§11. Неразложимые инвариантные подпространства и элементарные делители.

11.1. Пространство с оператором как $\Bbbk[t]$-модуль. Задать линейный оператор $V \xrightarrow{F} V$ на векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ — это то же самое, что задать на V структуру модуля над кольцом многочленов $\Bbbk[t]$. В самом деле, структура $\Bbbk[t]$-модуля отличается от структуры векторного пространства наличием дополнительной операции умножения векторов на t. Если такая операция задаётся правилом

$$t \cdot v \overset{\text{def}}{=} F(v) \;,$$

то аксиомы $\Bbbk[t]$-модуля утверждают в точности, что F является линейным оператором, а умножение вектора на произвольный многочлен задаётся формулой

$$g(t) \cdot v \overset{\text{def}}{=} [g(F)](v) \;.$$

Всякий базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ векторного пространства V над $\Bbbk$ порождает V и как $\Bbbk[t]$-модуль. Следовательно, V является конечно порождённым модулем над евклидовым кольцом $\Bbbk[t]$. Как мы видели в первом семестре, всякий такой модуль является прямой суммой свободного модуля $\Bbbk[t]^{\oplus r}$ и модулей вида $\Bbbk[t]/(p^m)$, где $p \in \Bbbk[x]$ неприводимый многочлен, причём модули $\Bbbk[t]/(p^m)$ не представляются в виде прямой суммы двух нетривиальных подмодулей. Мы видели также, что два $\Bbbk[t]$-модуля M и N (как-то разложенные в прямые суммы такого рода) изоморфны тогда и только тогда, когда для каждого неприводимого $p \in \Bbbk[x]$ и любого $m \in \mathbb{N}$ число прямых слагаемых вида $\Bbbk[t]/(p^m)$ одинаковы в обоих разложениях и ранги r свободных компонент $\Bbbk[t]^{\oplus r}$ совпадают. В нашей ситуации из конечномерности V как векторного пространства над $\Bbbk$ вытекает, что свободный модуль $\Bbbk[t]^{\oplus r}$ (являющийся бесконечномерным векторным пространством) в разложении V отсутствует, т. е. $r = 0$ и V является прямой суммой далее неразложимых подмодулей вида $\Bbbk[t]/(p^m)$. Многочлены p^m, участвующие в этом разложении, называются *элементарными делителями* оператора F. Мы будем обозначать через $\mathscr{E}\ell(F)$ полный набор[1] всех элементарных делителей данного оператора F.

Упражнение 11.1. Покажите, что минимальный многочлен[2] оператора F равен произведению $\prod p^{\mu(p)}$, где p пробегает (без повторений) все различные простые многочлены представленные в $\mathscr{E}\ell(F)$, а $\mu(p) = \max\big(m \mid p^m \in \mathscr{E}\ell(F)\big)$.

Поскольку изоморфизм $\Bbbk[t]$-модулей M и N — это $\Bbbk$-линейный изоморфизм векторных пространств $M \xrightarrow{\sim} N$, перестановочный с умножением на t, мы заключаем, что

$$\mathscr{E}\ell\left(V \xrightarrow{F} V\right) = \mathscr{E}\ell\left(W \xrightarrow{G} W\right)$$

тогда и только тогда, когда существует изоморфизм $C : V \xrightarrow{\sim} W$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "C", "\sim"'] & W \\ V \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\sim", "C"'] & W \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $G = CFC^{-1}$. Подытожим сказанное.

