образуют одну G-орбиту. Подстановки (13-8) переводят его в многочлен с тем же множеством нулей, т. е. умножают на константы: $f(g^{-1}t) = \lambda(g) \cdot f(t)$, где $\lambda : G \to \Bbbk^*$, $g \mapsto \lambda(g)$, — мультипликативный гомоморфизм, или — что то же самое — 1-мерный характер группы G, коих имеется ровно два: тривиальный и знаковый. Стало быть, f либо инвариантен относительно всех постановок (13-8), либо сохраняется поворотами и меняет знак при отражениях. Из трёхточечной орбиты $\{0,\ 1,\ \infty\}$ таким образом получается знакопеременный многочлен $p = t_0 t_1 (t_0 - t_1)$, квадрат которого p^2 G-инвариантен, а из двухточечной, образованной собственными векторами поворотов[1], — G-инвариантный многочлен $q = t_0^2 - t_0 t_1 + t_1^2$. Минимальный лоранов моном полной степени нуль[2] по $(t_0 : t_1)$, который можно соорудить из p^2 и q, это

$$\psi(t) = \frac{p^2}{q^3} = \frac{t_0^2 t_1^2 \left(t_0 - t_1\right)^2}{\left(t_0^2 - t_0 t_1 + t_1^2\right)^3} = \frac{t^2 (t-1)^2}{(t^2 - t + 1)^3}$$

т. к. это отношение многочленов степени $\leqslant 6$, поле инвариантов $\mathbb{K}^G = \Bbbk(\psi)$.

Упражнение 13.14. Проверьте прямым вычислением, что $\psi(t)$ не меняется при подстановках (13-8).

Пример 13.7 (автоморфизмы и вложения конечных полей)

Пусть $q = p^n$, где $p \in \mathbb{N}$ — простое. Поскольку расширение $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_q$ нормально и сепарабельно[3], $\left|\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q\right| = [\mathbb{F}_q : \mathbb{F}_p] = n$. Итерации $F_p^0 = \mathrm{Id}$, F_p, F_p^2, … , F_p^{n-1} автоморфизма Фробениуса $F_p : \vartheta \mapsto \vartheta^p$ различны, т. к. равенство $F_p^k = F_p^m$ означает, что все p^n элементов поля $\mathbb{F}_q$ корни многочлена $x^{p^k} - x^{p^m}$, что невоз-

---

[1] отметим, что сами точки могут быть и не определены над полем $\Bbbk$, но *инвариантный* многочлен, корнями которого они являются, лежит в $\Bbbk[t_0, t_1]$

[2] а именно они являются рациональными функциями от $t = t_0/t_1$

[3] см. прим. 13.5 на стр. 234

можно при $k, m < n$. Поэтому $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}_q$ — циклическая группа порядка n, порождённая F_p. Для каждого $k|n$ подгруппа $G_k \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}_q$, порождённая автоморфизмом F_p^k, имеет порядок n/k, а её неподвижные точки это корни многочлена $x^{p^k} - x$. Поэтому $\mathbb{F}_q^{G_k} = \mathbb{F}_{p^k} \subset \mathbb{F}_{p^n}$ является полем разложения многочлена $x^{p^k} - x$, и $G_k \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_{p^k}}\mathbb{F}_{p^n}$. Любое вложение $\mathbb{F}_{p^k} \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^n}$ является изоморфизмом на подполе $\mathbb{F}_q^{G_k}$, ибо переводит элементы $\mathbb{F}_{p^k}$ в корни многочлена $x^{p^k} - x$. Всего таких вложений имеется k, и они образуют одну орбиту группы $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}_{p^k}$.

Упражнение 13.15. Покажите, что в $\mathbb{F}_p[x]$ многочлен $x^{p^n} - x$ является произведением всех неприводимых над $\mathbb{F}_p$ приведённых многочленов, степени которых делят n.

Теорема 13.6 (соответствие Галуа)

Для любого конечного расширения Галуа $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ с группой Галуа $G = \mathrm{Aut}_{\Bbbk}\mathbb{K}$ отображение, сопоставляющее подгруппе $H \subseteq G$ её поле инвариантов $\mathbb{K}^H \subseteq \mathbb{K}$, и отображение, сопоставляющее содержащему $\Bbbk$ подполю $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ подгруппу $\mathrm{Aut}_{\mathbb{L}}\mathbb{K} \subseteq G$, являются взаимно обратными биекциями между множеством подгрупп $H \subseteq G$ и множеством таких полей $\mathbb{L}$, что $\Bbbk \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$. При этом нормальные подгруппы $H \trianglelefteq G$ взаимно однозначно соответствуют содержащимся в $\mathbb{K}$ расширениям Галуа $\mathbb{L} \supset \Bbbk$, и в этом случае $\mathrm{Gal}\,\mathbb{L}/\Bbbk \simeq G/H$.

Доказательство. Для любого такого поля $\mathbb{L}$, что $\Bbbk \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$, расширение $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ нормально по лем. 13.6 и сепарабельно по сл. 13.2. Тем самым, оно является расширением Галуа с группой Галуа $H = \mathrm{Aut}_{\mathbb{L}}\mathbb{K}$, причём $|H| = \deg \mathbb{K}/\mathbb{L}$. Очевидно, что H является подгруппой в G. По сл. 13.3 $K^H = \mathbb{L}$. Отсюда сразу следует утверждение о биекции[1]. Для доказательства второго утверждения рассмотрим действие группы $G = \mathrm{Gal}\,\mathbb{K}/\Bbbk$ на содержащихся в $\mathbb{K}$ подполях $\mathbb{L} \supset \Bbbk$. По уже доказанному, централизатор $C_{\mathbb{L}} \overset{\text{def}}{=} \{g \in G \mid g|_{\mathbb{L}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{L}}\} = \mathrm{Aut}_{\mathbb{L}}\mathbb{K}$ каждого такого поля $\mathbb{L}$ совпадает с подгруппой $H \subseteq G$, соответствующей по Галуа полю $\mathbb{L}$. Поскольку расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ нормально и сепарабельно, любое вложение

$$\varphi : \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{K} \quad (\text{над } \Bbbk) \tag{13-9}$$

продолжается до автоморфизма $g : \mathbb{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}$ над $\Bbbk$, т. е. образ $\varphi(\mathbb{L}) = g(\mathbb{L})$ для некоторого $g \in G$, а его централизатор в G сопряжён подгруппе H:

$$\mathrm{Aut}_{\varphi(\mathbb{L})}\mathbb{K} = C_{\varphi(\mathbb{L})} = C_{g(\mathbb{L})} = gC_{\mathbb{L}}g^{-1} = gHg^{-1}\,.$$

Согласно лем. 13.6 и сл. 13.2 расширение $\mathbb{L} \supset \Bbbk$ всегда сепарабельно, а нормально тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$ для всех вложений (13-9). Последнее равносильно тому, что все подгруппы, сопряжённые с H, совпадают с H,

---

[1] вместо сл. 13.3 для доказательства биективности соответствия Галуа можно было бы воспользоваться теор. 13.5, из которой вытекает, что для любой подгруппы $H \subseteq G$ расширение $\mathbb{K}^H \subseteq \mathbb{K}$ является расширением Галуа с группой Галуа H

т. е. нормальности H. В этом случае группа $\mathrm{Gal}\,\mathbb{K}/\Bbbk$ переводит $\mathbb{L}$ в себя, и возникает сюрьективный гомоморфизм $\mathrm{Gal}\,\mathbb{K}/\Bbbk \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}\,\mathbb{L}/\Bbbk$ с ядром $\mathrm{Gal}\,\mathbb{K}/\mathbb{L}$. Таким образом, $\mathrm{Gal}\,\mathbb{L}/\Bbbk = \big(\mathrm{Gal}\,\mathbb{K}/\Bbbk\big)/\big(\mathrm{Gal}\,\mathbb{K}/\mathbb{L}\big)$. □

Упражнение 13.16. Убедитесь, что соответствие Галуа оборачивает включения:

$$H \subset K \subset \mathrm{Gal}\,\mathbb{K}/\Bbbk \iff \mathbb{K}^H \supset \mathbb{K}^K \supset \Bbbk$$

и что пересечению подгрупп $H_1 \cap H_2$ отвечает композит $\mathbb{K}_1\mathbb{K}_2$ соответствующих им полей $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}^{H_1}$ и $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}^{H_2}$, а пересечению $\mathbb{K}_1 \cap \mathbb{K}_2$ — наименьшая подгруппа в G, содержащая H_1 и H_2.

Задачи для самостоятельного решения к §13

Задача 13.1. Найдите минимальный многочлен числа $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$.

Задача 13.2. Верно ли, что а) $\cos 36° \in \mathbb{Q}(\sin 36°)$ б) $\sin 36° \in \mathbb{Q}(\cos 36°)$?

Задача 13.3. Совпадает ли поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1})$ с полем а) $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ б) $\mathbb{Q}(\sqrt{-1} + \sqrt{2})$?

Задача 13.4. Являются ли поля а) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ б) $\mathbb{Q}(\omega + \sqrt[3]{2})$, где $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, в) поле разложения многочлена $x^7 - 5$ расширениями Галуа поля $\mathbb{Q}$, и если да, то найдите их группы Галуа над $\mathbb{Q}$. Опишите все подполя в каждом из полей (а)–(в), выясните, какие из них являются расширениями Галуа поля $\mathbb{Q}$, и укажите все изоморфные друг другу подполя.

Задача 13.5. Найдите размерность $\mathbb{Q}$-линейной оболочки чисел 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{30}$.

Задача 13.6. Найдите степень над $\mathbb{Q}$ поля разложения многочлена а) $x^4 - 2$ б) $x^p - a$, где $p \in \mathbb{N}$ простое и $a \in \mathbb{Q}$ не является p-той степенью.

Задача 13.7. Покажите, что в любом конечном расширении Галуа $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ с группой $G = \mathrm{Gal}\,\mathbb{F}/\Bbbk$ есть элемент, G-орбита которого является базисом векторного пространства $\mathbb{F}$ над $\Bbbk$.

Задача 13.8. Покажите, что для любого отличного от константы многочлена $f \in \mathbb{Z}[x]$ существует бесконечно много таких простых $p \in \mathbb{N}$, что f имеет корень в поле $\mathbb{F}_p$.

Задача 13.9. Покажите, что в $\mathbb{F}_p[x]$ многочлен $x^{p^n} - x$ является произведением всех неприводимых над $\mathbb{F}_p$ приведённых многочленов, степени которых делят n.

Задача 13.10. Покажите, что в результате присоединения к $\mathbb{F}_p$ всех примитивных корней из единицы всех отличных от p простых степеней получится алгебраическое замыкание $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Задача 13.11. Пусть $p \in \mathbb{N}$ — простое, и $a \in \mathbb{F}_p^*$. Покажите, что многочлен $x^p - x - a$ всегда неприводим в поле $\mathbb{F}_p[x]$, а в поле $\mathbb{F}_{p^n}[x]$ он неприводим , если и только если

$p \nmid n$.

Задача 13.12. При каких n многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ неприводим в $\mathbb{F}_2[x]$?

Задача 13.13. Неприводимы ли над $\mathbb{Q}$ при $n \not\equiv 2 \operatorname{mod}(3)$ многочлены а) $x^n - x + 1$ б) $x^n + x + 1$?

Задача 13.14. Группа диэдра D_n действует на проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ и на поле рациональных функций $\mathbb{C}(x)$ по правилам $\tau : x \mapsto e^{\frac{2\pi i}{n}} x$, $\sigma : x \mapsto x^{-1}$. Опишите поле инвариантов $\mathbb{C}(x)^{D_n}$.

Задача 13.15 (формы Клейна). Отождествим $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ с единичной сферой в $\mathbb{R}^3$, а стандартные карты U_0, U_1 — с проекциями из полюсов $(0, 0, \pm 1)$ на экваториальную плоскость $z = 0$, которая стандартно отождествлена с $\mathbb{C} = \{x + iy\}$. Зафиксируем на $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ однородные координаты $(t_0 : t_1)$, согласованные с этими картами, и обозначим через $\varphi, \psi, \chi \in \mathbb{C}[t_0 : t_1]$ однородные многочлены минимальной степени, корнями которых являются проекции на сферу, соответственно, вершин, середин рёбер и центров граней вписанного в неё правильного многогранника M. Положим[1]

$$\begin{array}{llll}
\alpha_6 \overset{\text{def}}{=} \psi_6 & \beta_8 \overset{\text{def}}{=} \varphi_4\chi_4 & \gamma_{12} \overset{\text{def}}{=} \varphi_4^3 & \text{(для тетраэдра)} \\
\alpha_8 \overset{\text{def}}{=} \varphi_8 & \beta_{12} \overset{\text{def}}{=} \chi_6^2 & \gamma_{18} \overset{\text{def}}{=} \chi_6\psi_{12} & \text{(для куба)} \\
\alpha_{12} \overset{\text{def}}{=} \chi_{12} & \beta_{20} \overset{\text{def}}{=} \varphi_{20} & \gamma_{30} \overset{\text{def}}{=} \psi_{30} & \text{(для додекаэдра)}
\end{array}$$

Группа G_M вращений многогранника M действует на проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ линейными преобразованиями однородных координат $t_0 : t_1$, что даёт действие G_M на кольце многочленов $\mathbb{C}[t_0, t_1]$ и на поле рациональных функций $\mathbb{C}(x)$ от переменной $x = t_0/t_1$. Покажите, что

а) многочлены $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}[t_0, t_1]$ инвариантны относительно G_M и опишите поле инвариантов $\mathbb{C}(x)^{G_M}$

б*) кольцо инвариантов $\mathbb{C}[t_0, t_1]^{G_M} \simeq \mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma]/(f)$, где

$$\begin{array}{ll}
f = \alpha_6^4 + \beta_8^3 + \gamma_{12}^2 & \text{(для тетраэдра)} \\
f = \alpha_8^3\beta_{12} + \beta_{12}^3 + \gamma_{18}^2 & \text{(для куба)} \\
f = \alpha_{12}^5 + \beta_{20}^3 + \gamma_{30}^2 & \text{(для додекаэдра).}
\end{array}$$

Задача 13.16 (теорема Люрота). Для произвольного поля $\Bbbk$ докажите, что каждое отличное от $\Bbbk$ подполе поля рациональных функций $\Bbbk(t)$ изоморфно $\Bbbk(t)$ (т. е. порождается над $\Bbbk$ трансцендентным элементом).

Задача 13.17. Найдите поле инвариантов $\mathbb{C}(x_1, x_2, \dots, x_n)^G$ для а) группы $G = S_n$
б) группы $G \subset S_n$, порождённой циклом длины n
в) группы G, порождённой гомотетией $x_\nu \mapsto e^{2\pi i/n} x_\nu$.

Задача 13.18. Пусть $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$, а её подгруппы $P \subset G$ и $N \subset P$ состоят, соответственно, из замен $t \mapsto at + b$ с $a \neq 0$ и $t \mapsto t + b$. Покажите, чтоа) $\mathbb{F}_q(t)^N = \mathbb{F}_q(t^q - t)$ б) $\mathbb{F}_q(t)^P = \mathbb{F}_q\big((t^q - t)^{q-1}\big)$ в) $\mathbb{F}_q(t)^G = \mathbb{F}_q\left((t^{q^2} - t)^{q+1}/(t^q - t)^{q^2+1}\right)$.

Задача 13.19. Пусть $\operatorname{char} \Bbbk = p$, а элементы x и y алгебраически независимы над $\Bbbk$.

---

[1] нижние индексы у однородных многочленов указывают на их степени

Найдите $[\Bbbk(x,y) : \Bbbk(x^p,y^p)]$ и покажите, что имеется бесконечно много таких полей $\mathbb{F}$, что $\Bbbk(x^p,y^p) \subset \mathbb{F} \subset \Bbbk(x,y)$.

Задача 13.20. Покажите, что целое замыкание нётерова нормального кольца A с полем частных K в любом конечном сепарабельном расширении $L \supset K$ конечно порождено как A-модуль.

