§14. Отступление: многообразия Веронезе и Грассмана.

14.1. Многообразие Веронезе $\mathbf{Ver}(d, V^*) \subset \mathbb{P}(S^d V^*)$ определяется как проективизация множества однородных полиномов степени d, которые являются полными d-тыми степенями линейных форм, т. е. имеют вид $f = \varphi^d$, где $\varphi \in V^*$.

Упражнение 14.1. Проверьте, что *отображение Веронезе*

$$\mathbb{P}(V^*) \xhookrightarrow{\varphi \mapsto \varphi^d} \qquad (14\text{-}1)$$

устанавливает биекцию между $\mathrm{Ver}(d, V^*)$ и $\mathbb{P}(V^*)$, и явно выпишите параметрическое представление для $\mathrm{Ver}(n, k)$ в удобном базисе пространства $\mathbb{P}(S^d V^*)$.

Упражнение 14.2 (принцип Аронгольда). Покажите, что $\mathrm{Ver}(d, V^*) \subset \mathbb{P}(S^d V^*)$ не содержится ни в какой гиперплоскости[1].

Упражнение 14.3. Используйте принцип Аронгольда для получения другого доказательства формулы Тейлора (13-12).

Иначе $\mathrm{Ver}(d, V^*)$ можно описать как множество многочленов $f \in S^d V^*$ с *минимально возможным* (одномерным) линейным носителем $\mathrm{span}(f) = \Bbbk \cdot \varphi \subset V^*$. Согласно n° 13.4.7, условие $\dim \mathrm{span}(f) = 1$ равносильно тому, что всевозможные $(n-1)$-кратные частные производные (13-15) от f порождают пропорциональны друг другу[2]. Если записать коэффициенты всех линейных форм

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_{n-1}}} f(x) \,,$$

по столбцам прямоугольной матрицы, то условие $f \in \mathrm{Ver}(d, V^*)$ запишется системой квадратичных уравнений, требующих обращения в нуль всех 2×2 – миноров этой матрицы.

Упражнение 14.4. Каков будет размер этой матрицы и сколько всего получится уравнений?

14.1.1. Пример: рациональная нормальная кривая. В случае, когда $\dim V = 1$ мы получаем в (14-1) *кривую Веронезе*, с которой мы уже встречались в упр. 1.14, и которую называют также *рациональной нормальной кривой* степени d в $\mathbb{P}_d$, поскольку она имеет естественную параметризацию однородными многочленами степени d: если фиксировать в V^* базис $\{t_0, t_1\}$, а в качестве базиса в $S^d V^*$ взять одночлены

$$\binom{n}{i} t_0^i t_1^{n-i} \,, \quad 0 \leqslant i \leqslant n \,,$$

то вложение Веронезе (14-1) будет записываться формулой

$$(\alpha_0 : \alpha_1) \longmapsto (a_0 : a_1 : \ \ldots \ : a_n) = \left(\alpha_0^d : \alpha_0^{d-1}\alpha_1 : \alpha_0^{d-2}\alpha_1^2 : \ \ldots \ : \alpha_1^d\right) \,.$$

Матрица $(d-1)$-кратных производных от $f = \sum\limits_i a_i \cdot \binom{n}{i} t_0^{n-i} t_1^i \in S^d V^*$ состоит из коэффициентов $(d+1)$ линейных форм

$$\frac{\partial^i}{\partial t_1^i} \frac{\partial^{n-1-i}}{\partial t_0^{n-1-i}} f(t) = n!(a_i t_0 + a_{i+1} t_1) \,, \quad \text{где } 0 \leqslant i \leqslant (n-1) \,,$$

и условие $f \in \mathrm{Ver}(d, V^*)$ равносильно условию $\mathrm{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = 1$, которое записывается системой квадратных уравнений

$$q_{ij}(a) \overset{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} a_{i-1} & a_{j-1} \\ a_i & a_j \end{pmatrix} = 0 \qquad (\text{для всех } 1 \leqslant i < j \leqslant n) \,. \qquad (14\text{-}2)$$

[1] из этого вытекает, в частности, что любое утверждение про многочлены, которое линейно по каждому из участвующих в нём многочленов (например, формулу Тейлора), достаточно проверять в предположении, что все многочлены суть чистые степени (произвольных) линейных форм, что нередко упрощает дело (например, для формулы Тейлора) — именно это наблюдение и называется *принципом Аронгольда*

[2] отметим, что линейная форма φ для которой $f = \varphi^d$ также пропорциональна любой отличной от нуля $(n-1)$-кратной частной производной от f

Так, при $n = 2$ мы получаем конику Веронезе из n° 2.4.3, задаваемую уравнением $a_0a_2 = a_1^2$, а при $n = 3$ — кубику Веронезе (её ещё называют *скрученной кубикой*), являющуюся пересечением трёх квадрик

$$\begin{aligned} q_{12}(a) &= a_1a_3 - a_2^2 = 0 \\ q_{13}(a) &= a_0a_3 - a_1a_2 = 0 \\ q_{23}(a) &= a_0a_2 - a_1^2 = 0 \end{aligned} \tag{14-3}$$

Упражнение 14.5. Нарисуйте картинку и удостоверьтесь, что q_{12} и q_{23} суть простые конусы с вершинами в $(1 : 0 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 0 : 1)$ и с общей образующей $a_1 = a_2 = 0$, проходящей через эти вершины, а q_{13} есть квадрика Сегре, не содержащая прямую $a_1 = a_2 = 0$, но содержащая образующую $a_2 = a_3 = 0$ конуса q_{12} и образующую $a_0 = a_1 = 0$ конуса q_{23}, которые скрещиваются и лежат в одном и том же семействе прямолинейных образующих q_{13}. Таким образом, любые две из трех квадрик q_{ij} пересекаются по объединению скрученной кубики с еще одной «лишней» прямой, т. е. никаие два из наших трёх уравнений кривую Веронезе не определяют!

Упражнение 14.6. Покажите, что всякая кривая, задаваемая параметрическим уравнением

$$\alpha \longmapsto (p_0(\alpha) : p_1(\alpha) : \ \dots \ p_n(\alpha)) \ ,$$

где $p_0, p_1, \dots, p_n \in S^nV^*$ — произвольные линейно независимые многочлены, подходящим линейным автоморфизмом $\mathbb{P}_n$ переводится в кривую Веронезе.

Указание. Матрица искомого линейного преобразования обратна к матрице, по строкам которой стоят коэффициенты многочленов p_i.

14.1.2. Пример: плоские проекции скрученной кубики. Опишем все плоские кривые, которые можно получить проектируя скрученную кубику $C_3 \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(S^3V^*)$ из точки на плоскость.

При фиксированном центре проекции кривые, получающиеся проектированием на разные «экранные» плоскости переводятся друг в друга линейной обратимой заменой координат — проекцией одной экранной плоскости на другую, поэтому от выбора экранной плоскости геометрические свойства проекции не зависят. Центр же проектирования $p = p(t) = \ell_1(t)\ell_2(t)\ell_3(t) \in \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(S^3V^*)$ можно выбрать тремя геометрически разными способами: либо $p \in C$, что в подходящих координатах выглядит как $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = t_0^2$, либо p лежит на касательной к C_3, т. е. в подходящих координатах $\ell_1 = \ell_2 = t_0$, $\ell_3 = t_1$, либо p не лежит ни на одной из касательных к C_3, т. е. $p(t)$ имеет 3 различных корня, и, не умаляя общности, мы можем считать, что $p(t) = (t_0 + t_1)(t_0 + \omega\, t_1)(t_0 + \omega^2 t_1) = t_0^3 + t_1^3$, где $\omega = \sqrt[3]{1} \neq 1$.

