Проективная геометрия

А1◇1°. Сколько имеется **а)** точек **б)** k-мерных проективных подпространств в n-мерном проективном пространстве над полем из q элементов.

А1◇2°. Напишите точную оценку снизу на размерность пересечения d_1-мерного и d_2-мерного проективных подпространств в $\mathbb{P}_n$. Есть ли на $\mathbb{P}_2$ параллельные прямые?

А1◇3. Пусть $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n$ — непересекающиеся подпространства размерностей d_1 и d_2, таких что $d_1+d_2 = n-1$. Покажите, что для любой точки $p \in \mathbb{P}_n \setminus (L_1 \sqcup L_2)$ существует единственная прямая $\ell \ni p$, пересекающая как L_1, так и L_2.

А1◇4 (линейная проективная группа). Отображение $\widetilde{F} : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$, индуцированное линейным изоморфизмом $F : V \xrightarrow{\sim} V$ называется *линейным проективным преобразованием* (сокр. лпп). Верно ли, что: **а)** $\widetilde{F} = \widetilde{G} \iff F = \lambda \cdot G$, где λ — ненулевая константа?

б) неподвижные точки лпп составляют объединение непересекающихся подпространств?

в) любые $(n+2)$ разные точки на $\mathbb{P}_n$, никакие $(n+1)$ из которых на лежат в одной гиперплоскости, переводятся в любые другие такие $(n+2)$ точки единственным лпп?

А1◇5. Для кривых в $\mathbb{RP}_2$, заданных в стандартной аффинной карте U_0 уравнениями:
а) $y = x^2$ **б)** $y = x^3$ **в)** $y^2 + (x-1)^2 = 1$ **г)** $y^2 = x^2(x+1)$
напишите их глобальные однородные уравнения и локальные аффинные уравнения в двух других стандартных картах U_1 U_2. Нарисуйте все эти 12 аффинных кривых.

А1◇6. Покажите, что неприводимая коника[1] на $\mathbb{CP}_2$ допускает параметризацию вида $(t_0 : t_1) \mapsto \big(f_0(t_0,t_1) : f_1(t_0,t_1) : f_2(t_0,t_1)\big)$, где f_0, f_1, f_2 — взаимно простые однородные многочлены степени 2. Сколько точек пересечения могут иметь две коники без общих компонент?

А1◇7. Вложим «школьную» евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{CP}_2$ в качестве действительной части стандартной аффинной карты U_0.

а) Найдите в $\mathbb{CP}_2$ две точки, лежащие на всех кониках, видных в $\mathbb{R}^2$ как окружности.

б) Верно ли, что любая коника, проходящая через эти две точки и имеющая хотя бы 3 неколлинеарные точки в $\mathbb{R}^2$, будет видна в $\mathbb{R}^2$ как окружность?

А1◇8 (кривая Веронезе). Обозначим через U 2-мерное векторное пространство однородных линейных форм от переменных (t_0, t_1), а через S^dU — пространство однородных форм степени d от (t_0, t_1). Вложение $c_d : \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U) \xhookrightarrow{\psi \mapsto \psi^d} \mathbb{P}(S^dU) = \mathbb{P}_d$ называется *кривой Веронезе* (или *рациональной нормальной кривой*) степени d. Верно ли что:

а) при $1 \leqslant m \leqslant d$ никакие $m+1$ точек на C_d не лежат в $(m-1)$-мерном подпространстве?

б) всякая кривая $C \subset \mathbb{P}_2$, задаваемая в однородных координатах параметрическим уравнением $(t_0 : t_1) \mapsto \big(f_0(t_0,t_1) : f_1(t_0,t_1) : f_2(t_0,t_1)\big)$, где f_0, f_1, f_2 — взаимно простые однородные многочлены одинаковой степени d, является проекцией C_d?

в*) Задайте C_d явными квадратичными уравнениями (начните с $C_3 \subset \mathbb{P}_3$)

А1◇9. В условиях предыдущей задачи вычислите проекцию[2] кубики Веронезе $C_3 \subset \mathbb{P}_3$:

а) из точки t_0^3 на плоскость, натянутую на $3\,t_0^2t_1$, $3\,t_0t_1^2$, и t_1^3

б) из точки $3\,t_0^2t_1$ на плоскость, натянутую на t_0^3, $3\,t_0t_1^2$, and t_1^3

в) из точки $t_0^3 + t_1^3$ на плоскость, натянутую на t_0^3, $3\,t_0^2t_1$, and $3\,t_0t_1^2$

А1◇10*. Выведите из предыдущей задачи, что неособая кубическая кривая на $\mathbb{P}_2$ не допускает рациональной параметризации.

---

[1] *коникой* называется плоская проективная кривая, задаваемых однородным многочленом степени 2; *неприводимость*, по-определению, означает неприводимость этого многочлена

[2] точнее, выпишите явно параметрическое представление для проекции в подходящих координатах, затем найдите ее однородное уравнение, а также аффинное уравнение в какой-нибудь карте; нарисуйте результат, выясните чему равна степень полученной кривой и есть ли у неё особенности (т. е. самопересечения и/или острия)