Задача 13.21 (норма и след). Характеристический многочлен, след и определитель оператора умножения на элемент $\vartheta \in \mathbb{K}$ в конечном расширении $\mathbb{K} \supset \Bbbk$, обозначаются соответственно через $\chi_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta; x) \in \Bbbk[x]$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta)$ и $N_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta) \in \Bbbk$ и называются *характеристическим многочленом*, *следом* и *нормой* элемента ϑ над полем $\Bbbk$. Покажите, что для расширения Галуа $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ с группой Галуа $G = \mathrm{Aut}_{\Bbbk}\,\mathbb{K}$ выполняются равенства а) $\chi_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta; x) = \prod\limits_{g\in G}(x - g\vartheta)$ б) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta) = \sum\limits_{g\in G} g\vartheta$ в) $N_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta) = \prod\limits_{g\in G} g\vartheta$.

Задача 13.22. В обозначениях предыдущей задачи покажите, что

а) линейная форма следа $\vartheta \mapsto \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta) = 0$ тождественно зануляется , если и только если расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ *чисто несепарабельно* (т. е. каждый элемент $\vartheta \in \mathbb{K} \smallsetminus \Bbbk$ несепарабелен над $\Bbbk$)

б) билинейная форма следа $(\vartheta_1, \vartheta_2) = \mathrm{Sp}_{K/\Bbbk}(\vartheta_1\vartheta_2)$ невырождена, если расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ сепарабельно.

§14. Группы Галуа

14.1. Построения циркулем и линейкой. Отождествим евклидову координатную плоскость $\mathbb{R}^2$ с полем $\mathbb{C}$. Традиционный набор школьных задач на построение показывает, что всякая точка $\zeta \in \mathbb{C}$, лежащая в произвольном подполе $\mathbb{L} \subset \mathbb{C}$, к которому ведёт башня квадратичных расширений

$$\mathbb{Q} = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{L}_{m-1} \subset \mathbb{L}_m = \mathbb{L}\,, \tag{14-1}$$

где $\mathbb{L}_{i+1} = \mathbb{L}_i\big[\sqrt{a_i}\big]$ с $a_i \in \mathbb{L}_i \smallsetminus \mathbb{L}_i^2$, может быть построена циркулем и линейкой, как только на плоскости $\mathbb{C}$ указаны точки 0 и 1.

Упражнение 14.1. Даны точки $0,\ 1,\ a,\ b \in \mathbb{C}$. Циркулем и линейкой постройте в $\mathbb{C}$ точки $a \pm b$, a/b, ab и $\sqrt{a}$.

Верно и обратное: если число $\zeta \in \mathbb{C}$ строится при помощи циркуля и линейки, отправляясь от заданных точек 0 и 1, то оно лежит в некотором поле $\mathbb{L} \subset \mathbb{C}$, к которому ведёт башня квадратичных расширений вида (14-1), причём все поля $\mathbb{L}_i$ этой башни переходят в себя при комплексном сопряжении $z \mapsto \overline{z}$. В самом деле, построение числа ζ распадается на элементарные шаги, каждый из которых состоит в отыскании точки пересечения p одного из трёх типов: или прямых (a,b) и (c,d), или прямой (a,b) и окружности с радиусом $[c,d]$, или двух окружностей с радиусами $[a,b]$ и $[c,d]$, в предположении, что точки $a,\ b,\ c,\ d$ уже построены, а искомая точка пересечения на евклидовой плоскости существует. Положим $\mathbb{L}_1 = \mathbb{Q}\big[\sqrt{-1}\big]$ и допустим по индукции, что числа $a,\ b,\ c,\ d$ лежат в уже построенном и переходящем в себя при комплексном сопряжении поле $\mathbb{L}_i$ из башни (14-1). Тогда число $(a,b) \cap (c,d)$ тоже лежит в $\mathbb{L}_i$, а пары чисел, возникающие в пересечении окружности радиуса $[c,d]$ с прямой (a,b) или с окружностью радиуса $[a,b]$, лежат в поле разложения квадратного трёхчлена $f(t)$, полученного подстановкой $z = a + (b-a)\cdot t$ в уравнение окружности

$$(z-c)(\overline{z}-\overline{c}) = (d-c)(\overline{d}-\overline{c})\,.$$

В случае пересечения с прямой этот трёхчлен имеет корни на вещественной оси, а в случае пересечения с окружностью — на единичной окружности, и подстановка корней трёхчлена f в $a + (b-a)\cdot t$ вместо t даёт искомые точки пересечения p. Так как поле $\mathbb{L}_i$ инвариантно относительно сопряжения, коэффициенты трёхчлена f вещественны и лежат в $\mathbb{L}_i$. Поэтому корни f лежат либо в $\mathbb{L}_i$, либо в квадратичном расширении $\mathbb{L}_{i+1} \supset \mathbb{L}_i$, базис которого над $\mathbb{L}_i$ образован парой вещественных или комплексно сопряжённых корней квадратного трёхчлена f. Тем самым, поле $\mathbb{L}_{i+1} \ni p$ также инвариантно относительно комплексного сопряжения, что воспроизводит предположение индукции.

Предложение 14.1

Конечное расширение Галуа $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ тогда и только тогда содержится в некотором поле $\mathbb{L} \supset \Bbbk$, к которому ведёт башня квадратичных расширений

$$\Bbbk = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{L}_{m-1} \subset \mathbb{L}_m = \mathbb{L}\,, \tag{14-2}$$

в которой $\mathbb{L}_{i+1} = \mathbb{L}_i[\sqrt{a_i}]$ с $a_i \in \mathbb{L}_i \smallsetminus \mathbb{L}_i^2$, когда $[\mathbb{K} : \Bbbk] = 2^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{K}$ содержится в башне (14-2). Из мультипликативности степени вытекает, что $[\mathbb{L} : \Bbbk] = 2^m$, откуда и $[\mathbb{K} : \Bbbk]$ обязано быть степенью двойки. Наоборот, если $[\mathbb{K} : \Bbbk] = \left|\mathrm{Gal}\,\mathbb{K}/\Bbbk\right| = 2^n$, то группа Галуа $G = \mathrm{Gal}\,\mathbb{K}/\Bbbk$ является 2-группой и обладает такой убывающей фильтрацией

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_{n-1} \supset G_n = \{e\} \tag{14-3}$$

подгруппами $G_{i+1} \lhd G_i$, что $G_i/G_{i+1} \simeq \mathbb{Z}/(2)$ при всех i.

Упражнение 14.2. Выведите из это из теоремы Жордана – Гёльдера[1].

Строится такая фильтрация индукцией по n. Центр $C \lhd G$ нетривиален и является абелевой нормальной 2-подгруппой.

Упражнение 14.3. Выведите из теоремы о строении конечно порождённых абелевых групп существование фильтрации $C = C_0 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_{k-1} \supset C_k = \{e\}$ с факторами $C_i/C_{i+1} \simeq \mathbb{Z}/(2)$.

По индукции, на G/C есть фильтрация $G/C = Q_0 \supset Q_1 \supset \cdots \supset Q_{\ell-1} \supset Q_\ell = \{e\}$ с факторами $Q_i/Q_{i+1} \simeq \mathbb{Z}/(2)$. Из фильтраций на C и G/C составляется фильтрация

$$G = CQ_0 \supset CQ_1 \supset \cdots \supset CQ_{\ell-1} \supset C \supset C_1 \supset \cdots \supset C_{k-1} \supset C_k = \{e\}$$

где $CQ_i \subset G$ суть полные прообразы подгрупп $Q_i \subset G/C$ при факторизации $G \twoheadrightarrow G/C$, так что $CQ_i/CQ_{i+1} \simeq \big(CQ_i/C\big)/\big(CQ_{i+1}/C\big) \simeq Q_{i+1}/Q_i \simeq \mathbb{Z}/(2)$, что и даёт фильтрацию (14-3). Соответствие Галуа[2] сопоставляет ей башню квадратичных расширений $\Bbbk = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{L}_{n-1} \subset \mathbb{L}_n = \mathbb{K}$, в которой $\mathbb{L}_i = \mathbb{K}^{G_i}$ и которая ведёт от $\Bbbk$ прямо к полю $\mathbb{K}$. ☐

Теорема 14.1

Комплексный корень неприводимого многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ может быть построен циркулем и линейкой исходя из точек $0,\ 1 \in \mathbb{C}$, если и только если степень его поля разложения над $\mathbb{Q}$ является степенью двойки, и в этом случае все корни многочлена f строятся циркулем и линейкой.

Доказательство. Поле разложения $\mathbb{K}$ многочлена f над $\mathbb{Q}$ является расширением Галуа. При $\deg \mathbb{K}/\mathbb{Q} = 2^m$ его по предл. 14.1 можно получить как верхний этаж $\mathbb{L}$ башни (14-1), и значит все числа из поля $\mathbb{K}$ можно построить циркулем и линейкой в силу упр. 14.1. Наоборот, пусть корень ϑ многочлена f строится

---

[1] см. Теорему 13.1 на стр. 208 лекции 13 из второго семестра первого курса (http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-13.pdf)

[2] см. теор. 13.6 на стр. 241

циркулем и линейкой. Тогда примитивное расширение $\mathbb{Q}[\vartheta] \subset \mathbb{C}$ содержится в некотором расширении $\mathbb{L}$ вида (14-1). Автоморфизм поля $\mathbb{K}$, переводящий корень ϑ в другой корень ϑ' многочлена f переводит подполе $\mathbb{Q}[\vartheta] \subset \mathbb{C}$ в подполе $\mathbb{Q}[\vartheta'] \subset \mathbb{C}$. Получающееся таким образом вложение полей $\psi : \mathbb{Q}[\vartheta] \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\vartheta \mapsto \vartheta'$, продолжается до вложения $\overline{\psi} : \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{C}$, совпадающего с ψ на подполе $\mathbb{Q}[\vartheta] \subset \mathbb{L}$ и переводящего башню (14-1) в башню

$$\mathbb{Q} = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}'_1 \subset \mathbb{L}'_2 \subset \cdots \subset \mathbb{L}'_{m-1} \subset \mathbb{L}'_m = \mathbb{L}', \tag{14-4}$$

в которой $\mathbb{L}'_{i+1} = \mathbb{L}'_i\left[\sqrt{a'_i}\right]$ для некоторого $a'_i = \widetilde{\psi}(a_i) \in \mathbb{L}'_i \smallsetminus \left(\mathbb{L}'_i\right)^2$. Так как $\vartheta' \in \mathbb{L}'$, корень ϑ' тоже строится циркулем и линейкой. Композит $\mathbb{L}\mathbb{L}'$ содержит оба корня ϑ, ϑ' и также является башней квадратичных расширений, поскольку получается последовательным присоединением к $\mathbb{L}$ чисел $a'_1, a'_2, \dots, a'_m$, степени которых над соответствующими подполями $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}\mathbb{L}'_1$, … , $\mathbb{L}\mathbb{L}'_{m-1}$ не превышают двойки. Продолжая по индукции, мы построим башню квадратичных расширений, содержащую все корни многочлена f, а значит и его поле разложения $\mathbb{K}$. По предл. 14.1 степень $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ в этом случае является степенью двойки, что и утверждалось. ☐

Следствие 14.1
Если число $\zeta \in \mathbb{C}$ строится циркулем и линейкой по данным точкам 0 и 1, то оно алгебраично над $\mathbb{Q}$ и его степень над $\mathbb{Q}$ является степенью двойки.

Доказательство. Примитивное расширение $\mathbb{Q}[\zeta]$ содержится в поле разложения минимального многочлена числа ζ, поэтому его степень над $\mathbb{Q}$ делит степень поля разложения минимального многочлена. ☐

Пример 14.1 (трисекция угла, удвоение куба и правильный семиугольник)
Угол $\pi/3$ нельзя разделить на три равные части циркулем и линейкой, поскольку такая возможность влечёт возможность построения циркулем и линейкой числа $\cos(\pi/9)$ — корня многочлена[1] $4x^3 - 3x - 1/2$, не имеющего рациональных корней и, тем самым, неприводимого над $\mathbb{Q}$, а значит, являющегося минимальным многочленом числа $\cos(\pi/9)$. По той же причине циркулем и линейкой нельзя построить сторону куба, объём которого вдвое больше объёма единичного куба: это равносильно построению корня неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена x^3-2. Правильный 7-угольник тоже нельзя построить циркулем и линейкой: такое построение позволяло бы построить первообразный корень 7-й степени $e^{\frac{2\pi i}{7}}$, минимальный многочлен которого[2] $\Phi_7(x) = (x^7-1)/(x-1)$ имеет степень 6.

Упражнение 14.4* (построение Гаусса). Постройте циркулем и линейкой правильный 17-угольник.

---

[1] он получается из соотношения $\cos(3\varphi) = 4\cos\varphi - 3\cos^2\varphi$ при $\varphi = \pi/9$

[2] напомню, что круговой многочлен $\Phi_p(x)$ при простом p неприводим по критерию Эйзенштейна

14.1.1. Влияние побочных иррациональностей. Задачу о построении циркулем и линейкой можно расширить, считая что в начале построения даны не только точки 0, 1, но и некоторые другие точки $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C}$. Поскольку все точки порождённого ими поля $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \subset \mathbb{C}$ строятся циркулем и линейкой, всегда можно считать, что данные точки образуют произвольное[1] подполе $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$. Элементы поля $\mathbb{F}$ называются в этой ситуации *побочными иррациональностями*. Всё сказанное выше сохраняет силу после замены поля $\mathbb{Q}$ полем $\mathbb{F}$. А именно, если даны все точки поля $\mathbb{F}$, то число $\zeta \in \mathbb{C}$ строится циркулем и линейкой, если и только если оно содержится в конечной башне квадратичных расширений поля $\mathbb{F}$, что происходит тогда и только тогда, когда ζ алгебраичен над $\mathbb{F}$ и степень поля разложения минимального многочлена числа ζ над $\mathbb{F}$ является степенью двойки. В частности, что для этого необходимо, чтобы степень самого′ минимального многочлена была степенью двойки.

Упражнение 14.5. Докажите все эти утверждения.

В наиболее общем виде влияние на расширение Галуа взятия его композита с произвольным полем побочных иррациональностей описывается так:

Предложение 14.2 (теорема о побочных иррациональностях) Пусть поля $\mathbb{F}, \mathbb{K} \supset \Bbbk$ содержатся в некотором общем алгебраически замкнутом поле $\mathbb{L}$ и расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ является конечным расширением Галуа. Тогда $\mathbb{F}\mathbb{K} \supset \mathbb{F}$ также является конечным расширением Галуа, и его группа Галуа изоморфна подгруппе $H_{\mathbb{F}\cap\mathbb{K}} \subset \operatorname{Gal} \mathbb{K}/\Bbbk$, отвечающей при соответствии Галуа промежуточному подполю $\Bbbk \subset \mathbb{F} \cap \mathbb{K} \subset \mathbb{K}$.