В первом случае, когда $p = (1 : 0 : 0 : 0)$, выберем в качестве экрана плоскость $a_0 = 0$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2) = (a_1 : a_2 : a_3)$. Тогда проекция будет задаваться параметрическими уравнениями $(x_0 : x_1 : x_2) = (\alpha_0^2 : \alpha_0\alpha_1 : \alpha_1^2)$, т. е. будет плоской коникой Веронезе $x_0x_2 = x_1^2$.

Во втором случае, когда $p = (0 : 1 : 0 : 0)$, выберем в качестве экрана плоскость $a_1 = 0$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2) = (a_0 : a_2 : a_3)$. Тогда проекция будет задаваться параметрическими уравнениями $(x_0 : x_1 : x_2) = (\alpha_0^3 : \alpha_0\alpha_1^2 : \alpha_1^3)$, которые в аффинной карте $\{x_0 = 1\}$ превращаются в $x = \alpha^2$, $y = \alpha^3$, где $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$, и $\alpha = \alpha_1/\alpha_0$. Таким образом, мы получаем кривую $y^2 = x^3$ или, в однородных координатах, $x_2^3 = x_3^2x_0$. Эта кривая называется *каспидальной кубикой*, поскольку имеет особенность – остриё в начале координат.

В третьем случае, когда $p = (1 : 0 : 0 : 1)$, выберем в качестве экрана плоскость $a_2 = 0$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2) = ((a_0 - a_1) : a_1 : a_2)$ (которые отвечают базису $\{\, t_0^3 , 3\, t_0^2t_1 \, , \, 3\, t_0t_1^2 \, , \, t_0^3 + t_1^3 \,\}$). Проекцией скрученной кубики C_3 из $p = t_0^3 + t_1^3$ на эту плоскость является кривая с параметрическим уравнением $(x_0 : x_1 : x_2) = \big((\alpha_0^3 - \alpha_1^3) : \alpha_0^2\alpha_1 : \alpha_0\alpha_1^2\big)$, которое в аффинной карте $x_0 = 1$ превращается в $x = \alpha/(1 - \alpha^3)$, $y = \alpha^2/(1 - \alpha^3)$. Эта аффинная кривая имеет уравнение $xy = x^3 - y^3$ и называется *нодальной кубикой*[3], поскольку в начале координат она имеет особенность – самопересечение.

14.1.3. Пример: плоские рациональные кривые. Кривая $C \subset \mathbb{P}_2$ называется *рациональной*, если её почти всюду можно задать рациональными параметрическими уравнениями, а точнее, если найдутся три взаимно простых в совокупности однородных многочлена одинаковой степени $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ от $t = (t_0 : t_1)$, таких что отображение

$$\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\alpha \mapsto (p_0(\alpha) : p_1(\alpha) : p_2(\alpha))} \mathbb{P}_2$$

является биекцией между $\mathbb{P}_1$ и C всюду кроме, может быть, конечного множества точек.

[3] в некоторых учебниках по анализу её ещё иногда называют *декартовым листом*

Упражнение 14.7. Пересекая C прямыми, покажите, что $\deg C = \deg p_i$.

Если $\deg p_i = d$, то отображение $(t_0^d : t_0^{d-1}t_1 : \dots : t_0 t_1^{d-1} : t_1^d) \longmapsto (p_0(t) : p_1(t) : p_2(t))$ задаёт проекцию кривой Веронезе $C_d \subset \mathbb{P}_d$ на некоторую плоскость $\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{P}_d$. Таким образом, каждая рациональная плоская кривая степени d является плоской проекцией кривой Веронезе $C_d \subset \mathbb{P}_d$.

14.1.4. СЛЕДСТВИЕ. *Гладкая плоская кубическая кривая не рациональна.*

Доказательство. Рациональная кубическая кривая на $\mathbb{P}_2$ является плоской проекцией скрученной кубики $C_3 \subset \mathbb{P}_3$, а такие проекции исчерпываются, как мы видели, гладкой коникой и особыми кубиками. □

14.2. Кривая Веронезе как график инцидентности. Зафиксируем на кривой Веронезе $C_n \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(S^n V^*)$ произвольные n различных точек $p_i = \xi_i^n$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Они служат вершинами невырожденного $(n-1)$–мерного симплекса $(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Для каждого i рассмотрим пучок гиперплоскостей, проходящих через противоположную к вершине p_i $(n-2)$-мерную грань $(p_1, \dots p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n)$ этого симплекса. Эти n пучков могут быть следующим образом согласованно запараметризованы точками проективной прямой $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(V)$: для каждого $\xi \in \mathbb{P}(V^*)$ обозначим через $\widehat{\xi} \in \mathbb{P}(V)$ его аннулятор[4] $\operatorname{Ann}(\xi)$, для каждого i возьмем произведение $\tau_i = \widehat{\xi}_1, \cdots, \widehat{\xi}_{i-1}\widehat{\xi}_{i+1}, \cdots, \widehat{\xi}_1 \in S^{n-1}V$ и определим плоскость $\pi_i(u) \subset \mathbb{P}(S^n V^*)$, соответствующую в i-м пучке точке $u \in \mathbb{P}(V)$, как аннулятор вектора $u\tau_i \in S^n V$. Иначе говоря,

$$\pi_i(u) = \left\{ f(t) \in S^n V^* \mid \widetilde{f}(\widehat{\xi}_1, \dots, \widehat{\xi}_{i-1}, u, \widehat{\xi}_{i+1}, \dots, \widehat{\xi}_n) = 0 \right\}$$

где $\widetilde{f}$ есть полная поляризация f, рассматриваемая как симметрическая полилинейная форма на V. В частности, для $f(t) = \zeta^n(t) \in C_n$ мы имеем

$$\widetilde{(\zeta^n)}(\widehat{\xi}_1, \dots, \widehat{\xi}_{i-1}, u, \widehat{\xi}_{i+1}, \dots, \widehat{\xi}_n) = \zeta(u) \prod_{\nu \neq i} \zeta\left(\widehat{\xi}_\nu\right) .$$

Таким образом, для каждого $u \in \mathbb{P}(V)$ плоскость $\pi_i(u)$ проходит через все $p_\nu = \xi_\nu^n$ с $\nu \neq i$ и через точку $p = \xi^n \in C_n$, у которой ξ аннулирует u (т.е. $u = \widehat{\xi}$). Другими словами,

$$C_n = \bigcup_u \pi_1(u) \cap \pi_2(u) \cap \cdots \cap \pi_n(u) \tag{14-4}$$

Поскольку линейный изоморфизм между проективными прямыми однозначно определяется своим действием на любых трёх различных точках, мы заключаем, что кривая Веронезе однозначно восстанавливается по любым своим $(n+3)$ различным точкам $a, b, c, p_1, p_2, \dots, p_n$: для этого надо согласованно запараметризовать n пучков гиперплоскостей, проходящих через $(n-2)$-мерные грани симплекса $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ точками $u \in \mathbb{P}_1$ так, чтобы проходящие через точки a, b, c гиперплоскости всех пучков отвечали значениям $u = 0, 1, \infty$; тогда C_n будет в точности графиком инцидентности (14-4).

