Скалярные произведения и линейные операторы на пространствах со скалярным произведением

А6◇1. Существует ли пространство V с билинейной формой β и подпространство $L \subset V$, дополнительное к ядру корреляции $V \xrightarrow{v \mapsto \beta(v,*)} V^*$, такие что ограничение $\beta|_L$ вырождено, если форма β **а)** (косо) симметрична? **б)** произвольна?

А6◇2. Докажите, что если ограничение билинейной формы β с пространства V на подпространство $U \subset V$ невырождено, то $V = U \oplus U^{\perp}$, где $U^{\perp} = \{ w \in V \mid \beta(u,w) = 0 \ \ \forall u \in U \}$.

А6◇3. Перечислите все анизотропные формы над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

А6◇4. Пусть $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ и $\eta \in \mathbb{F}_p$ какой-либо фиксированный не квадрат. Докажите, что над полем $\mathbb{F}_p$ всякая квадратичная форма

а) от 2 переменных принимает все значения из $\mathbb{F}_p$, если она невырождена;

б) от $\geqslant 3$ переменных обладает ненулевым изотропным вектором;

в) приводится к виду $x_1^2 + x_2^2 + \ \cdots \ + x_{m-1}^2 + \varepsilon \cdot x_m^2$, где ε равен либо 1, либо η.

А6◇5. Найдите сигнатуру вещественных матриц Грама:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, **в)** $\begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}$, где $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

А6◇6 (келеровы тройки). Обозначим через g и ω вещественную и мнимую части эрмитова скалярного произведения $(*,*)$ на n-мерном комплексным векторном пространстве:

$$(u,w) = g(u,w) + i\omega(u,w) \ , \qquad g, \omega : W \times W \longrightarrow \mathbb{R} \ ,$$

а через $W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{I} W_{\mathbb{R}}$ оператор умножения на i. Покажите, что

а) g задаёт евклидову структуру на $W_{\mathbb{R}}$;

б) ω является невырожденной кососимметричной формой на $W_{\mathbb{R}}$

в) $I \in \mathrm{O}_g(W_{\mathbb{R}}) \cap \mathrm{Sp}_{\omega}(W_{\mathbb{R}})$, т. е. I является изометрией как g, так и ω;

г) любые два элемента тройки (I, g, ω) однозначно определяют третий.

А6◇7. Для любого ли оператора A операторы A^*A и AA^* будут:

а) самосопряжены? **б)** неотрицательны[1]? **в)** положительны?

А6◇8. Верно ли, что: **а)** $(\ker A)^{\perp} = \operatorname{im} A^*$

б) ортогональные дополнения к инвариантным подпространствам оператора A инвариантны относительно A^*?

в) если A проектирует V на V_1 вдоль V_2 в некотором (не обязательно ортогональном) разложении $V = V_1 \oplus V_2$, то $V = V_1^{\perp} \oplus V_2^{\perp}$ и A^* проектирует V на $V_2^{\perp}$ вдоль $V_1^{\perp}$.

А6◇9 (теорема Шура). Докажите, что в эрмитовом пространстве каждый оператор имеет верхнетреугольную матрицу в подходящем ортонормальном базисе[2]

А6◇10. На пространстве гладких периодических функций $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ с периодом $T > 0$ со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_0^T f(x)g(x)\,dx$ вычислите операторы, сопряженные к операторам дифференцирования и умножения на функцию, а также оператор, сопряжённый к произвольному линейному дифференциальному оператору

$$L = a_k(x)\frac{d^k}{dx^k} + a_{k-1}(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + \ \cdots \ + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

[1]оператор B называется *неотрицательным*, если $(Bv,v) \geqslant 0 \ \forall v$ и *положительным*, если вдобавок $(Bv,v) = 0 \Rightarrow v = 0$

[2]и в частности, обладает инвариантными подпространствами любой промежуточной размерности

(с гладкими T-периодическими коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_k$). Является ли самосопряжённым оператор $\sin^2\left(\frac{2\pi x}{T}\right)\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{4\pi x}{T}\right)\frac{d}{dx}$?

А6◇11. Как изменится ответ предыдущей задачи для пространства гладких функций на $[0,1]$, обращающихся на концах отрезка в нуль вместе со всеми производными? Является ли самосопряжённым оператор $L = x^2(x-1)^2\frac{d^2}{dx^2} + 2x(x-1)\frac{d}{dx}$?

А6◇12. На пространстве $\mathbb{R}[x]$ со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ найдите оператор сопряженный к интегральному оператору $f(t) \longmapsto \int\limits_{-1}^{1} K(s,t)f(t)\,dt$ с произвольно заданным полиномиальным ядром $K[x,y] \in \mathbb{R}[x,y]$.

А6◇13. Верно ли, что полагая в предыдущей задаче $K(x,y) = xy$, мы получим самосопряженный оператор для которого многочлены Лежандра образуют ортогональный базис из собственных векторов?

А6◇14. Найдите оператор, сопряженный оператору Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ на пространстве $\mathbb{R}[x,y,z]$ со скалярным произведением, для которого базисные мономы $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ попарно ортогональны со скалярными квадратами $\alpha!\beta!\gamma!$.

А6◇15. Рассмотрим в пространстве P_m однородных многочленов степени m от трех переменных подпространство $H_m = \{f(x,y,z) \mid \Delta f \equiv 0\}$ и обозначим через $\varrho^2 \in P_2$ многочлен $x^2+y^2+z^2$. Верно ли, что[3] $P_m = H_m \oplus \varrho^2 H_{m-2} \oplus \varrho^4 H_{m-4} \oplus \cdots$?

А6◇16 (нормальные операторы). Равносильны ли друг другу следующие условия на оператор $V \xrightarrow{A} V$ на эрмитовом или евклидовом пространстве:

а) $A \cdot A^* = A^* \cdot A$ **б)** всякий собственный вектор A собственен и для A^*;

в) ортогонал любого A-инвариантного подпространства A-инвариантен;

г) всякое A-инвариантное подпространство A^*-инвариантно;

д) матрица A диагональна в некотором ортогональном базисе.

А6◇17. Докажите, что любое множество попарно перестановочных нормальных операторов одновременно приводится к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе.

[3] на самом деле речь тут идёт о разложении пространства однородных многочленов в прямую сумму минимальных подпространств, инвариантных относительно действия группы SO_3 линейными заменами переменных