Доказательство. По предл. 13.3 поле $\mathbb{K}$ является полем разложения некого сепарабельного многочлена $f \in \Bbbk[x]$ и порождается как $\Bbbk$-алгебра его корнями $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n \in \mathbb{L}$. Они же порождают $\mathbb{F}\mathbb{K}$ как алгебру над $\mathbb{F}$. По предл. 13.4 расширение $\mathbb{F}\mathbb{K} \supset \mathbb{F}$ нормально и сепарабельно, т. е. является конечным расширением Галуа. Тем самым, $\mathbb{F}\mathbb{K}$ является полем разложения f над $\mathbb{F}$. Автоморфизмы $\mathbb{K}$ над $\Bbbk$ и $\mathbb{F}\mathbb{K}$ над $\mathbb{F}$ оставляют многочлен f на месте, переводят множество его корней в себя, и каждый автоморфизм однозначно определяется своим действием на корни, что позволяет рассматривать обе группы Галуа $\operatorname{Gal} \mathbb{K}/\Bbbk$ и $\operatorname{Gal} \mathbb{F}\mathbb{K}/\mathbb{F}$ как подгруппы в S_n: группа $\operatorname{Gal} \mathbb{K}/\Bbbk$ состоит из всех перестановок корней $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$, которые продолжаются до автоморфизма порождённой ими $\Bbbk$-алгебры $\mathbb{K} = \Bbbk[\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n]$, а группа $\operatorname{Gal} \mathbb{F}\mathbb{K}/\mathbb{F}$ — из перестановок, продолжающихся до автоморфизма $\mathbb{F}$-алгебры $\mathbb{K} = \Bbbk[\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n]$. Так как $\Bbbk \subset \mathbb{F}$, вторая группа содержится в первой и состоит в точности из всех $\mathbb{F}$-линейных преобразований $g : \Bbbk[\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n] \to \Bbbk[\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n]$ из группы $\operatorname{Gal} \mathbb{K}/\Bbbk$. Но $\mathbb{F}$-линейность оператора g означает в точности, что g оставляет на месте подполе $\mathbb{F} \cap \mathbb{K}$. □

---

[1] возможно, что и не алгебраическое над $\mathbb{Q}$

14.2. Группы многочленов. Согласно предл. 13.3, поле разложения $\mathbb{L}_f$ любого сепарабельного многочлена $f \in \Bbbk[x]$ является расширением Галуа поля $\Bbbk$. Его группа Галуа над $\Bbbk$ обозначается через $\operatorname{Gal} f / \Bbbk$ и называется *группой Галуа многочлена* f над $\Bbbk$. Так как коэффициенты f инвариантны относительно действия группы Галуа, возникает каноническое действие группы $\operatorname{Gal} f / \Bbbk$ на корнях $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$ многочлена f, и поскольку поле $\mathbb{L}_f$ как алгебра над $\Bbbk$ порождается этими корнями, каждый автоморфизм из группы Галуа однозначно определяется своим действием на корнях, т. е. группа Галуа *канонически вложена* в группу перестановок корней. Перестановка корней лежит в группе Галуа тогда и только тогда, когда она сохраняет все полиномиальные соотношения между корнями. Формализуется это следующим образом.

Зафиксируем алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk} \supset \Bbbk$. Поле разложения $\mathbb{L}_f \subset \overline{\Bbbk}$ является образом гомоморфизма вычисления

$$\operatorname{ev}_{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n} : \Bbbk[t_1, t_2, \dots, t_n] \to \overline{\Bbbk}, \quad \psi \mapsto \psi(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n), \tag{14-5}$$

ядро которого $I_{\Bbbk}(\vartheta) \overset{\text{def}}{=} \ker \operatorname{ev}_{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n}$ является идеалом всех полиномиальных соотношений между корнями многочлена f, т. е. состоит из всех многочленов $\psi \in \Bbbk[t_1, t_2, \dots, t_n]$, равных нулю в точке $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n) \in \mathbb{A}^n\left(\overline{\Bbbk}\right)$. Перестановка переменных $g : t_i \mapsto t_{g(i)}$ тогда и только тогда корректно факторизуется до эндоморфизма алгебры $\mathbb{L}_f = \Bbbk[t_1, t_2, \dots, t_n]/I_{\Bbbk}(\vartheta)$, когда она переводит идеал $I_{\Bbbk}(\vartheta)$ себя, т. е. для любого $\psi \in I_{\Bbbk}(\vartheta)$ многочлен

$$\psi^g(t_1, t_2, \dots, t_n) \overset{\text{def}}{=} \psi\left(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}\right)$$

тоже лежит в $I_{\Bbbk}(\vartheta)$. Тем самым, группа Галуа многочлена f имеет вид

$$\operatorname{Gal} f / \Bbbk \simeq \left\{ g \in S_n \mid \forall \psi \in I_{\Bbbk}(\vartheta)\ \psi^g \in I_{\Bbbk}(\vartheta) \right\} \tag{14-6}$$

Именно так изначально и определял группу многочлена сам Галуа.

Замечание 14.1. Задаваемое формулой (14-6) вложение группы Галуа $\operatorname{Gal} f$ в стандартную симметрическую группу $S_n = \operatorname{Aut}\{1, 2, \dots, n\}$ не является каноническим и *зависит* от выбора нумерации корней ϑ_i многочлена f.

Предложение 14.3

Аффинное алгебраическое многообразие $V(I_{\Bbbk}(\vartheta)) \subset \mathbb{A}^n(\overline{\Bbbk})$ представляет собою набор из $m = [\mathbb{L}_f : \Bbbk] = |\operatorname{Gal} f / \Bbbk|$ различных точек $\left(\vartheta_{g(1)}, \vartheta_{g(2)}, \dots, \vartheta_{g(n)}\right)$, $g \in \operatorname{Gal} f / \Bbbk$, образующих одну орбиту действия группы $\operatorname{Gal} f / \Bbbk \subset S_n$ на $\mathbb{A}^n$ перестановками координат.

Доказательство. Обозначим через $e_i(t_1, t_2, \dots, t_n)$ элементарные симметрические многочлены, и пусть $f = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$. Многочлены

$e_i(t_1,t_2,\dots,t_n)-(-1)^i a_i \in I_\Bbbk(\vartheta)$, т. к. $e_i(\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,\vartheta_n) = (-1)^i a_i$ по теореме Виета. Если точка $a = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in V\left(I_\Bbbk(\vartheta)\right)$, то $e_i(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) = (-1)^i a_i$, откуда

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) = f(x) = (x-\vartheta_1)(x-\vartheta_2)\cdots(x-\vartheta_n)\,.$$

Следовательно, $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) = \left(\vartheta_{g(1)},\,\vartheta_{g(2)},\,\dots\,,\,\vartheta_{g(n)}\right)$ для некоторой перестановки $g \in S_n$. Если g не лежит в группе Галуа $\mathrm{Gal}\,f$, то найдётся такой многочлен $\psi \in I_\Bbbk(\vartheta)$, что $\psi^g \notin I_\Bbbk(\vartheta)$, и тогда $\psi\left(\alpha_1,\,\dots\,,\,\alpha_n\right) = \psi\left(\vartheta_{g(1)},\,\dots\,,\,\vartheta_{g(n)}\right) = \psi^g\left(\vartheta_1,\,\dots\,,\,\vartheta_n\right) \neq 0$, что невозможно, ибо $a \in V(I_\Bbbk(\vartheta))$. Таким образом, координаты точки a получаются из координат точки ϑ перестановкой из группы Галуа многочлена f. Наоборот, для любой перестановки $g \in \mathrm{Gal}\,f\,/\,\Bbbk$ и всех $\psi \in I_\Bbbk(\vartheta)$ значение $\psi\left(\vartheta_{g(1)},\,\vartheta_{g(2)},\,\dots\,,\,\vartheta_{g(n)}\right) = \psi^g(\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,\vartheta_n) = 0$, т. к. $\psi^g \in I_\Bbbk(\vartheta)$. Поэтому все точки, получающиеся из ϑ перестановками координат из группы Галуа, лежат в $V(I_\Bbbk(\vartheta))$. ☐

Упражнение 14.6. Покажите, что сепарабельный многочлен $f \in \Bbbk[x]$ неприводим, если и только если группа $\mathrm{Gal}\,f\,/\,\Bbbk$ транзитивно действует на его корнях.

14.2.1. Резольвента Галуа. Рассмотрим однородную линейную форму

$$\psi = \vartheta_1 t_1 + \vartheta_2 t_2 + \cdots + \vartheta_n t_n \in \mathbb{L}_f[t_1,t_2,\dots,t_n]\,, \tag{14-7}$$

где $\mathbb{L}_f \supset \Bbbk$ — поле разложения многочлена $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ с коэффициентами $a_i \in \Bbbk$, а $\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,\vartheta_n$ — корни f в $\mathbb{L}_f$. Многочлен

$$F\left(t_1,\dots,t_n\right) = \prod_{\sigma\in S_n}\psi^\sigma\left(t_1,\dots,t_n\right) = \prod_{\sigma\in S_n}\left(\vartheta_1 t_{\sigma(1)} + \,\cdots\, + \vartheta_n t_{\sigma(n)}\right) \tag{14-8}$$

степени $n!$ называется *резольвентой Галуа* многочлена f. Группируя вместе сомножители, отвечающие перестановкам σ из одного смежного класса hG группы Галуа $G = \mathrm{Gal}\,f\,/\,\Bbbk \subset S_n$, перепишем (14-8) в виде

$$F\left(t_1,\dots,t_n\right) = \prod_{h\in S_n/G} F_h\left(t_1,\dots,t_n\right)\,,\quad \text{где} \tag{14-9}$$

$$\begin{aligned} F_h\left(t_1,\dots,t_n\right) &= \prod_{g\in G}\left(\vartheta_1 t_{hg(1)} + \,\cdots\, + \vartheta_n t_{hg(n)}\right) = \\ &= \prod_{g\in G}\left(\vartheta_{g^{-1}(1)} t_{h(1)} + \,\cdots\, + \vartheta_{g^{-1}(n)} t_{h(n)}\right) = \prod_{g\in G} g\left(\psi^h\right) \end{aligned} \tag{14-10}$$

и $g\left(\psi^h\right)$ означает результат применения к *коэффициентам* линейной формы[1] $\psi^h \in \mathbb{L}_f[t_1,t_2,\dots,t_n]$ автоморфизма $g : \mathbb{L}_f \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}_f$ из группы Галуа $G = \mathrm{Aut}_\Bbbk\,\mathbb{L}_f$. Так как все линейные формы $g\left(\psi^h\right)$ в произведении (14-10) различны и составляют одну орбиту группы Галуа, каждый многочлен F_h имеет коэффициенты в поле $\Bbbk$ и неприводим над $\Bbbk$. Поэтому $F \in \Bbbk[t_1,t_2,\dots,t_n]$, и формула

---

[1] полученной из формы (14-7) перестановкой h переменных $t_1,\dots,t_n$

(14-9) даёт разложение F на неприводимые множители в кольце $\mathbb{k}[t_1, t_2, \dots, t_n]$. Эти неприводимые множители образуют одну орбиту действия симметрической группы S_n на кольце $\mathbb{k}[t_1, t_2, \dots, t_n]$ перестановками координат, а группа Галуа $G = \operatorname{Gal} f$ изоморфна стабилизатору в S_n многочлена F_e и сопряжена стабилизаторам всех остальных многочленов F_h. Суммируем сказанное как

Предложение 14.4

Перестановки переменных $t_1, t_2, \dots, t_n$, оставляющие неизменным какой-либо множитель F_h из разложения резольвенты Галуа на неприводимые множители в кольце $\mathbb{k}[t_1, t_2, \dots, t_n]$, образуют в S_n подгруппу, изоморфную $\operatorname{Gal} f / \mathbb{k}$. □

14.2.2. Редукция коэффициентов. Пусть теперь поле $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ и многочлен

$$f = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{Z}[x]\,.$$

Обозначим через $\overline{f} = x^n + \overline{a}_1 x^{n-1} + \dots + \overline{a}_{n-1} x + \overline{a}_n \in \mathbb{F}_p[x]$, где $\overline{a}_i = a_i \operatorname{mod}(p)$, редукцию f по простому модулю $p \in \mathbb{N}$.

Теорема 14.2

Если многочлен $\overline{f} \in \mathbb{F}_p[x]$ сепарабелен, то имеется вложение групп

$$\operatorname{Gal} \overline{f} / \mathbb{F}_p \hookrightarrow \operatorname{Gal} f / \mathbb{Q}\,.$$

Доказательство. Корни $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$ многочлена f в его поле разложения $\mathbb{L}_f$ целы над $\mathbb{Z}$. Поэтому коэффициенты формы $\psi = \vartheta_1 t_1 + \vartheta_2 t_2 + \dots + \vartheta_n t_n$ из (14-7), а с ними и коэффициенты всех многочленов F_h из разложения (14-9), лежат в кольце целых $\mathcal{O} \subset \mathbb{L}_f$. Так как коэффициенты каждого многочлена F_h инвариантны относительно группы Галуа $\operatorname{Gal} \mathbb{L}_f / \mathbb{k}$, они лежат в $\mathbb{Q} \cap \mathcal{O} = \mathbb{Z}$, и разложение (14-9) имеет место в кольце $\mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]$. Приводя его по модулю p, получаем в кольце $\mathbb{F}_p[t_1, t_2, \dots, t_n]$ равенство

$$\overline{F}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{h \in S_n / G} \overline{F}_h(t_1, t_2, \dots, t_n) \tag{14-11}$$

Обозначим через $\overline{\vartheta}_i = \vartheta_i \operatorname{mod}(p)$ классы корней ϑ_i в $\mathbb{F}_p$-алгебре $A \overset{\text{def}}{=} \mathcal{O} / (p)$. Многочлен $\overline{f}(x) = \prod (x - \overline{\vartheta}_i)$ полностью раскладывается в $A[t]$ на линейные множители, и в силу сепарабельности $\overline{f}$ над $\mathbb{F}_p$ все они различны.

Упражнение 14.7. Убедитесь, что $\mathbb{F}_p$-подалгебра в A, порождённая корнями многочлена $\overline{f}$ является его полем разложения над $\mathbb{F}_p$.

Стало быть, многочлен $\overline{F} \in \mathbb{F}_p[t_1, t_2, \dots, t_n]$ является резольвентой Галуа (14-8) для многочлена $\overline{f} \in \mathbb{F}_p[x]$ над $\mathbb{F}_p$, и по предл. 14.4 группа Галуа $\operatorname{Gal} \overline{f} / \mathbb{F}_p$ изоморфна группе перестановок переменных t_i, сохраняющих один из неприводимых множителей, назовём его P, многочлена $\overline{F}$ в $\mathbb{F}_p[t_1, t_2, \dots, t_n]$. Множитель

P приходит из разложения на неприводимые множители над полем $\mathbb{F}_p$ редукции $\overline{F}_h$ одного из сомножителей F_h произведения (14-9) в кольце $\mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_n]$. Отождествим группу Галуа $\mathrm{Gal}\, f\,/\,\mathbb{Q}$ с группой перестановок из S_n, переводящих F_h в себя. Перестановки, не лежащие в $\mathrm{Gal}\, f/\mathbb{Q}$ переводят F_h в множители $F_{h'} \neq F_h$. Поскольку каждая перестановка из $\mathrm{Gal}\, \overline{f}\,/\,\mathbb{F}_p$ оставляет на месте множитель P многочлена $\overline{F}_h$, она не может переводить F_h ни в какой многочлен $F_{h'} \neq F_h$, и значит, лежит в $\mathrm{Gal}\, f\,/\,\mathbb{Q}$. □

Следствие 14.2

Пусть при редукции по простому модулю p неприводимый приведённый многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ распадается в $\mathbb{F}_p[x]$ в произведение $\overline{f} = q_1 q_2 \dots q_m$ неприводимых над $\mathbb{F}_p$ многочленов $q_1, q_2, \dots, q_m$ степеней $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_m$. Тогда группа Галуа $\mathrm{Gal}\, f\,/\,\mathbb{Q}$ содержит перестановку его корней циклового типа λ.

Доказательство. Поле разложения многочлена $\overline{f}$ над $\mathbb{F}_p$ конечно, и его группа Галуа над $\mathbb{F}_p$ циклическая[1]. Так как она транзитивно действует на корнях каждого из неприводимых многочленов q_i, образующий элемент осуществляет перестановку корней многочлена $\overline{f}$ циклового типа λ. По теор. 14.2 эта перестановка лежит в $\mathrm{Gal}\, f\,/\,\mathbb{Q}$. □

Пример 14.2 (многочлен с группой S_5)

Вычислим группу Галуа многочлена $f(x) = x^5 - x - 1$ над $\mathbb{Q}$. Для этого разложим его на неприводимые множители над $\mathbb{F}_2$ и над $\mathbb{F}_3$. В нетривиальном разложении степень одного из множителей $\leqslant 2$, и по упр. 13.15 произведение всех неприводимых приведённых многочленов степени $\leqslant 2$ в $\mathbb{F}_p[x]$ равно $x^{p^2} - x$. При помощи алгоритма Евклида убеждаемся, что над полем $\mathbb{F}_2$

$$\text{нод}\left(x^5 - x - 1\,,\, x^4 - x\right) = x^2 + x + 1$$

и разложение на неприводимые имеет вид $\overline{f} = (x^2+x+1)\cdot(x^3+x^2+1)$, а над полем $\mathbb{F}_3$ $\text{нод}\left(x^5 - x - 1\,,\, x^9 - x\right) = 1$, и значит $\overline{f}$ неприводим. По сл. 14.2 группа Галуа $\mathrm{Gal}\, f/\mathbb{Q}$ содержит цикл длины 5 и перестановку циклового типа $(3, 2)$, куб которой — транспозиция. Так как цикл максимальной длины и транспозиция порождают всю симметрическую группу, $\mathrm{Gal}\, f\,/\,\mathbb{Q} \simeq S_5$. Из теор. 14.5, которую мы докажем на стр. 257 ниже, вытекает, что корни многочлена $x^5 - x - 1$ не выражаются через рациональные числа при помощи четырёх арифметических операций и извлечения корней произвольных степеней.