На $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(S^n V^*)$ действует группа PGL_2 линейных замен $(t_0, t_1) \longmapsto (at_0 + bt_1, ct_0 + dt_1)$. Проективные автоморфизмы $\mathbb{P}(S^n V^*) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(S^n V^*)$, лежащие в этой группе, переводят кривую Веронезе в себя. Мы будем называть их дробно линейными перепараметризациями кривой Веронезе. Следующий результат может рассматриваться как продолжение леммы из n° 1.9.1:

14.2.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Любые $n+3$ различные точки $p_1, p_2, \dots, p_n, a, b, c \in \mathbb{P}(S^n V^*)$, никакие $(n+1)$ из которых не лежат в одной гиперплоскости, могут быть одновременно переведены на кривую Веронезе некоторым проективным линейным изоморфизмом, причём этот изоморфизм единственен с точностью до дробно линейной перепараметризации кривой Веронезе.*

Доказательство. Для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ отождествим $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(V)$ с пучком гиперплоскостей, содержащих i-тую грань $p_1, \dots p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n$, так чтобы гиперплоскости, проходящие через точки a, b,

[4]если $\xi = \alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1$, то $\widehat{\xi} = \alpha_1 e_0 - \alpha_0 e_1$, где $\{e_o, e_1\} \subset V$ есть базис V, дуальный к $\{t_0, t_1\} \subset V^*$

c, отвечали значениям $u = e_0, e_1, (e_1 - e_0)$, и будем обозначать u-ю гиперплоскость i-того пучка через $\pi_i(u)$. Пусть гиперплоскость $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ появляется в i-м пучке при $u = u_i$. Тогда все точки $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{P}(V)$ попарно различны по следующей причине.

Рассмотрим 2-мерную плоскость $\Pi = (a, b, c)$ и обозначим через q_1 и q_2 ее пересечения с i-й and j-й $(n-2)$-мерными гранями $(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Ограничивая всю нашу конфигурацию на эту плоскости, мы получим картину, показанную на рис. 14◇1: при этом i-й и j-й пучки гиперплоскостей превратятся в пучки прямых с центрами в q_1, q_2, а гиперплоскость $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ — в прямую $(q_1 q_2)$ (ср. с картинками на стр. 18).

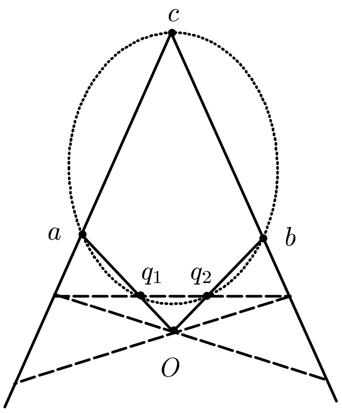


Рис. 14◇1. Сравнение u_i и u_j.

Упражнение 14.8. Покажите, что никакие три из точек q_1, q_2, a, b, c не лежат на одной прямой (в частности, что $q_1 \neq q_2$).

Указание. Иначе среди $p_1, p_2, \dots, p_n, a, b, c$ нашлись бы $(n+1)$ точек, лежащих в одной гиперплоскости.

Прямую $\mathbb{P}(V)$ можно двумя способами отождествить с пучком прямых, проходящих через точку $O = (aq_1) \cap (bp_2)$: мы можем отобразить u либо в прямую проходящую через $\pi_i(u) \cap (bc)$, либо в прямую, проходящую через $\pi_j(u) \cap (ac)$. Эти две параметризации должны совпадать, поскольку они относят одни и те же u трём прямым, проходящим через a, b, c. Но прямые, которые соответствуют $u = u_i$ и $u = u_j$, соединяют точку O с точкой $\pi_i(u_i) \cap (bc) = (q_1 q_2) \cap (bc)$ и с точкой $\pi_j(u_j) \cap (ac) = (q_1 q_2) \cap (ac)$, и так как O, q_1 и q_2 не коллинеарны, эти две прямые должны быть различны, т. е. $u_i \neq u_j$.

Возвращаясь к доказательству утверждения, обозначим через Γ график инцидентности (14-4) между рассматриваемыми нами пучками гиперплоскостей $\pi_i(u)$, и пусть $u_i = \mathrm{Ann}\,(\xi_i)$ для некоторых

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in V^* .$$

По лемме из n° 1.9.1, существует единственный проективный линейный автоморфизм $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n$, который отображает $a \longmapsto t_1^n$, $b \longmapsto t_0^n$ и $p_i \longmapsto \xi_i^n$ при всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Он отождествляет Γ с кривой Веронезе, поскольку переводит пучок гиперплоскостей, проходящих через $p_1, \dots p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n$ в пучок, проходящий через $\xi_1^n, \dots \xi_{i-1}^n, \xi_{i+1}^n, \dots, \xi_n^n$ таким образом, что $\pi_i(u)$ переходит в гиперплоскость, проходящую через ξ^n, где $\xi = \mathrm{Ann}\, u$ В самом деле, это так для $u = e_1$, $u = e_0$ и $u = u_i$, когда a, b и p_i переходят в t_0^n, t_1^n и ξ_i^n. Но тогда это так и для каждого u, в частности, для $u = e_1 - e_0$, т. е. $c \longmapsto (t_0 + t_1)^n$. Это доказывает существование искомого проективного изоморфизма. Его единственность также легко углядывается из предыдущей конструкции: после подходящей дробно линейной перепараметризации кривой Веронезе мы можем считать, что наш изоморфизм переводит a, b, c в t_0^n, t_1^n и $(t_0 + t_1)^n$, а стало быть, индуцирует ту же самую согласованную параметризацию пучков гиперплоскостей через грани симплекса $p_1, p_2, \dots, p_n$, что и выше, так что точки p_i обязаны переводиться таким изоморфизмом в точки $\xi_i = \mathrm{Ann}\,(u_i)$. □

14.3. Многообразие Грассмана $\mathrm{Gr}(m, V) \subset \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ может быть определено алгебраически как проективизация множества всех однородных грассмановых многочленов степени d, имеющих минимальный возможный линейный носитель. В таком виде грассманиан $\mathrm{Gr}(m, V)$ является точным кососимметрическим аналогом многообразия Веронезе $\mathrm{Ver}(m, V)$. Однако, в отличие от симметрического случая, минимальная размерность линейного носителя Грассманова многочлена $\omega \in \Lambda^m V$ равна не единице, а m, поскольку $\Lambda^m U = 0$ для любого $U \subset V$ с $\dim U < m$. Если же $U = \mathrm{span}\omega$ имеет размерность m, то $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$ одномерно, и $\omega = \lambda \cdot u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$ пропорционален внешнему произведению векторов любого базиса $\{u_i\}$ в U, в частности ω полностью раскладывается на линейные множители (напомню, что такие грассмановы многочлены называются *разложимыми*).