[1] каждый элементарный делитель p^m входит в этот набор ровно столько раз, сколько прямых слагаемых вида $\Bbbk[t]/(p^m)$ входит в разложение V

[2] напомню, что *минимальным многочленом* оператора F называется многочлен $\mu_F(t)$ наименьшей степени со старшим коэффициентом 1, для которого $f(A) = 0$

11.1.1. ТЕОРЕМА. *Конечномерное векторное пространство V над произвольным полем $\Bbbk$ с линейным оператором $V \xrightarrow{F} V$ раскладывается в прямую сумму F-инвариантных подпространств, каждое из которых можно отождествить (как векторное пространство над $\Bbbk$) с фактор кольцом $\Bbbk[t]/(p^m)$ (где $p \in \Bbbk[t]$ неприводим) так, что действие оператора F на таком подпространстве будет заключаться в умножении на t в этом фактор кольце. Подпространства $\Bbbk[t]/(p^m)$ не допускают дальнейшего разложения в прямую сумму ненулевых инвариантных подпространств меньшей размерности, и набор $\mathscr{E}\ell(F)$ этих подпространств зависит только от оператора F, но не от выбора разложения. Два оператора F и G сопряжены тогда и только тогда, когда $\mathscr{E}\ell(F) = \mathscr{E}\ell(G)$.* □

11.1.2. Пример: нильпотентные операторы. Напомню, что линейный оператор $V \xrightarrow{F} V$ называется *нильпотентным*, если $F^m = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Упражнение 11.2. Проверьте, что следующие условия на оператор F равносильны: f нильпотентен; минимальный многочлен $\mu_F = t^m$; характеристический многочлен $\chi_F = t^n$; все собственные числа F равны нулю.

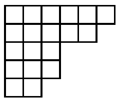
Таким образом, пространство с нильпотентным оператором как $\Bbbk[t]$-модуль является прямой суммой модулей вида

$$J_0(m) \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk[t]/\left(t^m\right) , \tag{11-1}$$

действие оператора на которых состоит в умножении на t. Выбирая в каждом таком подмодуле базис

$$t^{m-1}, t^{m-2}, \dots , t, 1 ,$$

и упорядочивая сами подмодули так, чтобы m не возрастало, мы получаем в пространстве V базис, векторы которого естественно расставляются в клетки некоторой диаграммы Юнга[3] $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$



$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \end{array} \tag{11-2}$$

так, что оператор переводит каждый базисный вектор в соседний с ним слева базисный вектор и аннулирует базисные векторы, стоящие в первом столбце. Всякий базис такого вида называется *циклическим* (или *жордановым*) базисом нильпотентного оператора F. Сама диаграмма Юнга называется при этом *цикловым типом* оператора F, а наборы базисных векторов, стоящие по строкам диаграммы, называются *жордановыми цепочками*. Независимость циклового типа λ от выбора циклического базиса видна особенно наглядно: сумма длин первых m столбцов диаграммы равна $\dim\ker F^m$, и длина m-того того столбца однозначно находится как $\lambda^t_m = \dim\ker F^m - \dim\ker F^{m-1}$.

Упражнение 11.3. Не опираясь на теорему о строении модулей над кольцами главных идеалов, докажите прямым рассуждением, что

а) любой нильпотентный оператор, действующий на конечномерном векторном пространстве над произвольным полем, обладает циклическим базисом;

б) два нильпотентных оператора F и G имеют одинаковый цикловой тип тогда и только тогда, когда $F = C^{-1}GC$ для некоторого линейного изоморфизма $V \xrightarrow{C} V$;

в) пространство V с нильпотентным оператором F тогда и только тогда неразложимо в прямую сумму ненулевых F-инвариантных подпространств меньшей размерности, когда диаграмма (11-2) состоит из одной жордановой цепочки.

11.1.3. Пример: жордановы клетки. Небольшой модификацией (11-1) является $\Bbbk[t]$-модуль

$$J_\lambda(m) \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk[t]/\left((t-\lambda)^m\right) , \quad \lambda \in \Bbbk , \tag{11-3}$$

который называется называется *жордановой клеткой* размера m с собственным значением λ. Оператор умножения на t является на этом пространстве суммой $t = \lambda E + \eta$ скалярного оператора λE и нильпотентного оператора $\eta : f(t) \mapsto (t-\lambda) \cdot f(t)$. Многочлены

$$(t-\lambda)^{m-1} , \ (t-\lambda)^{m-2} , \ \dots , \ (t-\lambda) , \ 1$$

[3] мы придерживаемся тех же обозначений, что и в первом семестре, а именно, невозрастающие неотрицательные целые числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ суть длины строк диаграммы λ, транспонированная диаграмма $\lambda^t = (\lambda^t_1, \lambda^t_2, \dots, \lambda^t_r)$ имеет в качестве строк столбцы диаграммы λ и вес диаграммы $|\lambda| = |\lambda^t|$ равен общему числу клеток в диаграмме

образуют жорданов базис для η, состоящий из одной цепочки. В этом базисе оператор умножения на t задаётся двудиагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(нули в остальных местах), которая также называется жордановой клеткой.