14.3. Группы круговых полей. Расширение $\mathbb{Q}[\zeta_n] \supset \mathbb{Q}$, порождённое как алгебра над $\mathbb{Q}$ примитивным корнем n-той степени из единицы

$$\zeta_n \overset{\text{def}}{=} e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}\,,$$

---

[1] см. прим. 13.7 на стр. 240

называется n-тым *круговым*[1] полем. Это поле содержит циклическую мультипликативную группу $\boldsymbol{\mu}_n \subset \mathbb{Q}[\zeta_n]$ корней n-той степени из единицы и является полем разложения сепарабельного многочлена $x^n - 1$. Поэтому круговое поле является расширением Галуа поля $\mathbb{Q}$, а каждый автоморфизм $\sigma \in \operatorname{Gal} \mathbb{Q}[\zeta_n]/\mathbb{Q}$ переводит образующую ζ_n группы $\boldsymbol{\mu}_n$ в образующую группы $\boldsymbol{\mu}_n$, т. е. действует по правилу $\sigma : \zeta_n \mapsto \zeta_n^{m(\sigma)}$, где $m(\sigma) \in (\mathbb{Z}/(n))^*$ обратим в кольце вычетов $\mathbb{Z}/(n)$. Это задаёт гомоморфное вложение группы Галуа кругового поля в мультипликативную группу обратимых элементов кольца вычетов:

$$\operatorname{Gal} \mathbb{Q}[\zeta_n]/\mathbb{Q} \hookrightarrow \big(\mathbb{Z}/(n)\big)^*, \quad \sigma \mapsto m(\sigma). \tag{14-12}$$

Поскольку множество всех первообразных корней степени n из единицы

$$R_n \overset{\text{def}}{=} \{\zeta_n^m \mid \text{нод}(n,m) = 1\} \subset \boldsymbol{\mu}_n$$

переводится группой $\operatorname{Gal} \mathbb{Q}[\zeta_n]/\mathbb{Q}$ в себя, *n-тый круговой многочлен*

$$\Phi_n(x) \overset{\text{def}}{=} \prod_{\xi \in R_n} (x - \xi)$$

инвариантен относительно группы Галуа, и значит, лежит в $\mathbb{Q}[x]$. Будучи полиномами от корней многочлена $x^n - 1$, все коэффициенты многочлена $\Phi_n(x)$ целы над $\mathbb{Z}$, и тем самым $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Так, $\Phi_2(x) = x+1$, $\Phi_3(x) = (x-\omega)(x-\omega^2) = x^2+x+1$, $\Phi_4(x) = (x-i)(x+i) = x^2+1$, $\Phi_5(x) = (x^5-1)/(x-1) = x^4+x^3+x^2+x+1$, $\Phi_6(x) = (z-\zeta_6)(x-\zeta_6^{-1}) = x^2-x+1$ и т. д. Круговое поле $\mathbb{Q}[\zeta_n]$ является полем разложения кругового многочлена Φ_n и $\operatorname{Gal} \mathbb{Q}[\zeta_n]/\mathbb{Q} = \operatorname{Gal} \Phi_n$.

14.3.1. Элементы Фробениуса. При простом $p \nmid n$ многочлен $x^n - 1$ сепарабелен над $\mathbb{F}_p$. Редукция $\overline{\Phi}_n$ многочлена Φ_n по модулю p тоже сепарабельна над $\mathbb{F}_p$, т. к. $\overline{\Phi}_n$ делит $x^n - 1$. Поэтому сопоставление $\xi \mapsto \overline{\xi} = \xi \operatorname{mod}(p)$ задаёт биекцию между множеством комплексных первообразных корней

$$R_n \subset \mathcal{O} \subset \mathbb{Q}[\zeta_n] \subset \mathbb{C}$$

и корнями многочлена $\overline{\Phi}_n$ в его поле разложения над $\mathbb{F}_p$, которое порождается как алгебра над $\mathbb{F}_p$ классами $\overline{\xi} \in \mathcal{O}/(p)$ комплексных коней ξ в фактор алгебре кольца целых $\mathcal{O}$ кругового поля $\mathbb{Q}[\zeta_n]$ по главному идеалу (p) и является конечным расширением Галуа поля $\mathbb{F}_p$ с циклической группой Галуа, порождённой автоморфизмом Фробениуса[2] $\overline{\xi} \mapsto \overline{\xi}^p$. По теор. 14.2 в группе Галуа $\operatorname{Gal} \Phi_n/\mathbb{Q}$ имеется такая перестановка комплексных первообразных корней $\sigma \in \operatorname{Aut} R_n$, что $\overline{\sigma(\xi)} = \overline{\xi}^p$. Мы заключаем, что автоморфизм мультипликативной группы $\boldsymbol{\mu}_n \subset \mathbb{Q}[\zeta_n]$, заданный правилом

$$F_p : \boldsymbol{\mu}_n \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mu}_n, \quad \xi \mapsto \xi^p, \tag{14-13}$$

---

[1] или *циклотомическим*

[2] см. прим. 13.7 на стр. 240 и доказательство сл. 14.2 на стр. 252

продолжается до автоморфизма кругового поля $\mathbb{Q}[\zeta_n]$ над $\mathbb{Q}$. Он называется *p-элементом Фробениуса* в группе Галуа кругового поля. Таким образом, для всех простых $p \nmid n$ автоморфизмы Фробениуса из групп Галуа $\operatorname{Gal}\overline{\Phi}_n/\mathbb{F}_p$ *канонически* вложены в группу Галуа $\operatorname{Gal}\Phi_n/\mathbb{Q}$ кругового поля.

Применяя к корню $\zeta_n \in R_n$ автоморфизмы F_p со всевозможными простыми $p \nmid n$, а также их итерации, можно получить все первообразные корни: любой из них имеет вид ζ_n^m для некоторого $m = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$, взаимно простого с n, и равен $F_{p_1}^{m_1} F_{p_2}^{m_2} \cdots F_{p_k}^{m_k} \zeta_n$. Следовательно, группа Галуа кругового многочлена транзитивно действует на его корнях.

Предложение 14.5

Вложение (14-12) является изоморфизмом групп, т. е. $\operatorname{Gal}\Phi_n \simeq \big(\mathbb{Z}/(n)\big)^*$. В частности, $[\mathbb{Q}[\zeta_n] : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$, где φ — функция Эйлера.

Доказательство. Поскольку группа $\operatorname{Gal}\Phi_n$ транзитивно действует на корнях, $\left|\operatorname{Gal}\Phi_n\right| \geqslant \deg\Phi_n = \varphi(n) = \left|\big(\mathbb{Z}/(n)\big)^*\right|$. □

Предложение 14.6

Многочлен Φ_n неприводим над $\mathbb{Q}$ и является минимальным многочленом первообразного корня ζ_n над $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Если бы Φ_n был приводим, группа Галуа переводила бы множество корней каждого неприводимого множителя в себя и не могла бы транзитивно действовать на корнях Φ_n. □

Пример 14.3 (Гауссова сумма)

При простом $p > 2$ всякая подгруппа $H \subset \mathbb{F}_p^*$ индекса 2 содержит все ненулевые квадраты поля $\mathbb{F}_p$, поскольку $\xi^2 H = \xi H \cdot \xi H = H$ в $\mathbb{F}_p^*/H \simeq \mathbb{Z}/(2)$. Поэтому такая подгруппа единственна и равна группе ненулевых квадратов. В частности, группа Галуа кругового поля содержит ровно одну подгуппу индекса 2, и она переводится изоморфизмом $m : \operatorname{Gal}\Phi_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_p^*$ из форм. (14-12) на стр. 253 в подгруппу ненулевых квадратов в $\mathbb{F}_p^*$. Согласно соответствию Галуа это означает, что круговое поле $\mathbb{Q}[\zeta_p]$ содержит ровно одно квадратичное расширение $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$, и оно порождается над $\mathbb{Q}$ числом[1]

$$\vartheta = \sum_{\substack{\sigma \in \operatorname{Gal}\Phi_n : \\ m(\sigma) \in {\mathbb{F}_p^*}^2}} \sigma(\zeta_p) - \sum_{\substack{\sigma \in \operatorname{Gal}\Phi_n : \\ m(\sigma) \notin {\mathbb{F}_p^*}^2}} \sigma(\zeta_p) = \sum_{m=1}^{p-1} \left[\frac{m}{p}\right] \cdot \zeta_p^m , \tag{14-14}$$

---

[1] напомню, что *символ Лежандра – Якоби* $\left[\dfrac{m}{p}\right] \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{если } m \operatorname{mod}(p) = 0 \\ 1 & \text{если } m \operatorname{mod}(p) \in \mathbb{F}_p^2 \smallsetminus 0 \\ -1 & \text{если } m \operatorname{mod}(p) \notin \mathbb{F}_p^2 \end{cases}$

которое инвариантно относительно подгруппы $\mathbb{F}_p^{*\,2} \subset \mathrm{Gal}\,\Phi_n$ и меняет знак под действием всех остальных автоморфизмов кругового поля.

Упражнение 14.8. Покажите, что $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p} \in \mathbb{Q}[\vartheta]$ для всех простых $p > 2$, и явно выразите этот квадратный корень через корни p-той степени из единицы.

14.4. Циклические расширения. Элемент ζ произвольного поля $\Bbbk$ называется *примитивным*[1] корнем степени m из единицы, если $\zeta^m = 1$ и $\zeta^i \neq 1$ при всех $0 < i < m$. Если поле $\Bbbk$ содержит такой корень ζ, то циклическая мультипликативная группа корней уравнения $x^m = 1$ в поле $\Bbbk$ имеет порядок m и порождается элементом ζ, а множество образующих этой группы есть множество всех примитивных корней из единицы степени m. В частности, многочлен $x^m - 1$ в этом случае сепарабелен. Поэтому m не делится на $\mathrm{char}(\Bbbk)$, и все многочлены $x^d - a \in \Bbbk[x]$ степени $d|m$ тоже сепарабельны. Мы продолжим обозначать циклическую мультипликативную группу корней m-той степени из единицы через $\boldsymbol{\mu}_m \subset \Bbbk^*$, и обозначим через $\Bbbk^{*s}$ мультипликативную группу s-тых степеней ненулевых элементов поля $\Bbbk$.

Теорема 14.3

Если в поле $\Bbbk$ есть примитивный корень степени m из единицы и $a \in \Bbbk^*$, то разложение двучлена $f(x) = x^m - a$ на неприводимые множители в $\Bbbk[x]$ всегда имеет вид $f = g_1 g_2 \dots g_k$, где $g_i(x) = x^n - b_i$ и $kn = m$, при этом группа $\mathrm{Gal}\,f/\Bbbk$ циклическая порядка n, а свободный член a двучлена f лежит в $\Bbbk^{*k}$. В частности, f неприводим $\iff n = m \iff$ $\Bbbk$-алгебра $\Bbbk[x]/(f)$ является полем разложения f.

Доказательство. Фиксируем алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk}$ и какой-нибудь корень $\alpha \in \overline{\Bbbk}$ двучлена f. Корни f в $\overline{\Bbbk}$ находится в биекции с корнями из единицы и имеют вид $\xi\alpha$, где ξ пробегает $\boldsymbol{\mu}_m$. Если перестановка $g \in \mathrm{Gal}\,f/\Bbbk$ переводит α в $g(\alpha) = \zeta_g \cdot \alpha$, то она действует на остальные корни f умножением на ζ_g: $g(\xi\alpha) = \xi g(\alpha) = \xi\zeta_g\alpha = \zeta_g\xi\alpha$. Тем самым, отображение

$$\mathrm{Gal}\,f/\Bbbk \hookrightarrow \boldsymbol{\mu}_m\,, \quad g \mapsto \zeta_g = g(\alpha)/\alpha\,, \tag{14-15}$$

является инъективным гомоморфизмом групп. Так как группа $\boldsymbol{\mu}_m$ циклическая, образ $G \subset \boldsymbol{\mu}_m$ гомоморфизма (14-15) является циклической группой порядка $n|m$ и порождается некоторым примитивным корнем ζ степени n из единицы. Смежные классы $G\xi \subset \boldsymbol{\mu}_m$ подгруппы G биективно соответствуют орбитам действия группы Галуа на корнях f, и каждой такой орбите отвечает неприводимый множитель $f_\xi(x) \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{\nu=0}^{n-1}\left(x - \zeta^\nu\xi\alpha\right)$ двучлена f в $\Bbbk[x]$.

Упражнение 14.9. Покажите, что $f_\xi(x) = x^n - \xi^n\alpha^n$.

---

[1] или *первообразным*

Так как $f_\xi \in \mathbb{k}[x]$, элементы $b_\xi = \xi^n \alpha^n$, а с ними и $c = \alpha^n$, лежат в $\mathbb{k}$, и разложение f на неприводимые множители в $\mathbb{k}[x]$ имеет вид $x^m - a = \prod\limits_{\xi \in \boldsymbol{\mu}_m/G} \left(x^n - b_\xi\right)$, а $a = \alpha^m = c^k \in \mathbb{k}^{*k}$, где $k = m/n$. В частности, f неприводим , если и только если $n = m$, и в этом случае вложение (14-15) является изоморфизмом, а алгебра $\mathbb{k}[x]\,/\,(f)$ — полем, причём вместе с корнем $\alpha = x \,\mathrm{mod}(f)$ она содержит и все остальные m корней $\xi\alpha$ двучлена f. □

Упражнение 14.10. В условиях теор. 14.3 покажите, что совпадение в $\overline{\mathbb{k}}$ полей разложения двучленов $x^m - a$ и $x^m - b$ равносильно равенству $a = b^r c^m$ для неких $c \in \mathbb{k}$ и целого r, взаимно простого с m.

Определение 14.1

Расширение Галуа $\mathbb{K} \supset \mathbb{k}$ называется *циклическим степени* m, если $\mathrm{Gal}\,\mathbb{K}\,/\,\mathbb{k}$ является циклической группой m-того порядка.

Теорема 14.4

Всякое циклическое расширение степени m любого поля $\mathbb{k}$, содержащего первообразный корень m-той степени из единицы, является полем разложения неприводимого двучлена $x^m - a$ с $a \in \mathbb{k}$.

Доказательство. Пусть группа Галуа $G = \mathrm{Gal}\,\mathbb{K}\,/\,\mathbb{k}$ циклического расширения $\mathbb{K} \subset \mathbb{k}$ порождена автоморфизмом $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{k}}\,\mathbb{K}$ порядка m. Фиксируем какой-нибудь первообразный корень m-той степени из единицы $\zeta \in \mathbb{k}$ и рассмотрим $\mathbb{k}$-линейный эндоморфизм поля $\mathbb{K}$

$$L_{\zeta,\sigma} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{p-1} \zeta^i \sigma^i \,:\, \vartheta \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} \zeta^i \sigma^i(\vartheta)\,.$$

Поскольку автоморфизмы $\sigma^0 = \mathrm{Id}$, σ, σ^2, … , σ^{m-1} являются различными мультипликативными характерами[1] абелевой группы $\mathbb{K}^*$ над полем $\mathbb{K}$, они линейно независимы в пространстве функций[2] $\mathbb{K}^* \to \mathbb{K}$, и значит, эндоморфизм $L_{\zeta,\sigma}$ ненулевой.