14.3.1. Лемма. *$\omega \in \Lambda^m V$ разложим $\iff \dim \mathrm{span}(\omega) = m \iff w \wedge \omega = 0\ \forall\, w \in \mathrm{span}(\omega)$.*

Доказательство. Первая эквивалентность и импликация «$\Rightarrow$» во втором случае тривиальны. Докажем, что если $\dim W > m$, то для любого $\omega \in \Lambda^m W$ существует $w \in W$ такой, что $w \wedge \omega \neq 0$ в $\Lambda^{m+1} W$. Фиксируем базис $\{e_i\} \subset W$ и соответствующий базис $\{e_I\} \subset \Lambda^n W$. Возьмем моном e_I из ω и базисный вектор e_j с $j \notin I$. Произведение $e_j \wedge \omega \neq 0$, поскольку содержит моном $e_{j \cup I}$, получающийся только как $e_j \wedge e_I$ и, стало быть, не могущий ни с чем сократиться. □

14.3.2. Соотношения Плюккера описывают $\mathrm{Gr}(m, V) \subset \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ явными квадратичными уравнениями, вытекающими из предыдущей леммы и описания образующих линейного носителя $\mathrm{span}\omega$ из n° 13.5.1. А именно, в n° 13.5.1 мы видели, что линейный носитель грассманова многочлена $\omega = \sum\limits_I \alpha_I\, e_I \in \Lambda^m V$ порождается векторами:

$$w_J = \sum_{i \notin J} (-1)^{p(i,J)}\, \alpha_{J \sqcup i}\, e_i \ ,$$

где $p(i, J)$ есть номер места, на котором оказывается i в возрастающей перестановке набора индексов $\{j_1, j_2, \dots, j_{m-1}, i\}$. Далее, базисный моном $e_K \in \Lambda^{m+1} V$ входит в произведение $\omega \wedge w_J$ с коэффициентом, с точностью до знака равным

$$\sum_{i \in K \setminus (K \cap J)} (-1)^{p(i,J,K)}\, \alpha_{K \setminus i}\, \alpha_{J \sqcup i} \ ,$$

где $p(i, J, K)$ есть сумма номеров мест, на которых индекс i стоит в наборе K и в возрастающей перестановке набора $J \sqcup i$. Мы получаем

14.3.3. СЛЕДСТВИЕ (СООТНОШЕНИЯ ПЛЮККЕРА). *Грассманиан* $\mathrm{Gr}(m, V) \subset \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ *описывается в однородных координатах* x_I *относительно стандартного мономиального базиса* e_I *квадратичными соотношениями*

$$\sum_{i \in K \setminus (K \cap J)} (-1)^{p(i,J,K)}\, \alpha_{J \sqcup i}\, \alpha_{K \setminus i} = 0 \tag{14-5}$$

(одно соотношение для каждой пары наборов возрастающих индексов $J = (j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$ *и* $K = (k_1, k_2, \dots, k_{n+1})$*).* □

Упражнение 14.9. Убедитесь, что при $J \subset K$ соотношение (14-5) тривиально (имеет вид 0=0).

Упражнение 14.10. Выпишите *все* нетривиальные соотношения Плюккера для $\mathrm{Gr}(2, 4) \subset \mathbb{P}_5$.

14.4. Геометрическое определение грассманиана $\mathrm{Gr}(m, V)$. Геометрически многообразие Грассмана $\mathrm{Gr}(m, V)$ можно *определить* как пространство, точками которого являются m-мерные векторные пространства в V. При таком подходе грассманиан является прямым обобщением проективного пространства — так, $\mathrm{Gr}(1, V) = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_{n-1}$, а $\mathrm{Gr}(n-1, V) = \mathbb{P}(V^*) = \mathbb{P}^{\times}_{n-1}$, поскольку подпространство $U \subset V$ коразмерности 1 задаётся одним линейным уравнением (единственным с точностью до пропорциональности).

Упражнение 14.11. Проверьте, что двойственность $U \leftrightarrow \mathrm{Ann}\, U$ задаёт каноническое отождествление $\mathrm{Gr}(m, V) \simeq \mathrm{Gr}(n-m, V^*)$.

На проективном языке, $\mathrm{Gr}(m, n)$ есть множество всех $(m-1)$-мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}_{n-1}$. Если $\dim(V) = n$ и природа пространства V не существенна, для $\mathrm{Gr}(m, V)$ используется обозначение $\mathrm{Gr}(m, n)$. Связь геометрического подхода с предыдущим алгебраическим описывается *отображением Плюккера*

$$\mathrm{Gr}(m, V) \xhookrightarrow{\mathfrak{u}} \mathbb{P}(\Lambda^m V) \ , \tag{14-6}$$

переводящим m-мерное подпространство $U \subset V$ в одномерное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$. Всякий базис $u_1, u_2, \dots, u_m$ в U задаёт базисный моном $\omega_U = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$ в одномерном пространстве $\Lambda^m U$, и при замене базиса в U разложимый грассманов многочлен ω_U умножается на константу — определитель матрицы перехода. Наоборот, каждому разложимому грассманову многочлену $\omega \in \Lambda^m V$ отвечает, как мы видели, m-мерное подпространство $U_\omega = \mathrm{Supp}(\omega)$, такое что $\omega \in \Lambda^m U_\omega$. Таким образом, отображение (14-6) устанавливает биекцию между m мерными подпространствами $U \subset V$ и разложимыми грассмановыми полиномами, рассматриваемыми с точностью до пропорциональности.

14.4.1. Аналог однородных координат. Если зафиксировать в V базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то набор базисных векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m$ подпространства $U \subset V$ можно представлять $(m \times n)$-матрицей A_U по строкам[5] которой стоят координаты векторов u_i в базисе $\{e_j\}$, так что $u^t = A_U \cdot e^t$ (где строки $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ и $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, как обычно, обозначают наборы векторов). Элементы матрицы A_U аналогичны однородным координатам на проективном пространстве. В самом деле, точка $U \subset \mathrm{Gr}(m, V)$ задаёт матрицу A_U не однозначно, а с точностью до умножением слева на произвольную невырожденную квадратную $m \times m$-матрицу $M \in \mathrm{GL}_m$ (такому умножению отвечает выбор другого базиса $w^t = M \cdot u^t$ в U).

Отметим, что для проективного пространства $\mathrm{Gr}(1, V) = \mathbb{P}(V)$ матрицы A_U превращаются в строки, рассматриваемые с точностью до умножения на ненулевые числа $\mu \in \mathrm{GL}_1 = \Bbbk \setminus 0$, т. е. в обычные проективные однородные координаты.

Упражнение 14.12. Убедитесь, что в терминах однородных координат плюккерово вложение (14-6) сопоставляет $m \times n$-матрице A_U набор всех её $(m \times m)$-миноров, и проверьте, что при умножении матрицы A_U слева на любую матрицу $M \in \mathrm{GL}_m$ этот набор умножается на константу $\det M$.

14.4.2. Стандартные аффинные карты. Стандартная аффинная карта U_i на $\mathbb{P}(V) = \mathrm{Gr}(1, V)$ образована точками с отличной от нуля i-той координатой, которую можно сделать равной 1, умножая строку однородных координат на подходящую константу. Аналогично, на произвольном грассманиане $\mathrm{Gr}(m, n)$ для каждого набора из m возрастающих индексов $I = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ можно рассмотреть *стандартную карту* $\mathfrak{U}_I$, состоящую из всех подпространств $U \subset V$, матрица A_U которых содержит в I-столбцах невырожденную $(m \times m)$-подматрицу $A_{U,I} \subset A_U$, так что умножая A_U слева на $M = A_{U,I}^{-1} \in \mathrm{GL}_m$, можно сделать эту подматрицу единичной.

