Аффинная геометрия

А3◇1 (барицентр). Покажите, что для любого набора взвешенных точек

$$A_1, A_2, \dots, A_k \quad \text{с весами} \quad m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{F} \ : \quad \sum m_\nu \neq 0$$

существует единственная точка[1] B такая, что $\sum m_i \cdot \overrightarrow{BA_i} = 0$, причём если разбить точки на n групп с суммарными весами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ и обозначить через $B_1, B_2, \dots, B_n$ центры тяжести этих групп, точка B будет центром тяжести точек B_i с весами μ_i.

А3◇2. Пусть группа G действует аффинно-линейными преобразованиями на аффинного пространстве. Докажите, что если у G есть конечная орбита, то у G есть и неподвижная точка.

А3◇3 (барицентрические координаты). Пусть $(n+1)$ точек $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{A}^n$ не лежат в одной гиперплоскости. Сопоставим каждому набору весов $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ с $\sum \lambda_i = 1$ барицентр точек A_i с весами λ_i (он обозначается $\sum \lambda_i A_i$). Покажите, что получится биекция между такими наборами весов и точками $\mathbb{A}^n$. Нарисуйте все точки вещественной плоскости, веса (α, β, γ) которых относительно данного $\triangle\, ABC$ удовлетворяют условиям:

а) $\alpha, \beta, \gamma > 0$ **б)** $\alpha, \beta > 0\,,\ \gamma < 0$ **в)** $\alpha = \beta$ **г)** $\alpha, \beta > 1/3\,,\ \gamma > 0$ **д)** $\alpha \geqslant \beta$ **е)** $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$

и напишите условия на веса, задающие треугольники:

ж) на которые $\triangle\, ABC$ разрезается своими медианами (их всего 6).

з) гомотетичные $\triangle\, ABC$ с коэффициентами 3 и 1/3 относительно центра тяжести;

А3◇4. Медианой в наборе точек $P_1, P_2, \dots, P_k$ называется отрезок, соединяющий одну из точек с (равновесным) барицентром остальных. Верно ли, что все медианы пересекаются в одной точке, и если да, то в каком отношении они делятся точкой пересечения?

А3◇5 (выпуклые оболочки). Подмножество вещественного аффинного пространства называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками $A, B \in M$ оно содержит *отрезок*

$$[A, B] \stackrel{\text{def}}{=} \{P = \alpha A + \beta B \mid \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1\}\ .$$

Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данное множество M называется *выпуклой оболочкой* множества M и обозначается $\operatorname{conv}(M)$. Верно ли, что:

а) $\operatorname{conv}(M) = \{P = \sum \lambda_i M_i \mid M_i \in M\ ,\ \lambda_i \geqslant 0\ ,\ \sum \lambda_i = 1\}$

б) $\operatorname{conv}(M \cup N) = \cup [AB]$ по всем $A \in M$, $B \in N$

в) выпуклая оболочка компакта компакт[2]

А3◇6. Нарисуйте какую-нибудь 2-мерную проекцию стандартного 4-мерного куба и какую-нибудь «развертку» его 3-мерной «поверхности» с указаниями, как ее склеивать.

А3◇7. Опишите и нарисуйте семейство трехмерных многогранников, получающихся в сечении

а) стандартного 4-мерного куба $|x_i| \leqslant 1$ в $\mathbb{R}^4$ семейством гиперплоскостей

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = t \quad \text{с} \quad -4 \leqslant t \leqslant 4$$

б) стандартного 4-мерного симплекса $\sum x_i = 1$, $x_i \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^5$ семействами плоскостей:

$$(1) \quad x_1 = \text{const} \qquad (2) \quad x_1 + x_2 = \text{const}$$

А3◇8. Для каждого $m = 0, 1, \dots, (n-1)$ подсчитайте число m-мерных граней, а также число внутренних[3] диагоналей у n-мерного **а)** куба **б)** кокуба[4] **в)** симплекса[5].

---

[1] называемая *барицентром*

[2] базисом открытых множеств вещественного аффинного пространства мы считаем открытые параллелипипеды

[3] т. е. не содержащихся в грани

[4] *кокубом* называется выпуклая оболочка центров граней куба

[5] *n-мерным симплексом* называется выпуклая оболочка $n+1$ не лежащих в одной гиперплоскости точек из $\mathbb{A}^n$

А3◇9. Выясните каком отношении делит внутреннюю диагональ n-мерного

а) куба **б)** кокуба

барицентр набора точек, состоящего конца этой этой диагонали и всех вершин, соединенных с нею ребром.

А3◇10* (теорема Хелли). Докажите, что если в некотором наборе выпуклых фигур

$$K_1, K_2, \ldots, K_m \subset \mathbb{A}^n$$

любые $(n+1)$ фигур имеют общую точку, все и все m фигур имеют общую точку[6], а также приведите примеры, показывающие, что условие выпуклости нельзя отбросить, а число $n+1$ нельзя уменьшить.

А3◇11*. Верна ли теорема Хелли для бесконечного набора

а) компактных **б)** не компактных

выпуклых фигур?

А3◇12. Всякое ли покрытие $\mathbb{A}^n$ полупространствами содержит подпокрытие, состоящее из $n+1$ полупространства?

А3◇13* (теорема Юнга). Докажите, что любая плоская клякса диаметром[7] $\leqslant 1$ закрывается блюдцем радиуса $1/\sqrt{3}$, и придумайте обобщение этого факта на кляксы старших размерностей.

[6] Один из способов — индукция по m, начиная с $m = n+2$ (но внимание: возможно, что не все $(n+2)$ точки, лежащие в пересечениях всех сочетаний из $(n+1)$ фигур, служат вершинами своей выпуклой оболочки); полезно сначала разобрать случаи $n = 2, 3$.

[7] *диаметром* фигуры называется максимальное расстояние между её точками (если таковое существует)