Упражнение 14.11. Убедитесь, что $\sigma L_{\zeta,\sigma} = \zeta^{-1} L_{\zeta,\sigma}$.

Равенство $\left(\sigma - \zeta^{-1}\right) L_{\zeta,\sigma} = 0$ означает, что образ оператора $L_{\zeta,\sigma}$ состоит из собственных векторов оператора σ с собственным значением ζ^{-1}. Тем самым, в $\mathbb{K}$ имеется такое ненулевое α, что $\sigma(\alpha) = \zeta^{-1}\alpha$. Галуа-орбита числа α состоит из m различных чисел $\sigma^i(\alpha) = \zeta^{-i}\alpha$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, являющихся корнями двучлена $f(x) = x^m - \alpha^m$, свободный член которого $a = \alpha^m$ лежит в $\mathbb{k}$, ибо он инвариантен относительно группы Галуа: $\sigma(\alpha^m) = \sigma(\alpha)^m = \zeta^{-m}\alpha^m = \alpha^m$. Поскольку корни f образуют одну орбиту группы Галуа, двучлен f неприводим, а

---

[1] см. n° 5.4.1 на стр. 85

[2] см. уже цитированный n° 5.4.1 на стр. 85, в частности упр. 5.13

так как все корни лежат в $\Bbbk[\alpha]$, примитивное расширение $\Bbbk[\alpha]$ является полем разложения f. Поскольку $\Bbbk[\alpha] \subset \mathbb{K}$ и степень обоих полей над $\Bbbk$ равна m, они совпадают друг с другом. □

Упражнение 14.12* (изоморфизм Куммера). Для каждого элемента $a \in \Bbbk^*/\Bbbk^{*m}$ зафиксируем некоторый корень $\alpha = \sqrt[m]{a} \in \overline{\Bbbk}$ и сопоставим каждому автоморфизму $\sigma \in \operatorname{Gal} \overline{\Bbbk}/\Bbbk$ корень из единицы $\zeta_\sigma = \sigma(\alpha)/\alpha \in \boldsymbol{\mu}_m$. Покажите, что таким образом корректно задаётся изоморфизм групп $\Bbbk^*/\Bbbk^{*m} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}\left(\operatorname{Gal} \overline{\Bbbk}/\Bbbk, \boldsymbol{\mu}_m\right)$.

14.5. Разрешимые расширения. Группа G называется *разрешимой*, если все её композиционные факторы Жордана – Гёльдера[1] суть простые циклические группы. Расширение Галуа $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ поля $\Bbbk$ характеристики нуль называется *разрешимым*, если разрешима его группа Галуа $\operatorname{Gal} \mathbb{K} / \Bbbk$. Из установленных во втором семестре первого курса свойств композиционных рядов вытекает, что разрешимость группы G равносильна существованию убывающей фильтрации $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_{m-1} \supset G_m = \{e\}$ подгруппами $G_{i+1} \lhd G_i$ с абелевыми факторами G_i / G_{i+1}.

Упражнение 14.13. Убедитесь, что любая подгруппа и любая фактор группа разрешимой группы G разрешимы, и наоборот, разрешимость нормальной подгруппы $H \lhd G$ и фактора G/H влекут разрешимость G.

Теорема 14.5

Пусть[2] $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$ и один из корней неприводимого многочлена $f \in \Bbbk[x]$ выражается через элементы поля $\Bbbk$ посредством четырёх арифметических действий и извлечений корней произвольных степеней. Тогда группа $\operatorname{Gal} f/\Bbbk$ разрешима, и все корни f выражаются в радикалах через элементы поля $\Bbbk$.

Доказательство. Зафиксируем алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk} \supset \Bbbk$. Если корень $\alpha \in \overline{\Bbbk}$ многочлена f выражается в радикалах, то он лежит в подполе $\mathbb{L} \subset \overline{\Bbbk}$, к которому ведёт башня примитивных расширений

$$\Bbbk = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{L}_m = \mathbb{L} \tag{14-16}$$

вида $\mathbb{L}_{i+1} = \mathbb{L}_i[x]/(x^{k_i} - a_i)$, где $a_i \in \mathbb{L}_i$. Для доказательства теоремы достаточно вложить поле $\mathbb{L}$ в поле $\mathbb{L}' \supset \Bbbk$, являющееся расширением Галуа с разрешимой группой $\operatorname{Gal} \mathbb{L}'/\Bbbk$. Тогда поле разложения $\mathbb{K}$ многочлена f будет нормальным над $\Bbbk$ подполем в $\mathbb{L}'$, и его группа Галуа $\operatorname{Gal} \mathbb{K}/\Bbbk = (\operatorname{Gal} \mathbb{L}'/\Bbbk)/(\operatorname{Gal} \mathbb{L}'/\mathbb{K})$, будучи фактором разрешимой группы, тоже будет разрешима. Для построения $\mathbb{L}'$ расширим по индукции башню (14-16) до башни

$$\Bbbk \subset \mathbb{L}'_0 \subset \mathbb{L}'_1 \subset \mathbb{L}'_2 \subset \cdots \subset \mathbb{L}'_m = \mathbb{L}', \tag{14-17}$$

---

[1] см. раздел 13.2 из лекции 13, прочитанной во втором семестре на первом курсе (http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-13.pdf)

[2] требование $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$ можно ослабить до требования, чтобы $\operatorname{char}(\Bbbk)$ не делила ни один из показателей радикалов, участвующих в формуле для вычисления корня — приводимое ниже доказательство в этом случае тоже работает

в которой $\mathbb{L}_i \subset \mathbb{L}'_i$ и каждое $\mathbb{L}'_i$ является расширением Галуа поля $\Bbbk$. В качестве $\mathbb{L}'_0$ возьмём поле разложения многочлена $x^N - 1$ с таким N, чтобы в $\mathbb{L}'_0$ содержались первообразные корни из единицы всех степеней k_i, являющихся показателями радикалов в формуле для α. Если $\mathbb{L}'_i$ уже построено, то в качестве $\mathbb{L}'_{i+1}$ возьмём поле разложения многочлена $\prod\limits_{\sigma\in \mathrm{Gal}\, \mathbb{L}'_i/\Bbbk} \big(x^{k_i} - \sigma(a_i)\big)$ над полем $\mathbb{L}'_i$. Так как коэффициенты этого многочлена инвариантны относительно группы $\mathrm{Gal}\, \mathbb{L}'_i / \Bbbk$, они лежат в $\Bbbk$, и $\mathbb{L}'_{i+1} \supset \Bbbk$ является расширением Галуа, содержащим поле $\mathbb{L}_{i+1} = \mathbb{L}_i[x]/(x^{k_i} - a_i)$. Отметим, что поле $\mathbb{L}'_{i+1}$ получается из поля $\mathbb{L}'_i$ цепочкой последовательных переходов к полям разложения двучленов вида $x^n - a$ с $a \in \mathbb{L}'_i$. По теор. 14.3 все такие переходы являются расширениями Галуа с циклическими группами Галуа. Согласно предл. 14.5 и предл. 13.4 первый шаг нашего построения — переход от $\Bbbk$ к $\mathbb{L}'_0$ — также является расширением Галуа с абелевой группой Галуа. Таким образом, поле $\mathbb{L}'$ можно получить из $\Bbbk$ последовательными абелевым расширением Галуа, и его группа $\mathrm{Gal}\, \mathbb{L}' / \Bbbk$ разрешима. □

Пример 14.4 (общее уравнение степени n и теорема Абеля) Зафиксируем произвольное поле $\mathbb{F}$. Многочлен

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{F}(a_1, a_2, \dots, a_n)[x]\,, \tag{14-18}$$

рассматриваемый над полем $\Bbbk = \mathbb{F}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ рациональных функций от n алгебраически независимых переменных $a_1, a_2, \dots, a_n$ с коэффициентами в $\mathbb{F}$, называется *общим*, поскольку придавая его коэффициентам конкретные значения из поля $\mathbb{F}$, можно получить любой «конкретный» многочлен $f \in \mathbb{F}[x]$. В частности, если имеется формула, выражающая корни общего многочлена (14-18) через элементы поля $\Bbbk = \mathbb{F}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ в радикалах[1], то она позволяет единообразно решить в радикалах все уравнения n-той степени с коэффициентами из $\mathbb{F}$. Из прим. 14.2 на стр. 252 следует, что над полем $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ такой формулы нет. Чтобы проанализировать наличие такой формулы над произвольным полем $\mathbb{F}$, вычислим группу $\mathrm{Gal}\, f / \Bbbk$. Обозначим через $t_1, t_2, \dots, t_n$ корни f в его поле разложения $\mathbb{K} \supset \Bbbk$. Поскольку $\mathbb{K}$ алгебраично над $\Bbbk$, его базис трансцендентности над $\mathbb{F}$ согласно сл. 10.4 можно выбрать из элементов $t_1, t_2, \dots, t_n$, порождающих $\mathbb{K}$ как $\mathbb{F}$-алгебру[2], а т. к. $\mathrm{tr\,deg}_{\mathbb{F}}\, \mathbb{K} \geqslant n$, весь набор $t_1, t_2, \dots, t_n$ и является таким базисом. Поэтому $t_1, t_2, \dots, t_n$ алгебраически независимы над $\mathbb{F}$ и, в частности, различны. Значит, многочлен f сепарабелен, а $\mathbb{K} = \mathbb{F}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ является расширением Галуа поля $\Bbbk = \mathbb{F}(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Поскольку любая перестановка независимых переменных продолжается до автоморфизма поля рациональных функций, $\mathrm{Gal}\, \mathbb{K} / \Bbbk = S_n$, $[\mathbb{K} : \Bbbk] = n!$ и

---

[1] как это делает, например, школьная формула $x_\pm = \left(p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)/2$ для решения «общего» квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$

[2] по теореме Виета a_i являются полиномами от t_i

$\mathbb{F}(t_1, t_2, \dots, t_n)^{S_n} = \mathbb{F}(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Так как подгруппа $A_n \lhd S_n$ проста, группа S_n не разрешима, а значит, общее уравнение степени $n \geqslant 5$ неразрешимо в радикалах ни над каким полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики. Этот результат известен как *теорема Абеля*[1].

> Упражнение 14.14. Покажите, что поле инвариантов $\mathbb{K}^{A_n}$ подгруппы $A_n \lhd S_n$ является квадратичным расширением поля $\Bbbk$ элементом $\sqrt{D(f)} = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (t_i - t_j)$.

Замечание 14.2. Отсутствие «общей» формулы для решения в радикалах полиномиального уравнения n-той степени не запрещает существования специальных «конкетных» уравнений, корни которых можно выразить в радикалах через коэффициенты уравнения.

Теорема 14.6
Пусть[2] $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$ и $f \in \Bbbk[x]$ приведён и неприводим. Если группа $\mathrm{Gal}\, f / \Bbbk$ разрешима, то все корни f выражаются через элементы поля $\Bbbk$ посредством четырёх арифметических действий и извлечения корней.

Доказательство. Обозначим через $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ поле разложения многочлена f, а через $\mathbb{L} \supset \Bbbk$ результат присоединения к $\Bbbk$ первообразного корня из единицы степени $n = |\mathrm{Gal}\, \mathbb{K}/\Bbbk|$. Все элементы поля $\mathbb{L}$ выражаются в радикалах через элементы поля $\Bbbk$. По условию, группа Галуа $\mathbb{K}$ над $\Bbbk$ разрешима. По предл. 13.4 расширение $\mathbb{LK} \supset \mathbb{L}$ является расширением Галуа, и его группа Галуа G по теор. 13.4 является подгруппой в $\mathrm{Gal}\, \mathbb{K} / \Bbbk$, а значит, тоже разрешима и допускает фильтрацию $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_{m-1} \supset G_m = \{e\}$ подгруппами $G_{i+1} \lhd G_i$ с простыми циклическими факторами $G_i / G_{i+1} \simeq \mathbb{Z}/(p_i)$. Поэтому поле $\mathbb{LK}$ получается из поля $\mathbb{L}$ последовательностью циклических расширений Галуа. По теор. 14.4 каждое такое расширение является присоединением радикала. Следовательно, все элементы поля $\mathbb{LK} \supset \mathbb{K}$ выражаются в радикалах через элементы поля $\Bbbk$. □

Задачи для самостоятельного решения к §14

Задача 14.1. Пусть $f \in \Bbbk[x]$ неприводим, и $\mathrm{char}\, \Bbbk \neq 2$. Покажите, что $D(f) \in \Bbbk^2$, если и только если группа $\mathrm{Gal}\, f / \Bbbk$ осуществляет лишь чётные перестановки корней

---

[1] сам Абель доказал эту теорему для поля $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

[2] требование $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$ можно ослабить до требования, чтобы $\mathrm{char}(\Bbbk)$ не совпадала с порядком никакого композиционного фактора Жордана – Гёльдера группы Галуа многочлена f — приводимое ниже доказательство в этом случае тоже работает

многочлена f.

Задача 14.2. Найдите группы Галуа над $\mathbb{Q}$ многочленов а) x^3-3x+1 б) x^3+2x+1 в) x^4+1 г) x^4+x^2+1 д) x^4-5x^2+6 е) x^4+2x^2+x+3 ж) x^4+x^2+x+1.

Задача 14.3. Найдите группу Галуа многочлена x^3-x-1 над полем $\mathbb{Q}[\sqrt{-23}]$.

Задача 14.4. Предъявите неприводимый многочлен $f\in\mathbb{Z}[x]$ степени 6 с группой Галуа $\operatorname{Gal} f/\mathbb{Q}\simeq S_6$.

Задача 14.5. Может ли конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ содержать бесконечно много корней из единицы?

Задача 14.6. При каких n примитивный корень $\sqrt[n]{1}$ имеет степень 2 над $\mathbb{Q}$?

Задача 14.7. Какие корни из единицы содержатся в поле $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$?

Задача 14.8. Выразите $\sqrt[5]{1}$ через квадратные корни, а $\sqrt{13}$ — через $\sqrt[13]{1}$.

Задача 14.9. Объясните, как построить правильный 17-угольник циркулем и линейкой.

Задача 14.10. Для простого $p\in\mathbb{N}$ и любого $a\in\mathbb{Q}$, не являющегося p-той степенью, покажите, что группа Галуа многочлена x^p-a над $\mathbb{Q}$ изоморфна группе аффинных автоморфизмов прямой $\mathbb{A}^1\left(\mathbb{F}_p\right)$.

Задача 14.11. Покажите, что $\mathbb{Q}[\sqrt{p}]\subset\mathbb{Q}[\sqrt[4p]{1}]$ при простом $p\equiv 3\,\mathrm{mod}(4)$.

Задача 14.12. Покажите, что каждое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$ содержится в каком-нибудь круговом поле.

Задача 14.13 (квадратичная взаимность). Для простых $p,q>2$ положим

$$q^*=(-1)^{\frac{q-1}{2}}q\,,\qquad \mathbb{K}=\frac{\mathbb{Q}[x]}{\left(x^2-q^*\right)}$$

и обозначим через $\mathcal{O}\subset\mathbb{K}$ целое замыкание кольца $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}$-алгебре $\mathbb{K}$, а через $[z]_p$ — класс $z\,\mathrm{mod}(p)$.

а) Покажите, что $[q^*]_p\in\mathbb{F}_p^2\iff\mathcal{O}/(p)=\mathbb{F}_p\oplus\mathbb{F}_p\iff$ автоморфизм Фробениуса $F_p:\vartheta\mapsto\vartheta^p$ тождественно действует на $\mathcal{O}/(p)$.

б) Опишите кольцо $\mathcal{O}/(p)$ и действие на нём автоморфизма F_p в случае, когда предыдущие условия не выполнены.

в) Постройте такое вложение $\mathbb{Q}$-алгебр $\mathbb{K}\hookrightarrow\mathbb{Q}[\sqrt[q]{1}]\subset\mathbb{C}$, что эндоморфизм $z\mapsto z^p$ мультипликативной группы $\mathbb{C}^*$ переводит кольцо целых $\mathcal{O}\subset\mathbb{K}$ в себя, и его приведение по модулю (p) действует на $\mathcal{O}/(p)$ так же, как F_p.