С точки зрения плюккерова вложения (14-6) карта $\mathfrak{U}_I \subset \mathrm{Gr}(m, V)$ является полным прообразом стандартной аффинной карты $U_I \subset \mathbb{P}(\Lambda^m V)$, в которой отлична от нуля координата вдоль вдоль базисного монома $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$ пространства $\Lambda^m V$.

Геометрически, $\mathfrak{U}_I$, состоит из всех $U \subset V$, которые изоморфно проектируются вдоль координатного подпространства, натянутого на базисные векторы e_j с $j \notin I$, на координатное подпространство, натянутое на базисные векторы $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}$. В каждом таком подпространстве U имеется единственный базис $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, который проектируется в $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}$. Матрица координат таких базисных векторов u_i определяется по U однозначно[6]. Мы будем обозначать её $A^I(U)$ и использовать $m\,(n-m)$ матричных элементов $a_{ij}^I(U)$ с $j \notin I$ в качестве аффинных координат подпространства U в карте $\mathfrak{U}_I \subset \mathrm{Gr}(m, n)$.

Упражнение 14.13. Убедитесь, что карты $\mathfrak{U}_I$ покрывают весь грассманиан $\mathrm{Gr}(m, n)$, и если Вы знакомы с основами дифференциальной топологии, то проверьте, что действительные и комплексные грассманианы являются гладкими (и даже аналитическими) многообразиями.

14.4.3. Аффинная стратификация. Разбиение проективного пространства $\mathbb{P}_n$ в дизъюнктное объединение аффинных пространств

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^0$$

также обобщается на произвольные грассманианы. А именно, метод Гаусса для решения систем линейных однородных уравнений показывает, что любое подпространство $U \subset V$ порождается *единственным* набором векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, матрица координат которого имеет *строгий ступенчатый вид*[7].

Упражнение 14.14. Докажите, что различным строго ступенчатым матрицам A_U отвечают разные подпространства $U \subset V$.

Таким образом, возникает биекция между $\mathrm{Gr}(m, n)$ и множеством всех строго ступенчатых $(m \times d)$ – матриц, которое представляет собой дизъюнктное объединение непересекающихся аффинных пространств, образованных всеми строго ступенчатыми матрицами с фиксированной

[5] отметим, что такие обозначения отличаются транспонированием от использовавшихся нами всюду прежде, но при вычислениях с грассманианами они традиционно более употребительны

[6] именно она и содержит единичную $m \times m$-подматрицу в I-столбцах

[7] т. е. такой, что в столбцах, содержащих углы ступенек, располагается единичная $m \times m$-подматрица

формой ступенек. Форма ступенек однозначно определяется возрастающим набором номеров $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ тех столбцов, в которых располагаются углы ступенек, и всего имеется $\binom{n}{m}$ таких форм. Строго ступенчатая матрица с данной формой ступенек I имеет

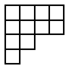
$$m\,(n-m) - \sum_{\nu=1}^{m}(i_\nu - \nu) = \dim \mathrm{Gr}(m,n) - \left(|I| - \frac{m\,(m+1)}{2}\right)\,,$$

«свободных клеток», в которых могут располагаться любые элементы[8] из поля $\Bbbk$. Таким образом, соответствующий страт грассманиана $\mathrm{Gr}(m,n)$ представляет собой аффинное пространство коразмерности $|I| - m(m+1)/2$.

14.4.4. Диаграммы Юнга и клетки Шуберта. Общепринятым способом описания формы ступенек являются *диаграммы Юнга*, или *разбиения*. Сопоставим строгой ступенчатой матрице неубывающую последовательность неотрицательных целых чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, в которой число λ_ν указывает на сколько клеток угол ступеньки, стоящей в ν-той *считая снизу* строке, сдвинут вправо от самого левого возможного своего положения. Таким образом, углы ступенек в матрице типа $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ находятся в столбцах с номерами

$$i_\nu = (m+1-\nu) + \lambda_{m+1-\nu}\,.$$

Последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ обычно рисуется в виде диаграммы Юнга, состоящей из выровненных по левому краю клетчатых полок, длины которых равны элементам последовательности. Число $|\lambda| = \sum \lambda_\nu$ обычно называют *весом*[9] диаграммы λ , например:

$(4,4,2,1) \quad \leftrightsquigarrow$ 

На грассманиане $\mathrm{Gr}(4,10)$ этой диаграмме отвечает 13-мерное аффинное пространство строго ступенчатых матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0&1&*&0&*&*&0&0&*&* \\ 0&0&0&1&*&*&0&0&*&* \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&*&* \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&*&* \end{pmatrix}$$

нулевому разбиению $(0,0,0,0)$ отвечает самое левое из всех возможных положений ступенек, которое описывает 24-мерное пространство матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&*&*&*&*&*&* \\ 0&1&0&0&*&*&*&*&*&* \\ 0&0&1&0&*&*&*&*&*&* \\ 0&0&0&1&*&*&*&*&*&* \end{pmatrix}$$

(стандартную аффинную карту $\mathfrak{U}_{(1,2,3,4)}$ грассманиана $\mathrm{Gr}(4,10)$), а разбиение $(6,6,6,6)$ описывает нульмерное аффинное пространство — единственную матрицу, ступеньки которой находятся в самом правом положении:

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 14.15. Убедитесь, что имеется биекция между m-элементными возрастающими подмножествами $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ и диаграммами Юнга $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, содержащимися в прямоугольнике размером $m \times (n-m)$.

[8] вне единичной подматрицы, стоящей в I-столбцах, находится $m\,(n-m)$ клеток, причём в ν-той строке $i_\nu - \nu$ из них заполняются «обязательными» нулями, стоящими слева от угловой единицы

[9] множество всех диаграмм данного веса n описывает все способы разбить n в сумму неупорядоченных целых неотрицательных слагаемых, откуда и происходит термин «разбиение»

Итак, в терминах диаграмм Юнга, грассманиан $\mathrm{Gr}(m,n)$ разбивается в дизъюнктное объединение аффинных пространств

$$\overset{\circ}{\sigma}_\lambda \simeq \mathbb{A}^{m(n-m)-|\lambda|}\,,$$

которые называются *открытыми клетками Шуберта* и занумерованы всевозможными диаграммами Юнга, умещающимися в прямоугольнике $m\times(n-m)$. Клетка $\overset{\circ}{\sigma}_\lambda$ состоят из всех матриц с формой ступенек λ и имеет коразмерность $|\lambda|=\sum\lambda_\nu$. Замыкание σ_λ клетки $\overset{\circ}{\sigma}_\lambda$ называется *замкнутым циклом Шуберта*.

Упражнение 14.16. Опишите из каких открытых клеток Шуберта состоит замыкание заданной открытой клетки $\overset{\circ}{\sigma}_\lambda$ на вещественном и комплексном грассманианах $\mathrm{Gr}(m,n)$.

