Тензоры

A8◇1°. Докажите, что полилинейные отображения $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ образуют векторное пространство и найдите его размерность. Верно ли, что в наборе векторов $v_i \in V_i$ тогда и только тогда присутствует нулевой вектор, когда $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = 0$ для любого полилинейного отображения φ?

A8◇2°. Постройте канонические изоморфизмы (пространства конечномерны)

а) $U \otimes (V \otimes W) \simeq U \otimes V \otimes W \xleftarrow{\sim} (U \otimes V) \otimes W$ **б)** $U \otimes (V \oplus W) \simeq (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$
в) $U \otimes V \simeq V \otimes U$ **г)** $U^* \otimes V^* \simeq (U \otimes V)^*$ **д)** $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(U, V), W) \simeq \mathrm{Hom}(V, U \otimes W)$

A8◇3°. Постройте канонический изоморфизм $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$. Запишем операторы $U \xrightarrow{A} V$ и $V \xrightarrow{B} W$ в виде $A = \sum \alpha_\nu \otimes a_\nu$, $B = \sum \beta_\mu \otimes b_\mu$ с $\alpha_\nu \in U^*$, $a_\nu \in V$, $\beta_\mu \in V^*$, $b_\mu \in W$. Запишите аналогичным образом их произведение $B \circ A \in \mathrm{Hom}(U, W) \simeq U^* \otimes W$.

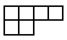
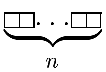
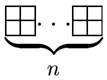
A8◇4°. Пусть $e_i \in V$ и $x_i \in V^*$ — двойственные базисы. В какой оператор переходит при изоморфизме из предыдущей задачи *тензор Казимира* $\sum x_i \otimes e_i \in V^* \otimes V$?

A8◇5°. Рассмотрим для любого векторного пространства V последовательность отображений:

$$\mathrm{Hom}(V, V) \simeq V^* \otimes V \xrightarrow{\tau} (V \otimes V^*)^* \simeq \mathrm{Hom}(V, V)^* ,$$

где τ переводит $\xi \otimes v$ в линейную форму, которая сопоставляет $v' \otimes \xi'$ полную свертку $\xi(v')\xi'(v)$. Результирующая корреляция $\mathrm{Hom}(V, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, V)^*$ отвечает канонической билинейной форме $t(A, B) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tau A(B)$ на $\mathrm{Hom}(V, V)$. Будет ли эта форма невырождена? А симметрична? Как она выглядит на языке матриц? Что за квадратичная форма ей соответствует?

A8◇6. Как связана матрица тензорного произведения двух операторов с матрицами самих операторов? Пусть F — вложение, а $E \neq 0$ — тождественный оператор. Верно ли, что $F \otimes E$ — вложение?

A8◇7. Опишите цикловой тип тензорного квадрата нильпотентного оператора в терминах диаграммы Юнга самого оператора. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для операторов циклового типа **а)**  **б)**  **в)** 

A8◇8. Пусть операторы f и g диагонализуемы с собственными значениями $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d\}$ и $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d\}$ (все числа λ_i и μ_j попарно различны). Найдите все собственные значения $f \otimes g$ и их кратности.

A8◇9. Для любого ли векторного пространства V над полем нулевой характеристики справедливы изоморфизмы **а)** $V^{\otimes 2} \simeq S^2 V \oplus \Lambda^2 V$ **б)** $V^{\otimes 3} \simeq S^3 V \oplus \Lambda^3 V$?

A8◇10 (спинорное разложение). Пусть $V = \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$, где $\dim U_\pm = 2$. Выразите $S^2 V$ и $\Lambda^2 V$ через S^2 и Λ^2 от $U_\pm$ и $U_\pm^*$.

A8◇11. Пусть невырожденная комплексная квадрика $G \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ заданна квадратичной формой g с поляризацией $\widetilde{g}$. Будет ли билинейная форма $\Lambda^2 \widetilde{g}$ на $\Lambda^2 V$, действующая на разложимые бивекторы по правилу

$$\Lambda^2 \widetilde{g}(\, v_1 \wedge v_2 \,,\, w_1 \wedge w_2 \,) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \widetilde{g}(v_1, w_1) & \widetilde{g}(v_1, w_2) \\ \widetilde{g}(v_2, w_1) & \widetilde{g}(v_2, w_2) \end{pmatrix} ,$$

а) симметрична **б)** невраждена?