г) Получите явное выражение $\sqrt{q^*}$ через корни q-той степени из единицы и выясните, как действует на него эндоморфизм из предыдущего пункта.

д) Докажите *квадратичный закон взаимности*[1]: $\left[\frac{p}{q}\right]\cdot\left[\frac{q}{p}\right]=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$.

Задача 14.14. Зафиксируем какое-нибудь алгебраическое замыкание $\mathbb{F}$ поля $\mathbb{Q}$ и обозначим через $\Bbbk\subset\mathbb{F}$ максимальное по включению подполе, не содержащее $\sqrt[3]{5}$. Есть ли у поля $\Bbbk$ конечные расширения с нециклической группой Галуа?

---

[1] напомню, что *символ Лежандра – Якоби* $\left[\frac{n}{p}\right]\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}0 & \text{если } [n]_p=0 \text{ в } \mathbb{F}_p\\ 1 & \text{если } [n]_p\in\mathbb{F}_p^2\smallsetminus 0\\ -1 & \text{если } [n]_p\notin\mathbb{F}_p^2\end{cases}$

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Из единственности подъёма полилинейной формы $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to \Bbbk$ до линейной формы $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \to \Bbbk$ вытекает, что единственная линейная форма $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \to \Bbbk$, обращающая в нуль на всех разложимых тензорах, это нулевая форма. Поэтому разложимые тензоры не содержатся ни в каком собственном подпространстве.

Упр. 1.3. Образ оператора $F : U \to W$ ранга 1 одномерен и натянут на некий ненулевой вектор w, единственный с точностью до пропорциональности. Значение F на произвольном векторе $u \in U$ равно $F(u) = \xi(u) \cdot w$, где $\xi \in U^*$ отличен от нуля и лежит в одномерном подпространстве $\operatorname{Ann}\ker F$.

Упр. 1.4. В силу биективности отображения Сегре, соотношения инцидентности между прямыми на квадрике Сегре такие же, как и между координатными прямыми на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Т. к. всякая прямая, лежащая на квадрике Сегре и проходящая через заданную точку p содержится в конике, которая высекается из квадрики Сегре касательной плоскостью в точке p и полностью исчерпывается парой пересекающихся в точке p образов координатных прямых с $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Упр. 1.5. Модуль билинейных отображений $\mathbb{Z} \times A \to W$ изоморфен $\operatorname{Hom}(A, W)$. Изоморфизм задаётся сопоставлением билинейному отображению φ его ограничения на $1 \times A$.

Упр. 1.6. Достаточно убедиться в том, что все разложимые тензоры $w \otimes v \in W \otimes V$ лежат в образе $f \otimes \mathrm{Id}_V$, а это очевидно.

Упр. 2.1. Для любого линейного отображения $f : V \to A$ отображение

$$V \times V \times \cdots \times V \to A\,,$$

переводящее $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ в произведение $\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot \cdots \cdot \varphi(v_n) \in A$ полилинейно, и значит, корректно определяет для каждого $n \in \mathbb{N}$ линейное отображение $V^{\otimes n} \to A$, которые все вместе задают гомоморфизм алгебр $TV \to A$, продолжающий f, причём всякий гомоморфизм $TV \to A$, продолжающий f, должен переводить разложимый тензор $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ в $\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot \cdots \cdot \varphi(v_n) \in A$, и стало быть, должен совпадать с построенным продолжением. Это доказывает выполнение универсального свойства. Тот факт, что SV и ι однозначно определяются этим универсальным свойством, доказывается дословно также, как в лем. 1.1 на стр. 7.

Упр. 2.2. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают $V^{*\otimes n}$ и формула

$$i_v \varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v,\, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$$

линейна по v и по φ, достаточно проверять её для форм φ, переводимых изоморфизмом из сл. 2.1 в разложимые тензоры $\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n$.

Упр. 2.3. Для любых v, w имеем

$$0 = \varphi(\dots,\,(v+w),\,\dots,\,(v+w),\,\dots) = \varphi(\dots,\,v,\,\dots,\,w,\,\dots) + \varphi(\dots,\,w,\,\dots,\,v,\,\dots)$$

Наоборот, равенство $\varphi(\dots, v, \dots, v, \dots) = -\varphi(\dots, v, \dots, v, \dots)$ влечёт при $1 \neq -1$ равенство $\varphi(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$.

Упр. 2.4. Годятся дословно те же формальные соображения, что и в доказательстве лем. 1.1 на стр. 7.

Упр. 2.5. Ответ: $\binom{n+d-1}{d-1}$, или число решений уравнения $m_1 + m_2 + \dots + m_d = n$ в неотрицательных целых числах $m_1, m_2, \dots, m_d$.

Упр. 2.6. Для любого линейного отображения $f : V \to A$ отображение

$$V \times V \times \dots \times V \to A\,,$$

переводящее $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ в произведение $\prod \varphi(v_i)$ в A полилинейно и симметрично, и значит, корректно определяет для каждого $n \in \mathbb{N}$ линейное отображение $S^nV \to A$, которые все вместе задают гомоморфизм алгебр $SV \to A$, продолжающий f. Наоборот, любой гомоморфизм $SV \to A$, продолжающий f, должен переводить разложимый тензор $\prod v_i \in S^nV$ в $\prod \varphi(v_i) \in A$, и стало быть, будет совпадать с построенным продолжением. Это доказывает выполнение универсального свойства. Тот факт, что SV и ι однозначно определяются этим универсальным свойством, доказывается дословно также, как в лем. 1.1 на стр. 7.

Упр. 2.7. Первое вытекает из равенства $0 = (v + w) \otimes (v + w) = v \otimes w + w \otimes v$, второе — из того, что равенство $v \otimes v + v \otimes v = 0$ при $1 + 1 \neq 0$ влечёт равенство $v \otimes v = 0$.

Упр. 2.8. Модифицируйте доказательство предл. 2.2 на стр. 24.

Упр. 2.9. Для $t \in V^{\otimes n}$ и $g \in S_n$ обозначим через $g(t)$ результат действия g на t перестановкой тензорных сомножителей, как в (2-16). Утверждения (а) и (б) вытекают из того, что для каждого $h \in S_n$ выполняются равенства

$$h\Big(\sum_{g\in S_n} g(t)\Big) = \sum_{g\in S_n} hg(t) = \sum_{g'\in S_n} g'(t)$$

$$h\Big(\sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\cdot g(t)\Big) = \mathrm{sgn}(h)\cdot \sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(hg)\cdot hg(t) = \mathrm{sgn}(h)\cdot \sum_{g'\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\cdot g'(t)$$

(ибо отображение $g \mapsto g' = hg$ взаимно однозначно), мы заключаем, что

$$h(\mathrm{sym}_n(t)) = \mathrm{sym}_n(t) \quad \text{и} \quad h(\mathrm{alt}_n(t)) = \mathrm{sgn}(h)\cdot \mathrm{alt}_n(t)\,.$$

Утверждения (в) и (г) очевидны (обе суммы состоят из $n!$ одинаковых слагаемых). В (д) суммы по чётным и по нечётным перестановкам будут состоять из одних и тех же (и одинаковых внутри каждой из сумм) слагаемых, отличающихся знаком.

Упр. 2.10. Первое утверждение в проверяется прямым вычислением. Из равенства $\mathrm{sym}_3 + \mathrm{alt}_3 + p = E$ вытекает, что образы $\mathrm{im}(\mathrm{sym}_3) = \mathrm{Sym}^3(V)$, $\mathrm{im}(\mathrm{alt}_3) = \mathrm{Skew}^3(V)$ и $\mathrm{im}(p)$ линейно порождают $V^{\otimes 3}$, т. к. любой $t \in V^{\otimes 3}$ представляется как $t = E(t) = \mathrm{sym}_3(t) + \mathrm{alt}_3(t) + p(t)$, причём эта сумма прямая, поскольку каждый из трёх операторов — проектор, тождественно действующий на своём образе и аннулирующий образы двух других проекторов в силу равенств $p \circ \mathrm{alt}_3 = \mathrm{alt}_3 \circ p = p \circ \mathrm{sym}_3 = \mathrm{sym}_3 \circ p = 0$ и $\mathrm{sym}_3 \circ \mathrm{alt}_3 = \mathrm{alt}_3 \circ \mathrm{sym}_3 = 0$, вытекающих из упр. 2.9. Например, если $t \in \mathrm{im}(p) \cap \big(\mathrm{im}(\mathrm{sym}_3) + \mathrm{im}(\mathrm{alt}_3)\big)$, то $t = p(t)$, а записывая t как $\mathrm{sym}_3(t_1)+\mathrm{alt}_3(t_2)$, получим $p(t) = 0$, откуда $t = 0$. Последнее утверждение задачи равносильно тому, что $\mathrm{im}(p) \subset V^{\otimes 3}$ является аннулятором образа оператора $\mathrm{Id} + T + T^2 : V^{*\otimes 3} \to V^{*\otimes 3}$:

$$\mathrm{im}(p) = \{t \in V^{\otimes 3} \mid \left\langle (\mathrm{Id} + T + T^2)\xi \, , \, t \right\rangle = 0 \; \forall \, \xi \in V^{*\otimes 3} \} \, ,$$

где $\langle \, * \, , \, * \, \rangle$ означает полную свёртку между $V^{*\otimes 3}$ и $V^{\otimes 3}$. Легко видеть, что для любых $g \in S_n$, $\xi \in V^{*\otimes n}$, $t \in V^{\otimes n}$ выполняется равенство $\langle \, g\xi \, , \, t \, \rangle = \left\langle \, \xi \, , \, g^{-1}t \, \right\rangle$. Поэтому утверждение задачи равносильно тому, что образ p совпадает с ядром оператора

$$\mathrm{Id}^{-1} + T^{-1} + T^{-2} = \mathrm{Id} + T^2 + T = 3(\mathrm{alt}_3 + \mathrm{sym}_3) \, ,$$

действующего на $V^{\otimes 3}$. Но из решения упр. 2.10 видно, что $\mathrm{alt}_3 + \mathrm{sym}_3$ — это проектор $V^{\otimes 3}$ на подпространство $\mathrm{Sym}^3 V \oplus \mathrm{Skew}^3 V$ вдоль подпространства $\mathrm{im}(p)$.

Упр. 2.11. Стабилизатор каждого слагаемого в симметрической группе S_n состоит из

$$m_1! \; m_2! \; \cdots \; m_d!$$

независимых перестановок одинаковых сомножителей между собою. Остаётся применить формулу для длины орбиты.

Упр. 2.13. Поскольку утверждение линейно по v, f и g достаточно проверить его для $v = e_i$, $f = x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$, $g = x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$, что делается прямо по определению.

Упр. 2.14. Это следует из равенства $\widetilde{f}(v, x, \dots, x) = \frac{1}{n} \cdot \partial_v f(x)$, где $n = \deg f$.

Упр. 2.16. Это аналогично упр. 2.13.

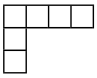
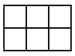
Упр. 2.17. Фиксируем в U базис $e_1, e_2, \dots, e_m$. Если $\omega \notin \Lambda^m U$, то в ω есть моном e_I, не содержащий какого-нибудь базисного вектора — скажем, e_i. Тогда $e_i \wedge \omega \neq 0$, поскольку будет содержать ненулевой моном $e_{i \sqcup I}$, возникающий только из произведения e_i на e_I и, стало быть, не способный ни с чем сократиться. Наоборот, если $\omega \in \Lambda^m U$, то $\omega = \lambda \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_m$ и $e_i \wedge \omega = 0 \; \forall \, i$, а значит, $u \wedge \omega = 0 \;\; \forall \, u \in U$.

Упр. 3.3. Поскольку Δ_δ обращается в нуль при подстановке $x_i = x_j$, он делится в кольце $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ на $(x_i - x_j)$. Так как каждая из разностей $(x_i - x_j)$ неприводима, f делится на $\prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$. Сравнивая лексикографически старшие мономы в этом произведении и в Δ_δ, заключаем, что частное равно 1.

Упр. 3.4. Разложим перестановку g циклового типа λ в произведение независимых циклов и запишем их по строкам диаграммы так, чтобы действие перестановки g циклически сдвигало все элементы вдоль строк на единицу влево. Сопряжение перестановки g перестановкой h состоит в замене содержимого клеток диаграммы по правилу $i \mapsto h(i)$. Стабилизатор g состоит из всех перестановок, независимо циклически сдвигающих номера вдоль строк и переставляющих строки одинаковой длины между собою как единое целое.

Упр. 3.5. В правом нижнем углу матрицы $\left(h_{\lambda_i + j - i}\right)$, начиная с позиции $(m + 1, m + 1)$, где m — высота диаграммы λ, будет стоять верхняя унитреугольная матрица, левее которой все элементы в строках будут нулевые.

Упр. 4.1. Устойчивое паросочетание между i-тым и $(i+1)$-м столбцом устанавливается так: последовательно перебираем шарики в $(i+1)$-ом столбце двигаясь снизу вверх и назначаем очередному шарику $\boldsymbol{ш}$ партнёром самый верхний шар i-того столбца, лежащий строго ниже $\boldsymbol{ш}$ и ещё не назначенный никому партнёром, а если таких шаров нет, объявляем $\boldsymbol{ш}$ свободным. После того, как все шары $(i+1)$-го столбца разделены на свободные и имеющие партнёров, все шары i-того столбца, не являющиеся ни чьими партнёрами, тоже объявляются свободными. Операция L_i перемещает на одну клетку влево самый верхний свободный шар $(i+1)$-го столбца или ничего не делает, если свободных шаров в $(i+1)$-ом столбце нет. Операция R_i перемещает на одну клетку вправо самый нижний свободный шар i-го столбца или ничего не делает, если в i-ом столбце нет свободных шаров.

Упр. 4.3. Диаграммы  и  несравнимы по отношению $\trianglerighteq$.

Упр. 4.4. $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)} = s_{(2,1)} + s_{(1,1,1)} = s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$

Упр. 4.5. При вычислении $s_\lambda \cdot e_k$ к диаграмме λ надо дописать k клеток без повторений заполненных числами от 1 до k, и если 2 из них попадают в одну строку, то возникает противоречие либо с табличным ограничением, либо с ограничением Яманучи. При вычислении $s_\lambda \cdot h_k$ к диаграмме λ надо дописать k клеток заполненных единицами, никакие две из которых не могут попасть в один столбец в силу табличного ограничения.

Упр. 5.2. При $m \geqslant 2$ классы многочленов, делящихся на p, составляют собственный подмодуль в $\Bbbk[t]/\left(p^m\right)$. При $m = 1$ фактор кольцо $\Bbbk[t]/(p)$ является полем, т. е. для любого ненулевого класса $[g] \in \Bbbk[t]/(p)$ существует такой многочлен $h \in \Bbbk[t]$, что $h \cdot [g] = [1]$. Поэтому любой класс $[f] \in \Bbbk[t]/(p)$ получается из класса $[g]$ применением оператора $h(t) \cdot f(t)$.

Упр. 5.3. Диагональный оператор с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ аннулируется многочленом $\prod(t - \lambda_i)$. Наоборот, поскольку многочлен, аннулирующий модуль (5-4), делится на максимальную степень каждого элементарного делителя, все элементарные делители имеют вид $t - \lambda$ и входят в разложение (5-4) только в первых степенях, что и означает диагонализуемость оператора умножения на t.

Упр. 5.4. Включения $R \ker f \subset \ker f$ и $R \operatorname{im} f \subset \operatorname{im} f$ проверяются так: если $\varphi(v) = 0$, то $\varphi(fv) = f\varphi(v) = f(0) = 0$ для всех $f \in R$; если $v = \varphi(u)$, то $fv = f\varphi(u) = \varphi(fu)$ для всех $g \in R$.

Упр. 5.7. Для любых векторов $v, w \in V$ рассмотрим произвольный оператор $\varphi : V \to V$ переводящий v в w. Так как $\varphi = \sum \lambda_i f_i$ с $\lambda_i \in \Bbbk$ и $f_i \in R$, вектор $w = \varphi(v) = \sum \lambda_i f_i(w)$ лежит в линейной оболочке R-орбиты вектора v.