14.5. Грассманиан $\mathrm{Gr}(2,4)\subset\mathbb{P}_5$ и геометрия прямых в $\mathbb{P}_3$. Простейший отличный от проективного пространства грассманиан $\mathrm{Gr}(2,4)=\mathrm{Gr}(2,V)$ параметризует множество всех двумерных векторных подпространств в четырёхмерном векторном пространстве V или, что то же самое, множество всех прямых в $\mathbb{P}_3=\mathbb{P}(V)$. Он вкладывается в проективное пространство $\mathbb{P}_5=\mathbb{P}(\Lambda^2V)$ в виде невырожденной квадрики, которая называется *квадрикой Плюккера*.

В самом деле, на пространстве $\mathbb{P}_5=\mathbb{P}(\Lambda^2V)$ имеется *каноническая* квадрика

$$P\overset{\text{def}}{=}\{\,\omega\in\Lambda^2V\mid\omega\wedge\omega=0\,\}\,,$$

задаваемая единственной с точностью до пропорциональности квадратичной формой q, поляризация которой $\widetilde{q}(\omega_1,\omega_2)$ определятся соотношением

$$\omega_1\wedge\omega_2=\widetilde{q}(\omega_1,\omega_2)\cdot\Omega\quad\forall\,\omega_1,\omega_2\in\Lambda^2V\,,\tag{14-7}$$

где Ω — произвольный базисный вектор[10] одномерного пространства $\Lambda^4V\simeq k$. Поскольку грассмановы многочлены чётной степени коммутируют, эта форма симметрична.

Упражнение 14.17. Покажите, что она невырождена.

Как мы видели в первом семестре, для разложимости грассманова многочлена $\omega\in\Lambda^2V$ необходимо и достаточно выполнения условия[11] $\omega\wedge\omega=0$. Поэтому вложение Плюккера

$$\mathfrak{u}\,:\,\mathrm{Gr}(2,4)\xrightarrow{U\mapsto\Lambda^2U}\mathbb{P}(\Lambda^2V)\tag{14-8}$$

биективно отображает грассманиан на квадрику Плюккера.

Если фиксировать базис $\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$ в V и индуцированный мономиальный базис $e_{ij}=e_i\wedge e_j$ в Λ^2V, то условие $\omega\wedge\omega=0$ на грассманову квадратичную форму $\omega=\sum\limits_{i<j}x_{ij}e_{ij}$ запишется в однородных координатах x_{ij} на $\mathbb{P}_5$ в виде

$$x_{01}x_{23}-x_{02}x_{13}+x_{03}x_{12}=0$$

(откуда, в частности, видна невырожденность плюккеровой квадрики).

Упражнение 14.18. Убедитесь, что на координатном языке отображение Плюккера (14-8) переводит подпространство, натянутое на пару векторов $u=\sum u_ie_i$, $w=\sum w_je_j$ в грассманову квадратичную форму с коэффициентами $x_{ij}=u_iw_j-u_jw_i$, т.е. сопоставляет 2×4-матрице $\begin{pmatrix}u_0&u_1&u_2&u_3\\w_0&w_1&w_2&w_3\end{pmatrix}$ шестёрку всех её 2×2-миноров $x_{ij}=\det\begin{pmatrix}u_i&u_j\\w_i&w_j\end{pmatrix}$.

Упражнение 14.19. Существует ли комплексная 2×4-матрица, шесть 2×2-миноров которой образуют множество: а) $\{2,3,4,5,6,7\}$ б) $\{3,4,5,6,7,8\}$ (если да, предъявите такую матрицу явно).

[10] выбор другого базисного вектора умножает форму на константу

[11] для разложимого $\omega=u_1\wedge u_2$ выполняется соотношение $\omega\wedge\omega=u_1\wedge u_2\wedge u_1\wedge u_2=0$; произвольный $\omega\in\Lambda^2V$ в подходящем базисе записывается либо как $\omega=\xi_0\wedge\xi_1$, либо как $\omega=\xi_0\wedge\xi_1+\xi_2\wedge\xi_3$; во втором случае ω неразложим, т.к. $\omega\wedge\omega=2\,\xi_0\wedge\xi_1\wedge\xi_2\wedge\xi_3\neq0$

14.5.1. ЛЕММА. *Две прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$ пересекаются тогда и только тогда, когда их образы при отображении Плюккера* (14-8) *ортогональны относительно формы* (14-7)*:*

$$\widetilde{q}(\mathfrak{u}(\ell_1), \mathfrak{u}(\ell_2)) = \mathfrak{u}(\ell_1) \wedge \mathfrak{u}(\ell_2) = 0 \,.$$

Доказательство. Пусть $\ell_1 = \mathbb{P}(U_1)$, $\ell_2 = \mathbb{P}(U_2)$. Если $U_1 \cap U_2 = 0$, то $V = U_1 \oplus U_2$ и существует базис $\{e_i\} \subset V$ такой, что U_1 натянуто на e_0, e_1 и U_2 натянуто на e_2, e_3. Таким образом, $\mathfrak{u}(U_1) = e_0 \wedge e_1$, $\mathfrak{u}(U_2) = e_2 \wedge e_3$ и $\mathfrak{u}(U_1) \wedge \mathfrak{u}(U_2) = e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \neq 0$. Если $U_1 \cap U_2 \neq 0$, мы можем выбрать в U_1 и U_2 базисы $\{u_0, u_1\}$ и $\{u_0, u_2\}$ с $u_0 \in U_1 \cap U_2$. Тогда $\mathfrak{u}(U_1) = u_0 \wedge u_1$, $\mathfrak{u}(U_2) = u_0 \wedge u_2$ и $\mathfrak{u}(U_1) \wedge \mathfrak{u}(U_2) = u_0 \wedge u_1 \wedge u_0 \wedge u_2 = 0$. $\square$

14.5.2. СЛЕДСТВИЕ. *Для любой точки $p = \mathfrak{u}(\ell) \in P$ конус $P \cap T_pP$, высекаемый на квадрике Плюккера касательным пространством в точке p, состоит из плюккеровых образов $\mathfrak{u}(\ell')$ всех прямых $\ell' \subset \mathbb{P}_3$, которые пересекаются с ℓ.*

Доказательство. Подпространство $T_pP \subset \mathbb{P}_5$ есть множество нулей линейной формы $\widetilde{q}(\mathfrak{u}(\ell), *)$, и, согласно лемме n° 14.5.1, $\widetilde{q}(\mathfrak{u}(\ell), \mathfrak{u}(\ell')) = 0 \iff \ell \cap \ell' \neq \varnothing$. $\square$

14.5.3. Связки и пучки прямых в $\mathbb{P}_3$. Множество прямых на $\mathbb{P}_3$ называется *связкой*, если оно представляется плоскостью $\pi \subset P \subset \mathbb{P}_5$. Если $\pi \subset P$ натянуто на 3 неколлинеарные точки $p_i = \mathfrak{u}(\ell_i)$, $i = 1, 2, 3$, т. е. $\pi = P \cap T_{p_1}P \cap T_{p_2}P \cap T_{p_3}P$, то по лемме n° 14.5.1 и следствию n° 14.5.2 соответствующая связка прямых состоит из всех прямых, которые пересекают 3 данные попарно пересекающиеся прямые ℓ_i. Три прямых в $\mathbb{P}_3$ попарно пересекаются только тогда, когда они либо лежат в одной плоскости, либо проходят через одну точку. Таким образом, существуют два геометрически разных типа связок прямых на $\mathbb{P}_3$:

> *α-связка* (или *α-плоскость* $\pi_\alpha(O) \subset P$) состоит из всех прямых, проходящих через данную точку $O \in \mathbb{P}_3$, и линейно порождается плюккеровыми образами любых трёх некомпланарных прямых, проходящих через O;
>
> *β-связка* (или *β-плоскость* $\pi_\beta(\Pi) \subset P$) состоит из всех прямых, лежащих в данной плоскости $\Pi \in \mathbb{P}_3$, и линейно порождается плюккеровыми образами любых трёх лежащих в Π прямых, не проходящих там через одну точку.