11.1.4. СЛЕДСТВИЕ. *Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ всякое пространство с оператором является прямой суммой жордановых клеток. Два оператора сопряжены тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Bbbk$, $m \in \mathbb{N}$ количество клеток $J_\lambda(m)$, участвующих в их разложении, одинаково.*

Доказательство. Неприводимые многочлены над алгебраически замкнутым полем — это линейные многочлены $p = (t - \lambda)$, и неразложимые модули $\Bbbk[t]/(p^m)$ — это жордановы клетки. □

11.2. Разложение пространства по разложению анулирующего многочлена. Для практического отыскания разложения из теоремы n° 11.1.1 часто бывает полезно следующее простое соображение. Пусть $q(F) = 0$ для некоторого многочлена $q \in \Bbbk[t]$, который является произведением попарно взаимно простых многочленов

$$q(t) = q_1(t) \cdot q_2(t) \cdot \cdots \cdot q_s(t)\ , \qquad \text{нод}(q_i, q_j) = 1 \quad \forall\, i, j\ .$$

Положим $Q_j(t) = q(t)/q_j(t) = \prod\limits_{\nu \neq j} q_\nu$. Если для каждого j оператор $Q_j(F) \neq 0$, то пространство V распадается в прямую сумму F-инвариантных подпространств:

$$V = \bigoplus_{j=1}^{s} V_j\ , \quad \text{где} \quad V_j = \ker q_j(F) = \operatorname{im} Q_j(F) \tag{11-4}$$

В самом деле, поскольку $q(F) = q_j(F) Q_j(F) = 0$, мы имеем включение $\operatorname{im} Q_j(F) \subset \ker q_j(F)$. Но подпространства $\operatorname{im} Q_\nu(F)$ порождают V, т. к.

$$\text{нод}(Q_1, Q_2, \dots, Q_s) = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, f_\nu \in \Bbbk[x]\ :\ \sum Q_\nu f_\nu = 1$$

и любой $v \in V$ представим в виде $v = Ev = \sum Q_\nu(F) f_\nu(F) v \subset \sum \operatorname{im} Q_\nu(F)$. А попарные пересечения $\ker q_i(F) \cap \ker q_j(F) = 0$, поскольку

$$\text{нод}(q_i, q_j) = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, g, h \in \Bbbk[x]\ :\ g \cdot q_i + h \cdot q_j = 1$$

и $v = Ev = g(F) q_i(F) v + h(F) q_j(F) v = 0$ как только $q_i(F) v = q_j(F) v = 0$.

11.2.1. Пример: инволюции и проекторы. Если оператор F является *инволюцией*, т. е. удовлетворяет уравнению $F^2 - 1 = (F + 1)(F - 1) = 0$, то

$$V = V_+ \oplus V_- \quad \text{с} \quad V_\pm = \ker(F \mp 1) = \operatorname{im}(F \pm 1)$$

и любой вектор однозначно представим в виде $v = v_+ + v_-$ с $v_\pm = (v \pm Fv)/2 \in V_\pm$ (мы уже пользовались этим, когда обсуждали вещественные структуры). Другой простой пример доставляют *проекторы*: если $F^2 = E$, т. е. $F(F - 1) = 0$, то

$$\operatorname{im} F = \ker(F - 1) = \{v \mid F(v) = v\} \quad \text{и} \quad V = \ker F \oplus \operatorname{im} F\ ,$$

т. е. F проектирует V на $\operatorname{im} F$ вдоль $\ker F$.