Упр. 5.10. Поскольку правило $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$ линейно по φ, его достаточно проверять только на разложимых $\varphi = \xi \otimes w$ с $\xi \in U^*$, $w \in W$. По определению

$$\varrho^* \otimes \lambda(g) : \xi \otimes w \mapsto \varrho(g^{-1})^* \xi \otimes \lambda(g) w = (\xi \circ g^{-1}) \otimes (gw) .$$

Этот оператор переводит $u \in U$ в $\xi(g^{-1}u) \cdot gw = g\left(\xi(g^{-1}u) \cdot w\right) = g \circ (\xi \otimes w) \circ g^{-1}(u)$.

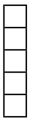
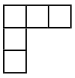
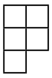
Упр. 5.13. Пусть гомоморфизмы $\psi_\nu : G \to \Bbbk^*$ различны и линейно зависимы. Рассмотрим линейную зависимость $\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \dots + \lambda_n\psi_n = 0$ с минимально возможным числом слагаемых, и какой-нибудь $h \in G$, на котором $\psi_1(h) \neq \psi_2(h)$. Поскольку $\forall\, g \in G$

выполняется равенство $\sum_i \lambda_i \psi_i(h)\psi_i(g) = \sum_i \lambda_i \psi_i(hg) = 0$, мы получаем ещё одну линейную зависимость между ψ_i с коэффициентами $\lambda_i \cdot \psi_i(h)$. Деля все её коэффициенты на $\psi_1(h)$ и вычитая из первой зависимости, получаем линейную зависимость между ψ_i с нулевым коэффициентом при ψ_1 и ненулевым коэффициентом при ψ_2. Она нетривиальна и содержит меньше слагаемых. Противоречие.

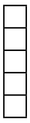
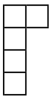
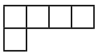
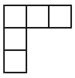
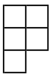
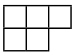
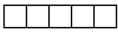
Упр. 5.23. Достаточно показать, что никакая ненулевая линейная форма $\varphi \in \mathrm{Sym}^n(W)^*$ не зануляется на всех тензорах $w^{\otimes n}$. Зафиксируем в W базис $e_1, e_2, \dots, e_d$. Пусть $w = \sum x_i e_i$, а φ переводит стандартный базисный вектор $e_{[m_1 m_2 \dots m_d]} \in \mathrm{Sym}^n(W)$ в число $a_{m_1 m_2 \dots m_d} \in \Bbbk$. Тогда $\varphi\left(w^{\otimes n}\right) = \sum\limits_{m_1 m_2 \dots m_d} a_{m_1 m_2 \dots m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}$. Над бесконечным полем $\Bbbk$ такой многочлен тогда и только тогда является тождественно нулевой функцией от $x_1, x_2, \dots, x_n$, когда все его коэффициенты $a_{m_1 m_2 \dots m_d} = 0$.

Упр. 5.24. Пусть все тензоры вида $w^{\otimes n}$ с $F(w) \neq 0$ лежат в гиперплоскости $\mathrm{Ann}\,\psi$, где ψ — линейная форма на $\mathrm{Sym}^n(W)$. Функция $G(w) = \psi(w^{\otimes})$ является однородным многочленом степени n на W. По условию, многочлен $F \cdot G$ является тождественно нулевой функцией на W. Поэтому это нулевой многочлен, и т. к. $F \neq 0$, то $G = 0$, т. е. $\psi(w^{\otimes}) \equiv 0$ и *все* тензоры $w^{\otimes} \in \mathrm{Ann}\,\psi$, что противоречит принципу Аронгольда из упр. 5.23.

Упр. 6.7. Группа $\mathfrak{A}_5$ имеет два трёхмерных неприводимых представления вращениями икосаэдра (отличающиеся на композицию с внешним автоморфизмом $\mathfrak{A}_5$, который задаётся сопряжением любой транспозицией внутри S_5) и четырёхмерное представление вращениями симплекса. Полная таблица неприводимые характеров $\mathfrak{A}_5$ такова:

классы				(12345)	(21345)
число элементов	1	20	15	12	12
значения характеров:					
тривиальный	1	1	1	1	1
икосаэдр-1	3	0	−1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
икосаэдр-2	3	0	−1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
симплициальный	4	1	0	−1	−1
пятимерный	5	−1	1	0	0

Группа S_5 имеет знаковое одномерное представление sgn и симплициальное представление Δ. Представления $\mathrm{sgn} \otimes \Delta$ и $\Lambda^2 \Delta$ тоже неприводимы, а 2-я симметрическая степень раскладывается как $S^2 \Delta = \mathrm{sgn} \oplus \Delta \oplus \zeta$, где ζ — неприводимое 5-мерное представление, которое геометрически описывается как действие $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq S_5$ на гармонических четвёрках точек[1] в $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$. Ответ:

классы							 $'$
число элементов	1	10	30	20	15	20	24
значения характеров:							
тривиальный	1	1	1	1	1	1	1
знаковый α	1	-1	-1	1	1	-1	1
симплициальный ϑ	4	2	0	1	0	-1	-1
четырёхмерный $\vartheta \otimes \alpha$	4	-2	0	1	0	1	-1
шестимерный $\Lambda^2\vartheta$	6	0	0	0	-2	0	1
пятимерный $\zeta \subset S^2\vartheta$	5	1	-1	-1	1	1	0
пятимерный $\zeta \otimes \alpha$	5	-1	1	-1	1	-1	0

Упр. 6.8. Выберите в $U \otimes W$ базис, согласованный с этим прямым разложением и рассмотрите соответствующий ему базис из мономов m-той степени.

Упр. 6.10. Каноническое отображение B-модулей $B \underset{A}{\otimes} A \to B$, ассоциированное с вложением A-модулей $A \hookrightarrow B$, является изоморфизмом для любого расширения $A \subset B$ ассоциативных алгебр с единицами.

Упр. 6.14. Зафиксируем систему представителей $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ смежных классов G/H. Тогда $G = g_1H \sqcup \dots \sqcup g_rH = Hg_1^{-1} \sqcup \dots \sqcup Hg_r^{-1}$, и каждый H-инвариантный оператор $\varphi : \Bbbk[G] \to V$ однозначно задаётся указанием s векторов $v_\nu = \varphi\left(g_\nu^{-1}\right) \in V$ ибо действует на остальные базисные векторы по правилу $\varphi\left(hg_\nu^{-1}\right) = hv_\nu$. Поэтому

$$\dim \operatorname{Hom}_H(\Bbbk[G], V) = [G : H] \cdot \dim V = \dim \Bbbk[G] \underset{\Bbbk[H]}{\otimes} V .$$

Преобразование Фурье от H-инвариантного оператора $\varphi : g_\nu^{-1} \mapsto v_\nu$ равно

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \underset{\Bbbk[H]}{\otimes} \varphi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_\nu \sum_{h \in H} g_\nu h^{-1} \underset{\Bbbk[H]}{\otimes} \varphi\left(hg_\nu^{-1}\right) = \frac{|H|}{|G|} \sum_\nu g_\nu v_\nu \in \bigoplus_\nu g_\nu V$$

и зануляется только когда все $v_\nu = 0$.

Упр. 7.5. Будем писать $T \underset{a}{\succ} U$, если $T \succ U$, и наибольшее из чисел, стоящих в заполнениях T и U в разных клетках, равно a. Если $T \underset{a}{\succ} U$ и $U \underset{b}{\succ} W$, то $T \underset{a}{\succ} W$ при $a \geqslant b$ и $T \underset{b}{\succ} W$ при $a \leqslant b$.

Упр. 7.6. Для всех $q \in R_T$ и $p \in C_U$ выполнено строгое неравенство $pU \succ qT$. По лем. 7.1 существует транспозиция $\tau \in R_U \cap C_T$, и вычисление (7-12) показывает, что $c_T\{U\} = 0$.

---

[1] Точки $a, b, c, d \in \mathbb{P}_1$ называются *гармоническими*, если их двойное отношение $[a, b, c, d] = -1$, т. е. в карте, где $a = \infty$, точка b является серединой отрезка cd. Поскольку каждая тройка точек однозначно дополняется до гармонической и одна и та же четвёрка происходит из 4 троек, в $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$ имеется $\binom{6}{2}/4 = 5$ гармонических четвёрок точек, и действие на них группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ задаёт изоморфизм $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \xrightarrow{\sim} S_5$.

Упр. 7.9. Вычисление аналогично вычислению определителя Вандермонда: в кольце многочленов $\mathbb{Z}[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]$ определитель делится на каждую из разностей $\eta_i - \eta_j$, а значит, и на $\prod\limits_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$. Сравнение лексикографически старших мономов показывает, что частное равно 1.

Упр. 7.10. Индукцией по количеству столбцов покажите, что произведение длин крюков любой диаграммы λ равно $\prod\limits_i \eta_i! / \prod\limits_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$, где $\eta = \lambda + \delta$, и воспользуйтесь формулой Фробениуса. Индуктивный переход основан на том, что длины крюков клеток первого столбца равны $\eta_i - n + \ell$, где ℓ — число строк в диаграмме.

Упр. 8.5. Первое утверждение является следствием тождества Якоби, второе достаточно проверять на разложимых тензорах.

Упр. 8.6. Прямая $t \mapsto E + tA$ касается квадрики $\det X = 1$ в точке E тогда и только тогда квадратный трёхчлен $\det(E + tA) - 1 = \det(A) \cdot t^2 + \operatorname{tr}(A) \cdot t$ имеет кратный корень в нуле.

Упр. 8.8. Если $V = \Bbbk \cdot e_1 \oplus \Bbbk \cdot e_2 \oplus \cdots \oplus \Bbbk \cdot e_n$, то $\overline{\Bbbk} \otimes V \simeq \overline{\Bbbk} \cdot e_1 \oplus \overline{\Bbbk} \cdot e_2 \oplus \cdots \oplus \overline{\Bbbk} \cdot e_n$ в силу канонического изоморфизма дистрибутивности из предл. 1.3 на стр. 14.

Упр. 9.1. Неубывающее отображение $\varphi : [n] \to [m]$, переводящее элементы $0, \dots, k_1$ в элемент ℓ_0, элементы $k_1 + 1, \dots, k_2$ — в ℓ_1, …, элементы $k_\alpha + 1, \dots, n$ — в ℓ_α представляется в виде

$$\varphi = \partial_m^{m-\alpha} \partial_{m-1}^{m-\alpha-1} \dots \partial_{\alpha+1}^{j_1} s_\alpha^{i_{n-\alpha}} \dots s_{n-2}^{i_2} s_{n-1}^{i_1}\,, \tag{14-19}$$

где последовательность $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-\alpha}$ не содержит чисел $k_1, k_2, \dots, k_\alpha$, а последовательность $j_1 < j_2 < \cdots < j_{m-\alpha}$ не содержит чисел $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_\alpha$ и такое представление однозначно. Имеются соотношения

$$\partial_{n+1}^j \partial_n^i = \partial_{n+1}^i \partial_n^{j-1} \text{при } i < j\,, \quad s_n^j s_{n+1}^i = s_n^i s_{n+1}^{j+1} \text{при } i \leqslant j$$

$$s_{n-1}^j \partial_n^i = \begin{cases} \partial_{n-1}^i s_{n-2}^{j-1} & \text{при } i < j \\ e_{n-1} & \text{при } i = j, j+1 \\ \partial_{n-1}^{i-1} s_{n-2}^j & \text{при } i > j+1. \end{cases}$$

Они позволяют переписать любое слово из букв ∂_n^i и s_m^j в виде (14-19). Поэтому все прочие соотношения между отображениями ∂_n^i и s_m^j из них выводится.

Упр. 9.5. Типичный ответ: «$\ln|x| + C$, где C — произвольная константа» *неверен*[1]. На самом деле деле C является сечением *постоянного пучка* $\mathbb{R}^{\sim}$ над несвязным открытым множеством $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Упр. 9.10. Элементу $a \in F(A)$ отвечает естественное преобразование $f_X : \operatorname{Hom}(A, X) \to F(X)$, посылающее стрелку $\varphi : A \to X$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратное отображение сопоставляет естественному преобразованию f_* значение отображения $f_A : h^A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h^A(A)$. Проверяется это с

---

[1] и в былые годы случалось, что за такой ответ на устном вступительном экзамене по математике абитуриентам ставили двойку

помощью построенной по произвольной стрелке $\varphi : A \to X$ диаграммы

$$\begin{tikzcd}
h^A(A) = \mathrm{Hom}(A, A) \arrow[r, "h^A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \mathrm{Hom}(A, X) = h^A(X) \arrow[d, "f_X"] \\
F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X)\,,
\end{tikzcd} \tag{14-20}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$.

Упр. 9.12. В категориях множеств и топологических пространств произведения и копроизведения суть прямые[1] произведения и дизъюнктные объединения соответственно. В категории абелевых групп и модулей над фиксированным кольцом и произведения и копроизведения суть прямые произведения[2]. В категории всех групп произведения и копроизведения суть прямые и свободные[3] произведения. В категории коммутативных колец с единицей — это прямые и тензорные произведения колец.

Упр. 9.17. Начальное множество и начальное топологическое пространство пусты, конечное множество и конечное топологическое пространство это одна точка. Начальный и конечный объекты категории групп это единичная группа. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей начальный и конечный объект это нуль.

Упр. 9.20. Гомоморфизмы коммутативных колец $A \leftarrow K \to A$ наделяют A и B структурами K-алгебр, и копроизведение $A \underset{K}{\otimes} B$ это *тензорное произведение* K-алгебр, т. е. фактор свободного K-модуля с базисом $A \times B$ (произведение в категории множеств) по подмодулю, порождённому всевозможными разностями

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \varkappa_1 b_1 + \varkappa_2 b_2) - \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \varkappa_j (a_i, b_j)$$

с $\lambda_i, \varkappa_i \in K$, $a_i \in A$, $\beta_j \in B$ (ср. с n° 9.5.1). Произведение на классах эквивалентности задаётся покомпонентно: $(a_1 \underset{K}{\otimes} b_1) \cdot (a_2 \underset{K}{\otimes} b_2) = (a_1 a_2) \underset{K}{\otimes} (b_1 b_2)$.

Упр. 10.1. В силу конечномерности K над $\mathbb{Q}$ целые неотрицательные степени ξ^m линейно зависимы над $\mathbb{Q}$. Умножая эту линейную зависимость на общий знаменатель всех коэффициентов, получаем на ξ уравнение $a_0\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \dots + a_{n-1}\xi + a_n = 0$ с $a_i \in \mathbb{Z}$. Тогда $\zeta = a_0\xi$ цел, т. к. $\zeta^n = -a_1 \cdot \zeta^{n-1} - a_0 a_2 \cdot \zeta^{n-2} - \dots - a_0^{n-1} a_n$.

Упр. 10.2. Будучи подмодулем поля, модуль $\mathcal{O}_K$ не имеет кручения, и стало быть, свободен. Его ранг не выше d, поскольку любые $d + 1$ его векторов линейно зависимы над $\mathbb{Q}$, а значит, и над $\mathbb{Z}$. С другой стороны, подходящие натуральные кратности любых d базисных векторов пространства K дают линейно независимую над $\mathbb{Q}$ систему векторов из $\mathcal{O}_K$. Поэтому ранг $\mathcal{O}_K$ не меньше d. В базисе модуля целых оператор умножения на целое алгебраическое число записывается целочисленной матрицей.

Упр. 11.1. Если $a^n = 0$ и $b^m = 0$, то $(a + b)^{m+n-1} = 0$ и $(ca)^n = 0$ для всех c.