При этом любые две плоскости одного и того же типа обязательно пересекаются ровно по одной точке: $\pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) = \mathfrak{u}(\,\Pi_1 \cap \Pi_2\,)$, $\pi_\alpha(O_1) \cap \pi_\alpha(O_2) = \mathfrak{u}(\,(O_1O_2)\,)$, а две плоскости $\pi_\beta(\Pi)$ и $\pi_\alpha(O)$ различных типов либо не пересекаются (когда $O \notin \Pi$), либо пересекаются по прямой $\lambda(O, \Pi) \in P$, параметризующей пучок прямых $\ell \subset \Pi$, проходящих $O \in \Pi$ (когда $O \in \Pi$).

Упражнение 14.20. Покажите, что всякая прямая, лежащая на плюккеровой квадрике, является пересечением α- и β-плоскости (т. е. все пучки прямых в $\mathbb{P}_3$ исчерпываются пучками прямых, лежащих в некоторой плоскости и проходящих там через одну точку).

Указание. (Ср. с общей теорией из n° 2.5.4.) Рассмотрим конус $C = P \cap T_pP$. Он имеет вершину в p и состоит из всех прямых, проходящих через p и лежащих на P. Фиксируем 3-мерную гиперплоскость $H \subset T_pP$, которая не содержит p. Тогда $G = C \cap H$ есть невырожденная квадрика на H. Таким образом, любая прямая, проходящая через p, имеет вид $(pp') = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$, где $p' \in G$ и плоскости π_α, π_β натянутые на p и две прямые, проходящие через p' в G (см. рис. 14◇2).

Упражнение 14.21. Всякая невырожденная квадрика $\varkappa \subset \mathbb{P}_3$ определяет поляритет $\widehat{\varkappa} : \mathbb{P}_3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_3^\times$, который, в свою очередь, задаёт автоморфизм грассманиана $\mathrm{Gr}(2, 4)$ действующий по правилу $U \longmapsto \mathrm{Ann}\,\widehat{\varkappa}(U)$. Покажите, что этот автоморфизм отображает α-плоскости в β-плоскости и наоборот.

14.5.4. Клетки Шуберта на $\mathbf{Gr(2, 4)}$. Зафиксируем в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ пару пересекающихся прямых ℓ, ℓ'. Им отвечают две точки $p = \mathfrak{u}(\ell)$, $p' = \mathfrak{u}(\ell') \in P \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Проведём в четырёхмерном касательном пространстве T_pP какую-нибудь трёхмерную гиперплоскость $H \subset T_pP$, проходящую через точку p', но не содержащую точки p. Особая квадрика $C = P \cap T_pP$ представляет собой простой конус с вершиной p над неособой квадрикой $G = H \cap P$, содержащей точку p' и изоморфной квадрике Сегре в $\mathbb{P}_3$ (см. рис. 14◇2). Через точку p' проходят две прямолинейных образующих квадрики Сегре, линейное соединение которых с точкой p представляет собой α-

плоскость и β-плоскость на P. Отсюда возникает такая стратификация плюккеровой квадрики собственными замкнутыми подмножествами:

$$\begin{tikzcd} & & \pi_\alpha \arrow[dr, hook] & & \\ p \arrow[r, hook] & (pp') = \pi_\alpha \cap \pi_\beta \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & C = P \cap T_pP \arrow[r, hook] & P \\ & & \pi_\beta \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd} \tag{14-9}$$

Беря в каждом страте плотное открытое подмножество, дополнительное к объединению всех содержащихся в нём замкнутых стратов меньшей размерности, мы получаем следующее разбиение P в дизъюнктное объединение аффинных пространств:

$$\mathrm{Gr}(2,4) \;=\; \mathbb{A}^0 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \begin{pmatrix} \mathbb{A}^2 \\ \sqcup \\ \mathbb{A}^2 \end{pmatrix} \sqcup \mathbb{A}^3 \sqcup \mathbb{A}^4 \,, \tag{14-10}$$

где $\mathbb{A}^0 = \{p\}$, $\mathbb{A}^1 = (pp') \setminus p$, два экземпляра $\mathbb{A}^2$ возникают как дополнения π_α и π_β до прямой (pp'), а последние два пространства возникают следующим образом: поскольку C является конусом с вершиной p над G, мы имеем

$$C \setminus (\pi_\alpha \cup \pi_\beta) \simeq \mathbb{A}^1 \times \Big(G \setminus \big(G \cap T_{p'}G\big)\Big)\,,$$

и равенства $G \setminus \big(G \cap T_{p'}G\big) \simeq \mathbb{A}^2$, $Q \setminus C \simeq \mathbb{A}^4$ вытекают из леммы:

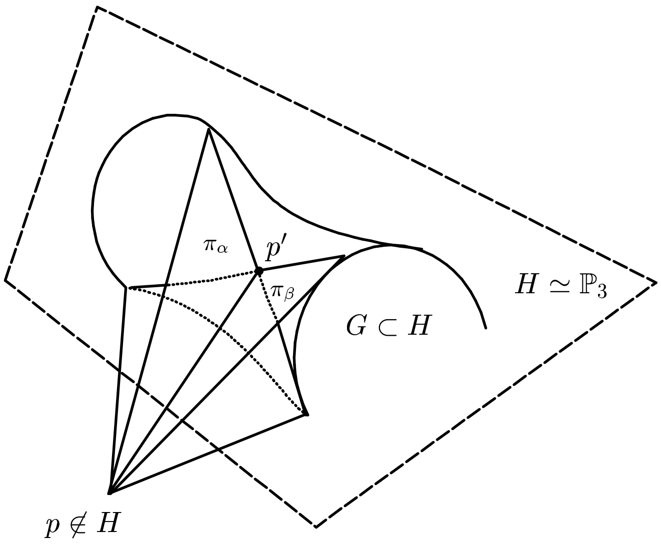


Рис. 14◇2. Конус $C = P \cap T_pP$.