в) Найдите матрицу Грама этой формы в базисе, состаленном из попарных внешних произведений векторов какого-либо ортонормального базиса в V.

г) Верно ли, что пересечение соответствующей квадрики $\Lambda^2 G \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ с *квадрикой Плюккера* $Q = \{\omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0\}$ состоит из всех касательных к $G \subset \mathbb{P}_3$?

A8◇12. Покажите, что сопоставляя линейной оболочке пары неколлинеарных векторов u, v из 4-мерного комплексного пространства $V = \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$ грассманов бивектор $u \wedge v$, мы мы биективно отображаем грассманиан $\mathrm{Gr}(2, V)$ (т. е. многообразие всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$) на квадрику Плюккера $Q \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ из предыдущей задачи, причём два семейства прямых, живущих на квадрике Сегре $G \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U_-, U_+))$ перейдут при этом в пару невырожденных плоских коник, которые вырезаются из Q двумя дополнительными плоскостями $\Lambda_- = \mathbb{P}\left(S^2 U_-^* \otimes \Lambda^2 U_+\right)$ и $\Lambda_+ = \mathbb{P}\left(\Lambda^2 U_-^* \otimes S^2 U_+\right)$ (которые канонически вложены в $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathrm{Hom}(U_-, U_+))$ в силу предыдущей задачи). Покажите также, что обе эти коники получаются из прямых $\mathbb{P}_1^{\pm} = \mathbb{P}(U_{\pm})$ при помощи квадратичного вложения Веронезе. Короче говоря, мы имеем коммутативную диаграмму[1]:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(U_+) \arrow[rrr, hook, "\text{Веронезе}"] & & & \mathbb{P}(S^2U_+) \simeq \Lambda_+ \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}_1^+ \times \mathbb{P}_1^- \arrow[u, "\pi_+"] \arrow[d, "\pi_-"'] \arrow[r, "\text{Сегре}", "\sim"'] & G \subset \mathbb{P}\mathrm{Hom}(U_-, U_+) \arrow[rr, dashed, "\text{Плюккер}"] & & P \subset \mathbb{P}\begin{pmatrix} \Lambda^2 U_-^* \otimes S^2 U_+ \\ \oplus \\ S^2 U_-^* \otimes \Lambda^2 U_+ \end{pmatrix} \\
\mathbb{P}(U_-^*) \arrow[rrr, hook, "\text{Веронезе}"'] & & & \mathbb{P}(S^2U_-^*) \simeq \Lambda_- \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

A8◇13. В условиях предыдущих двух задач, оператор Ходжа $* : \Lambda^2 V \xrightarrow{\omega \mapsto \omega^*} \Lambda^2 V$, ассоциированный с g, определяется из соотношения $\omega_1 \wedge \omega_2^* = \Lambda^2 \widetilde{g}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ в котором $\omega_{1,2} \in \Lambda^2$ произвольны, а $e_i \in V$ составляют фиксированный ортонормальный базис формы g. Покажите что это определение корректно (не зависит от выбора базиса), опишите собственные подпространства оператора Ходжа и укажите их место в предыдущей картинке.

A8◇14 (поляризация многочлена). Над полем характеристики нуль постройте канонические изоморфизмы векторных пространств между симметричными полилинейными формами от n аргументов $V \times V \times \cdots \times V \xrightarrow{\varphi} \Bbbk$, симметрическими тензорами из произведения $(V^*)^{\otimes n}$ и пространством $S^n V^*$ однородных полиномиальных функций степени n от одного аргумента[2] $V \xrightarrow{f} \Bbbk$.

A8◇15. Опишите явно действие отображения $V \times S^n V^* \longrightarrow S^{n-1} V^*$, которое сопоставляет вектору v и однородному многочлену f степени n однородный многочлен g степени $(n-1)$, определяемый тем, что

$$\widetilde{f}(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \widetilde{g}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \quad \forall\, w_1, w_2, \dots, w_{n-1} \in V\ ,$$

где $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ суть полилинейные формы[3] $V \times V \times \cdots \times V \longrightarrow \Bbbk$, отвечающие f и g при каноническом изоморфизме из предыдущей задачи.

[1] отображение Плюккера показано пунктиром, поскольку переводит прямые в точки

[2] т. е. функциями, которые (в произвольном базисе) записываются однородным многочленом степени n от координат

[3] симметричные и зависящие от n и $n-1$ аргументов соответственно