---

[1] теоретико множественные и топологические

[2] или прямые суммы, что то же самое

[3] например, свободное произведение двух экземпляров группы $\mathbb{Z}$ — это свободная (некоммутативная) группа $\mathbb{F}_2$ с двумя образующими

Упр. 11.4. Пусть аффинные многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ имеют координатные алгебры $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$ и $\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, y_2, \dots, y_m]/I(Y)$. Если регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ задаётся формулой $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)\big)$, где $\varphi_i(x) \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, то $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ действует на образующие алгебры $\Bbbk[Y]$ по правилу $y_i \mapsto \varphi_i \operatorname{mod}(I)(X)$, причём включение $\varphi(X) \subset Y$ гарантирует включение $\varphi^*\big(I(Y)\big) \subset I(X)$, означающее, что это правило корректно задаёт отображение из фактор алгебры $\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, y_2, \dots, y_m]/I(Y)$. Дважды двойственное отображение $\varphi^{**} : \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X] \to \operatorname{Spec_m} \Bbbk[Y]$ переводит гомоморфизм вычисления $\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \to \Bbbk$, $f(x) \mapsto f(p)$, в точке $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in X$, в его композицию с φ^*. Эта композиция переводит образующую $y_i \in \Bbbk[Y]$ в число $\varphi_i(p)$, т. е. является гомоморфизмом вычисления в точке $\varphi(p)$. Тем самым $\varphi^{**} = \varphi$. Аналогично проверяется, что и наоборот, если задан гомоморфизм алгебр $\psi : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$, то $\psi^{**} = \psi$.

Упр. 11.5. Поскольку формула для произведения разложимых тензоров билинейна, она корректно распространяется по линейности на неразложимын тензоры. Универсальные отображения $A \xrightarrow{\alpha} A \otimes B \xleftarrow{\beta} B$ действуют по правилам $\alpha(a) = a \otimes 1$ и $\beta(b) = 1 \otimes b$. Их универсальные свойства вытекают из универсальных свойств тензорного произведения: если заданы гомоморфизмы алгебр с единицами $\varphi : A \to C$ и $\psi : B \to C$, то отображение $A \times B \to C$, $(a, b) \mapsto \varphi(a) \cdot \psi(b)$, билинейно, а значит, однозначно пропускается через тензорное произведение $A \otimes B$.

Упр. 11.6. Первые три равенства и включения $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J) \subset V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$ очевидны из определений.

Упр. 11.7. Если $V(f) = X$, то $f \in I(X)$, и значит, $f = 0$ в $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$. Если $V(f) = \varnothing$, то множество нулей идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, порождённого идеалом $I(X)$ и многочленом f пусто, и из слабой теоремы о нулях вытекает, что $1 \equiv sf \operatorname{mod}(I(X))$ для некоторого $s \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, т. е. f обратим в $\Bbbk[X]$.

Упр. 11.9. Иначе $X = (X \smallsetminus U) \cup V(f - g)$.

Упр. 11.12. Если $V = \cup W_i$ и $\xi_i \in V^*$ — такие ненулевые линейные формы, что $W_i \subseteq \operatorname{Ann} \xi_i$, то ненулевой многочлен $f = \prod \xi_i$ тождественно зануляется на $\mathbb{A}(V)$.

Упр. 11.13. Используйте покрытие $U = \bigcup \mathcal{D}(x_i)$ и предл. 11.4.

Упр. 11.14. Каждое пересечение $I \cap I(X_i)$ является собственным векторным подпространством в I, поскольку включение $I \subset I(X_\nu)$ означало бы, что $X_\nu \subset \bigcup\limits_{i \neq j} (X_i \cap X_j)$, а это в силу непроводимости X_ν влечёт включение $X_\nu \subset X_i \cap X_j$ для некоторых $i \neq j$, что невозможно, т. к. ни одна из неприводимых компонент не содержится в другой. Если все неделители нуля в I лежат в собственном подространстве, то I оказывается объединением конечного числа собственных подпространств.

Упр. 11.15. Элемент прямого произведения не делит нуль тогда и только тогда, когда каждая из его компонент не делит нуль: $S^{-1}_{K_1 \times K_2 \times \dots \times K_k} = S^{-1}_{K_1} \times S^{-1}_{K_2} \times \dots \times S^{-1}_{K_k}$.

Упр. 11.17. Пусть $A = \Bbbk[X]$, $B = \Bbbk[Y]$. Вложение $\varphi^* : B \hookrightarrow A$ задаёт на A структуру конечно порождённой B-алгебры, т. е. представляет A в виде $A \simeq B[x_1, x_2, \dots, x_m]/J$, что и утверждается.

Упр. 12.1. Если $x_i x_j \neq 0$, то $t_{j,\nu} = x_\nu / x_j = (x_\nu : x_i) / (x_j : x_i) = t_{i,\nu} / t_{i,j}$ (при $\nu = i$ надо считать $t_{i,i} = 1$). Поэтому $\varphi^*_{ji} : t_{j,\nu} \mapsto t_{i,\nu} / t_{i,j}$. Обратный к φ^*_{ji} гомоморфизм

$\Bbbk\left[\mathcal{D}\left(t_{i,j}\right)\right] \to \Bbbk\left[\mathcal{D}\left(t_{j,i}\right)\right]$ действует по той же формуле $t_j^{(i)} \mapsto 1/t_i^{(j)}$, $t_{i,\nu} \mapsto t_{j,\nu}/t_{j,i}$.

Упр. 12.2. В каждом таком W имеется единственный базис $w_1, w_2, \dots, w_k$, проектирующийся в стандартный базис $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ координатной k-плоскости. Матрица z, по строкам которой стоят координаты векторов w_i в стандартном базисе пространства $\Bbbk^m$, имеет $s_I(z) = E$. В GL_k-орбите каждой матрицы x im U_I также имеется единственная матрица z с $s_I(z) = E$ — именно, $z = s_I(x)^{-1} \cdot x$.

Упр. 12.3. Элементы $k\times m$-матрицы $s_J^{-1}\left(\varphi_I(t)\right)\cdot\varphi_I(t)$ являются рациональными функциями от элементов матрицы t со знаменателями $\det s_J\left(\varphi_I(t)\right)$ и, стало быть, регулярны в $\mathcal{D}\left(\det s_J\left(\varphi_I(t)\right)\right)$. Поэтому отображение φ_{JI}, переводящее эту матрицу в её $k\times(m-k)$-подматрицу, образованную столбцами с не лежащими в J номерами, регулярно. Обратное отображение задаётся той же формулой: $t \mapsto s_{\hat{I}}\left(s_I^{-1}\left(\varphi_J(t)\right)\cdot\varphi_J(t)\right)$ (удостоверьтесь в этом!).

Упр. 12.4. Это следует из определения локальной регулярной функции и зам. 11.2. на стр. 193.

Упр. 12.5. Отображение $\varkappa$ можно задать формулой $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$, из которой видно, что оно не определено только в точках $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ и образ $\varkappa$ тоже равен дополнению до этих трёх точек.

Упр. 12.6. В обозначения из прим. 12.1 на стр. 202 пересечение множества нулей однородного многочлена $\overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ со стандартной картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ задаётся в аффинных координатах t_i карты U_i полиномиальным уравнением

$$\overline{f}\left(t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}\right) = 0\,.$$

Упр. 12.14. Пусть $X_1, X_2 \subset X$ — два замкнутых неприводимых подмножества и $U \subset X$ — открытое множество, такое что оба пересечения $X_1 \cap U$, $X_2 \cap U$ непусты. Тогда $X_1 = X_2 \iff X_1 \cap U = X_2 \cap U$, поскольку $X_i = \overline{X_i \cap U}$.

Упр. 12.15. Докажите, что произведение конечных сюрьекций $X \to \mathbb{A}^n$, $Y \to \mathbb{A}^m$ является конечной сюрьекцией $X \times Y \to \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$.

Упр. 12.16. Выберите в H какой-нибудь базис, запишите координаты векторов этого базиса и координаты точки p по строкам $(n-d+1)\times(n+1)$-матрицы. Условие $p \in H$ означает, что ранг этой матрицы равен $n-d$. Зануление всех миноров порядка $n-d+1$ является системой билинейных уравнений на плюккеровы координаты[1] подпространства H и однородные координаты точки p.

Упр. 12.18. Γ задаётся однородными по каждому f_i и по p уравнениями $f_0(p) = f_1(p) = \dots = f_n(p) = 0$.

Упр. 12.19. Возьмите $n+1$ гиперплоскостей, пересекающихся в одной точке, и возведите задающие их линейные формы в подходящие степени.

Упр. 12.21. Вложим $\mathrm{Gr}(2,4)$ в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ по Плюккеру. Прямая (a, b) лежит на поверхности $V(f)$, если и только если многочлен f тождественно зануляется на линейной оболочке векторов a и b, которая является образом свёртки $V^* \to V$ с бивектором $a \wedge b$. Убедитесь, что условие тождественного по $\xi \in V^*$ зануления функции $\xi \mapsto f(\xi \llcorner (a \wedge b))$

---

[1] напомню, что плюккеровыми координатами подпространства являются старшие миноры матрицы, составленной из координат какого-нибудь базиса в этом подпространстве

записывается системой однородных полиномиальных уравнений на коэффициенты f и плюккеровы координаты бивектора $a \wedge b$.

Упр. 13.2. В силу конечности $\mathbb{F}$ гомоморфизм колец $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}$, переводящий $1 \in \mathbb{Z}$ в $1 \in \mathbb{F}$, имеет ненулевое ядро $(p) \subset \mathbb{Z}$, и его образ изоморфен $\mathbb{Z}/(p) \subset \mathbb{F}$. Поскольку в нём нет делителей нуля, число p простое, и образ — поле $\mathbb{F}_p$ совпадающее с простым подполем в $\mathbb{F}$.

Упр. 13.6. Если $f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x)$, то по правилу Лейбница $f'(x) = g(x) + (x - \alpha) \cdot g'(x)$, откуда $g(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

Упр. 13.7. Поскольку $\deg f \geqslant 2$, производная $f' \neq 0$ и $\deg f' < \deg f$. Так как f не имеет отличных от константы делителей, степень которых меньше $\deg f$, $\text{нод}(f, f') = 1$.

Упр. 13.11. Это вытекает из лем. 13.4.

Упр. 13.15. Корни многочлена $x^{p^n} - x$ распадаются на орбиты группы $G = \operatorname{Aut} \mathbb{F}_{p^n} \simeq \mathbb{Z}/(n)$. Длина m каждой орбиты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ делит n, а произведение $\prod(x - \alpha_i)$ по всем элементам G-орбиты является неприводимым приведённым многочленом с коэффициентами из $\mathbb{F}_p = \mathbb{F}_{p^n}^G$. Поскольку многочлен $x^{p^n} - x$ сепарабелен, его разложение на простые множители в $\mathbb{F}_p[x]$ имеет вид произведения попарно различных приведённых неприводимых многочленов, степени которых делят n. С другой стороны, неприводимый приведённый многочлен $g \in \mathbb{F}_p[x]$ степени m делит $x^{p^n} - x$ тогда и только тогда, когда он имеет корень в поле разложения $\mathbb{F}_{p^n}$ многочлена $x^{p^n} - x$. Это равносильно наличию вложения $\mathbb{F}_p[x]/(g) = \mathbb{F}_{p^m}$ в $\mathbb{F}_{p^n}$, т. е. тому, что $m|n$.

Упр. 14.1. Поскольку четыре арифметических действия над комплексными числами и извлечение из них квадратных корней полностью сводятся к этим пяти операциям над вещественными и мнимыми частями, можно предполагать числа a и b вещественными. В этом случае $a \pm b$ строятся непосредственно, a/b и ab — при помощи подобия и/или теоремы Виета (для этого и требуется отрезок длины 1), а $\sqrt{a} = \sqrt{1 \cdot a}$ — при помощи теоремы о среднем геометрическом в прямоугольном треугольнике.

Упр. 14.2. Композиционные факторы 2-группы являются простыми 2-группами. Так как каждая 2-группа имеет нетривиальный центр, простая 2-группа абелева, а значит, изоморфна $\mathbb{Z}/(2)$.

Упр. 14.6. Пусть корни $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k\} \subset \{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n\}$ образуют орбиту группы Галуа. Тогда коэффициенты многочлена $g(x) = (x - \vartheta_1)(x - \vartheta_2) \cdots (x - \vartheta_k)$ инвариантны относительно действия группы Галуа, и значит, $g \in \Bbbk[x]$. Таким образом, многочлен f является произведением многочленов g, отвечающих орбитам действия группы Галуа $\operatorname{Gal} f/\Bbbk$ на корнях f. С другой стороны, группа Галуа переводит в себя множество корней любого многочлена с коэффициентами из $\Bbbk$ и, тем самым, не может транзитивно действовать на корнях приводимого в $\Bbbk[x]$ многочлена f.

Упр. 14.7. Поле разложения $\mathbb{L}_{\overline{f}}$ многочлена $\overline{f}$ над $\mathbb{F}_p$ раскладывается в башню примитивных расширений $\mathbb{F}_p = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \dots \subset \mathbb{L}_{m-1} \subset \mathbb{L}_m = \mathbb{L}_{\overline{f}}$ на каждом этаже которой происходит присоединение одного из корней ϑ многочлена $\overline{f}$. Поскольку $\overline{f}$ полностью распадается в $A[t]$ в произведение различных линейных множителей, тавтологическое вложение $\mathbb{F}_p \hookrightarrow A$ продолжается вдоль башни до гомоморфизма $\mathbb{F}_p$-алгебр $\mathbb{L}_{\overline{f}} \to A$, который инъективен, т. к. $\mathbb{L}_{\overline{f}}$ поле, и имеет образом $\mathbb{F}_p$-подалгебру, порождённую корнями многочлена $\overline{f}$ в A.

Упр. 14.9. Поскольку $x^n - 1 = \prod\limits_{\nu=0}^{n-1}\left(x - \zeta^{\nu}\right)$, элементарные симметрические полиномы $e_i\left(\zeta^0, \zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}\right) = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Поэтому все коэффициенты многочлена f_{ξ}, кроме старшего, равного 1, и свободного члена, равного $-\xi^n\alpha^n$, нулевые:

$$e_i\left(\zeta^0\xi\alpha, \zeta^1\xi\alpha, \dots, \zeta^{n-1}\xi\alpha\right) = \xi^i\alpha^i e_i\left(\zeta^0, \zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}\right) = 0\,.$$

Упр. 14.13. Пересекая с подгруппой $H \subset G$ цепочку

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_{m-1} \supset G_m = \{e\} \tag{14-21}$$

в которой $G_{i+1} \lhd G_i$ и факторы G_i/G_{i+1} абелевы, получим цепочку

$$H = G_0 \cap H \supset G_1 \cap H \supset G_2 \cap H \supset \cdots \supset G_{m-1} \cap H \supset G_m \cap H = H$$

с факторами $\left(G_i \cap H\right) / \left(G_{i+1} \cap H\right) \simeq \left((G_i \cap H)\cdot G_{i+1}\right) / G_{i+1} \subset G_i / G_{i+1}$. Будучи подгруппами абелевых факторов G_{i+1}/G_i из цепочки (14-21), они тоже абелевы. Умножая элементы цепочки (14-21) на нормальную подгруппу $N \lhd G$ получаем цепочку $G = G_0N \supset G_1N \supset G_2N \supset \cdots \supset G_{m-1}N \supset G_mN = N$, факторы которой по нормальной подгруппе N дают цепочку подгрупп, ведущую от G/N к $e = N/N$ с

$$\frac{G_iN/N}{G_{i+1}N/N} \simeq \frac{G_i}{G_{i+1}(N \cap G_i)} \simeq \frac{G_i/G_{i+1}}{(G_i \cap N)/G_{i+1}}\,.$$

Будучи факторами абелевых групп G_i/G_{i+1} из цепочки (14-21), они тоже абелевы. Из двух цепочек $H = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_{m-1} \supset H_m = \{e\}$ и $G/H = Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots \supset Q_{k-1} \supset Q_k = \{e\}$ для нормальной подгруппы $H \lhd G$ и фактор группы G/H собирается цепочка $G = Q_0H \subset Q_1H \supset Q_2H \supset \cdots \supset Q_kH = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_m = \{e\}$, в которой Q_iH суть полные прообразы подгрупп $Q_i \supset G/H$ относительно гомоморфизма факторизации $G \twoheadrightarrow G/H$.

Предметный указатель