14.5.5. ЛЕММА. *Проекция неособой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \in Q$ на произвольную дополнительную к p гиперплоскость L биективно отображает*[12] *дополнение $Q \setminus (Q \cap T_pQ)$ на аффинное пространство $\mathbb{A}^{n-1} = L \setminus (H \cap T_pQ)$.*

Доказательство. Каждая прямая, которая проходит через p и не касается Q, пересекает квадрику ещё ровно в одной отличной от p точке, координаты которой, по теореме Виета, рационально зависят от прямой. □

Упражнение 14.22. Убедитесь, что в обозначениях n° 14.4.4 страты (14-9) представляют собой замкнутые циклы Шуберта $\sigma_{00} = P$; $\sigma_{22} = p = (0:0:0:0:0:1) \in \mathbb{P}_5$; $\sigma_{10} = P \cap T_pP$; $\sigma_{11} = \pi_\alpha(O)$, где $O = (0:0:0:1) \in \mathbb{P}_3$; $\sigma_{20} = \pi_\beta(\Pi)$, где $\Pi \subset \mathbb{P}_3$ задано уравнением $x_0 = 0$; $\sigma_{21} = \pi_\alpha(O) \cap \pi_\beta(\Pi)$, а аффинные пространства разбиения (14-10) являются соответствующими открытыми клетками Шуберта.

14.5.6. Пример: исчисление Шуберта[13]. Поскольку над полем $\mathbb{C}$ клеточное разбиение грассманиана $\mathrm{Gr}(m,n)$, построенное нами в n° 14.4.4, не содержит клеток нечётной вещественной размерности, все граничные операторы клеточного цепного комплекса, вычисляющего целочисленные гомологии, будут нулевыми. Поэтому циклы Шуберта σ_λ образуют свободный базис $\mathbb{Z}$-модуля *целочисленных гомологий*

$$\Lambda(m,d) \overset{\text{def}}{=} H_*(\mathrm{Gr}(m,\mathbb{C}^d),\mathbb{Z})\,.$$

[12] на самом деле, как сама проекция, так и обратное к ней отображение в координатах задаются взаимно обратными (по отношению к композиции) *рациональными* алгебраическими функциями, т. е. являются *изоморфизмами алгебраических многообразий* (в частности, аналитическими диффеоморфизмами над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$)

[13] этот пример адресован тем, кто знаком с началами клеточной топологии, и его можно пропустить без ущерба для понимания остального текста

Упражнение 14.23*. Опишите из каких клеток σ_μ состоит замыкание данной клетки σ_l и попытайтесь точно вычислить граничный оператор клеточного цепного комплекса на вещественном грассманиане $\mathrm{Gr}(m, \mathbb{R}^d)$.

Топологическое пересечение циклов задаёт на $\mathbb{Z}$-модуле $\Lambda(m,d)$ структуру коммутативного кольца. В частности, гомологический класс пересечения циклов Шуберта можно явно представить в виде целочисленной линейной комбинации циклов Шуберта. В общем случае ответ даётся так называемым *правилом Литлвуда – Ричардсона*, а также многими более частными формулами для перемножения диаграмм специального вида[14]. Говоря формально, кольцо $\Lambda(m,d)$ изоморфно усечённому кольцу симметрических многочленов — фактору

$$\Lambda(m,d) = \mathbb{Z}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m]/(\eta_{d-m+1}, \dots, \eta_{d-1}, \eta_d)$$

где через ε_i обозначен i-тый элементарный симметрический многочлен[15], а через η_i — i-тый полный симметрический многочлен[16], который, согласно основной теореме об элементарных симметрических функциях, является многочленом от ε_i. Циклу Шуберта σ_λ при этом изоморфизме отвечает класс (по модулю $\eta_j(\varepsilon)$) симметрического многочлена Шура[17] s_λ (выраженного в виде многочлена от ε_i). К сожалению, доказательство этого, а главное, явное описание соответствующих правил разложения одних многочленов через другие, увело бы нас далеко за рамки этого курса (см. цитированные выше книги).

Мы ограничимся тем, что в качестве иллюстрации явно вычислим кольцо пересечений комплексного грассманиана $\mathrm{Gr}(2,4)$. Как мы уже упоминали, в этом случае имеются только чётномерные (в вещественном смысле) модули $H_0 = H_2 = H_6 = H_8 = \mathbb{Z}$ и $H_4 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, базисными элементами которых служат 6 циклов Шуберта из упр. 14.22. Циклы, суммарная коразмерность которых меньше четырёх, очевидно, имеют нулевые топологические пересечения. Топологическое пересечение циклов дополнительной размерности уже было вычислено нами в n° 14.5.3 и упр. 14.20: $\sigma_{10}\sigma_{21} = \sigma_{20}^2 = \sigma_{11}^2 = \sigma_{22}$, и $\sigma_{20}\sigma_{11} = 0$. Те же геометрические соображения показывают, что $\sigma_{10}\sigma_{20} = \sigma_{10}\sigma_{11} = \sigma_{21}$. Для вычисления σ_{10}^2 реализуем σ_{10} как

$$\sigma_{10}(\ell) = P \cap T_{\mathfrak{u}(\ell)} P = \{\ell'' \subset \mathbb{P}_3 \mid \ell \cap \ell'' \neq \varnothing\} \,.$$

Тогда σ_{10}^2 гомологичен пересечению $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell')$, которое при общем положении пары прямых ℓ, ℓ' представляет собой неособую квадрику Сегре с рис. 14◊2. Однако если продеформировать прямую ℓ' так, чтобы она стала пересекаться с ℓ, эта квадрика продеформируется в своём классе гомологий в пару пересекающихся плоскостей — α-связку с центром $O = \ell \cap \ell'$ и α-связку в плоскости Π, натянутой на ℓ и ℓ': $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell') = \pi_\alpha(O) \cup \pi_\beta(\Pi)$, т. е. $\sigma_{10}^2 = \sigma_{20} + \sigma_{11}$.

Следствием полученной нами «таблицы умножения» циклов Шуберта на $\mathrm{Gr}(2,4)$ является новое, «топологическое» решение упр. 2.11 (а) о том, сколько прямых пересекает заданные четыре попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$. А именно, если данные четыре прямые ℓ_i находятся в достаточно общем положении[18], ответ находится следующей выкладкой в $\Lambda(2,4)$:

$$\sigma_{10}^4 = (\sigma_{20} + \sigma_{11})^2 = \sigma_{20}^2 + \sigma_{11}^2 = 2\sigma_{22} \,.$$

Итак, в «общем случае» имеется ровно 2 таких прямых.

[14] соответствующий раздел комбинаторики известен как *исчисление Шуберта* и описан, например, в книгах *W. Fulton Young Tableaux* (CUP, LMS Stud. Texts 35), *И. Макдоналд Симметрические функции и многочлены Холла* (Мир, 1985), *Ф. Гриффитс, Дж. Харрис Принципы алгебраической геометрии, I* (Мир, 1982), *У. Фултон Теория пересечений* (Мир, 1989)

[15] т. е. сумма всех полилинейных мономов степени i от m формальных переменных $(x_1, x_2, \dots, x_m)$

[16] т. е. сумма вообще всех мономов степени i от m формальных переменных $(x_1, x_2, \dots, x_m)$

[17] т. е. сумма всех мономов степени $|\lambda|$, которые можно получить перемножением m формальных переменных $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, расставленных (возможно, с повторениями) во все клетки диаграммы λ так, чтобы номера переменных нестрого возрастали слева направо вдоль строк и строго возрастали сверху вниз вдоль столбцов; в частности, $\sigma_{(i)} = \eta_i$, а $\sigma_{(11\dots1)} = \varepsilon_i$

[18] таком, что пересечение циклов $\sigma_{10}(\ell_i)$ вычисляет топологическое четырёхкратное самопересечение σ_{10}^4