Упражнение 11.4. Покажите, что оператор диагонализуем над $\Bbbk$ тогда и только тогда, когда он аннулируется многочленом без кратных корней, полностью разлагающимся над $\Bbbk$ на линейные множители.

11.2.2. Пример: разложение в сумму корневых подпространств. Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то характеристический многочлен оператора F можно разложить в произведение степеней попарно разных линейных форм

$$\chi_F(t) = \det(tE - F) = \prod (t - \lambda_\nu)^{m_\nu} \ , \quad \text{где} \quad \lambda_\nu \neq \lambda_\mu \ .$$

Тогда все пространства $K_\nu = \ker(F - \lambda_\nu)^{m_\nu}$ ненулевые (каждое из них содержит собственный вектор) и

$$V = \oplus K_\nu \ .$$

Подпространство K_ν называется *корневым подпространством* оператора F.

Упражнение 11.5. Покажите, что $K_\nu = \bigcup\limits_{m \geqslant 1} \ker(F - \lambda_\nu E)^m$ и является прямой суммой всех жордановых клеток оператора F с собственным значением λ.

Таким образом, суммарный размер всех жордановых клеток с собственным значением λ равен кратности λ как корня характеристического многочлена.

Другим полезным следствием корневого разложения является следующее наблюдение. Поскольку t обратим по модулю каждого $(t - \lambda_\nu)^{m_\nu}$ с $\lambda_\nu \neq 0$, существуют многочлены $g_\nu(t)$, такие что

$$t \cdot g_\nu(t) \equiv \lambda_\nu \, (\mathrm{mod}\ (t - \lambda_\nu)^{m_\nu})$$

(при $\lambda_\nu = 0$ мы полагаем $g_\nu = 0$). По китайской теореме об остатках мы можем также построить многочлены f_ν, так чтобы

$$f_\nu \equiv \begin{cases} 1 \, (\mathrm{mod}\ (t - \lambda_\nu)^{m_\nu}) \\ 0 \, (\mathrm{mod}\ (t - \lambda_\mu)^{m_\mu}) \text{ при } \mu \neq \nu \ . \end{cases}$$

Тогда многочлен $p_s(t) = \sum t \, g_\nu f_\nu$ будет многочленом без свободного члена и

$$p_s(t) \equiv \lambda_\nu \, (\mathrm{mod}\ (t - \lambda_\nu)^{m_\nu})$$

одновременно для всех ν. Это означает, что оператор $p_s(F)$ действует на каждом корневом подпространстве K_λ скалярным умножением на λ, а оператор $p_n(F) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F - p_s(F)$ нильпотентен. Мы получаем

11.2.3. СЛЕДСТВИЕ. *Для каждого оператора F над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ существуют многочлены без свободного члена $p_s, p_n \in \Bbbk[t]$ такие, что $F = p_s(F) + p_n(F)$, причём $p_n(F)$ нильпотентен, а $p_s(F)$ диагонализуем*[4] *и действует на каждом корневом подпространстве оператора F скалярным умножением на соответствующее собственное значение.* □

11.2.4. СЛЕДСТВИЕ (АДДИТИВНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЖОРДАНА). *Для каждого оператора F над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ существует единственная пара операторов F_s и F_n, таких что F_n нильпотентен, F_s диагонализуем*[5], *$F = F_s + F_n$ и $F_s F_n = F_n F_s$.*

Доказательство. Существование вытекает из предыдущего следствия: можно взять $F_s = p_s(F)$, $F_n = p_n(F)$. Будучи многочленами от F, эти два оператора коммутируют между собой, а также с любым оператором, перестановочным с F. Для любого другого разложения $F = F_s' + F_n'$, удовлетворяющего условиям следствия, F_s' будет перестановочен с F, а значит и с F_s. Поэтому эти два оператора можно диагонализовать в одном базисе. Собственные подпространства F_s — это корневые подпространства K_λ. Поэтому разность $F - F_s'$ может быть нильпотентна только если все собственные значения F_s' на K_λ равны λ. Но тогда $F_s' = F_s$, а значит, и $F_n' = F - F_s' = F - F_s F_n$. □

Упражнение 11.6. Покажите, что если оператор $V \xrightarrow{F} V$ переводит некоторое подпространство $U \subset V$ в некоторое подпространство $W \subset V$, то и F_s, и F_n тоже переводят U в W.

