Нормальные формы линейных операторов

A7◇1°. Докажите, что всякая изометрия стандартного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ является поворотом вокруг некоторой прямой и найдите эту прямую и угол поворота для операторов[1]
а) $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/6 & 2\sqrt{2}/3 & \sqrt{2}/6 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

A7◇2 (параметризация Кэли). Докажите, что $K \longmapsto (E-K)(E+K)^{-1}$ является биекцией между вещественными кососимметричными матрицами и ортогональными матрицами без собственного значения -1.

A7◇3. Верно ли, что $K \longmapsto e^K$ является биекцией между:
а) вещественными кососимметричными и ортогональными матрицами?
б) комплексными косоэрмитовыми и унитарными матрицами?

A7◇4. Равносильна ли нормальность[2] A требованию: **а)** $||Av|| = ||A^*v|| \quad \forall\, v \in V$?
б) $A_+A_- = A_-A_+$ в разложении $A = A_+ + A_-$ на $A_+ = A_+^*$ и $A_- = -A_-^*$.

A7◇5. Докажите, что уравнение $X^k = A$ с произвольным нормальным A разрешимо относительно X в области нормальных операторов, и найдите количество нормальных решений. Можно ли искать решение в виде многочлена от A?

A7◇6. Докажите, что для любого унитарного оператора A в эрмитовом пространстве и любого натурального k существует унитарный оператор B, являющийся многочленом от A, и такой, что $B^k = A$.

A7◇7 (полярное разложение). Постройте для любого невырожденного оператора A разложения $A = I_1S_1 = S_2I_2$, в которых I_1, I_2 изометрии, а S_1, S_2 самосопряжены и положительны[3], и докажите, что каждое из них единственно[4].

A7◇8. Найдите полярное разложение операторов: **а)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

A7◇9. Равносильны ли нормальности A такие свойства его полярного разложения:
а) $I_1 = I_2$ и $S_1 = S_2$; **б)** I_1 и S_1 перестановочны; **в)** I_2 и S_2 перестановочны.

A7◇10. Всякая ли унитарная матрица является произведением ортогональной вещественной и симметричной комплексной матрицы?

A7◇11*. Всякую ли квадратную матрицу можно представить в виде произведения двух симметрических матриц, одна из которых невырождена?

A7◇12*. Докажите, что группы $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ и U_n компактны. Связны ли они?

A7◇13. Диагонализуем ли оператор, удовлетворяющий уравнению $A^3 - 6A^2 + 11A - 6E = 0$?

A7◇14. Найдите ЖНФ J_λ^2, где J_λ жорданова клетка с **а)** $\lambda \neq 0$ **б)** $\lambda = 0$.

A7◇15. Как связаны (над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$) собственные числа $n \times n$ матрицы A и матриц[5]: **а)** $\Lambda^m A$? **б)** $S^m A$? **в)** A^m ? **г)** $f(A)$, где $f \in \Bbbk[x]$?

A7◇16*. Верно ли разложение $\det^{-1}(E - tA) = \sum\limits_{m \geqslant 0} \mathrm{tr}\,(S^m A) \cdot t^k$?

A7◇17*. Пусть $\chi_A(t) = \det(tE - A) = \prod(t - \lambda_\nu)$ и $f \in \Bbbk[t]$. Покажите, что $\det f(A) = \prod f(\lambda_\nu)$ и равен результанту $R_{\chi,f}$.

---

[1] убедившись сначала, что они ортогональны

[2] оператор A на эрмитовом или евклидовом пространстве называется *нормальным*, если $A^*A = A^*A$

[3] самосопряжённый оператор F на евклидовом или эрмитовом пространстве называется *положительным*, если отвечающая ему квадратичная форма (v, Fv) положительно определена

[4] т. е. множители I, S однозначно определяются по A

[5] через $S^m A$ и $\Lambda^m A$ обозначаются матрицы линейного преобразования $f(x) \mapsto f(Ax)$ пространства однородных многочленов степени m от n коммутирующих и антикоммутирующих переменных соответственно