Упражнение 11.7. Покажите, что для коммутирующих операторов $FG = GF$ жордановы компоненты их суммы равны суммам жордановых компонент: $(F + G)_s = F_s + G_s$ и $(F + G)_n = F_n + G_n$.

[4] индекс «s» происходит от *semisimple*; в теории представлений диагонализуемые операторы называют *полупростыми* (а скалярные — *простыми*)

[5] операторы F_s и F_n называются, соответственно, *полупростой* и *нильпотентной* частями оператора F

11.3. Функции от оператора. Пусть поле $\Bbbk = \mathbb{C}$. Тогда корректно определён результат подстановки оператора F в любую функцию $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, представимую в окрестности каждого собственного значения λ оператора F суммой ряда Тейлора

$$f(\lambda + t) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda)(t-\lambda)^k \,, \quad \text{где} \quad f^{(k)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^k}{dt^k} f(t) \,. \tag{11-5}$$

В самом деле, ограничение оператора $f(F)$ на каждое неразложимое подпространство

$$J_\lambda(m) = \mathbb{C}[t]/\left((t-\lambda)^m\right)$$

можно вычислять подставляя F в локальное разложение (11-5), что даёт *конечную* сумму

$$f(F)|_{J_\lambda(m)} = f(\lambda) \cdot \mathrm{Id}_{J_\lambda(m)} + f'(\lambda) \cdot \eta + \frac{1}{2} f''(\lambda) \cdot \eta^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\lambda) \cdot \eta^{m-1} \,, \tag{11-6}$$

где η — нильпотентный оператор умножения на $(t-\lambda)$ в кольце $\mathbb{C}[t]/\left((t-\lambda)^m\right)$, как в n° 11.1.3. Отсюда следуют два замечательных вывода.

Во-первых, значение $f(F)$ всегда является многочленом от оператора F (зависящим от функции f). В качестве такого многочлена годится любой полином $p(t) \in \mathbb{C}[t]$, удовлетворяющий для каждого собственного значения λ оператора F условиям

$$f^{(k)}(\lambda) = p^{(k)}(\lambda) \quad \text{при всех } 0 \leqslant k \leqslant \mu(\lambda) - 1 \,, \tag{11-7}$$

где $\mu(\lambda)$ — максимальная из степеней элементарных делителей вида $(t-\lambda)^m$ оператора F (т. е. кратность корня λ в минимальном многочлене оператора F).

Упражнение 11.8. Покажите, что имеется ровно один такой многочлен p_f степени меньшей, чем степень минимального многочлена оператора F.

Указание. Многочлен p_f является решением интерполяционной задачи с кратными узлами, рассматривавшейся в первом семестре.

Во-вторых, для того чтобы формула (11-6) имела смысл, совершенно не обязательно требовать *сходимости* ряда (11-5): достаточно одного только *существования* производных $f^{(k)}(\lambda) \in \mathbb{C}$ для всех $0 \leqslant k \leqslant \mu(\lambda) - 1$. Обозначим через $C^{m_1, m_2, \dots, m_r}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r}$ пространство всех функций $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, имеющих в точках $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ конечные производные $f^{(k)}(\lambda_\nu) \in \mathbb{C}$ порядков $0 \leqslant k \leqslant (m_\nu - 1)$.

Упражнение 11.9. Убедитесь, что $C^{m_1, m_2, \dots, m_r}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r}$ является коммутативной $\mathbb{C}$-алгеброй и отображение

$$C^{m_1, m_2, \dots, m_s}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s} \xrightarrow{f \mapsto (s^{m_1}_{\lambda_1} f, \, \dots \, , s^{m_r}_{\lambda_r} f)} \bigoplus_{\nu=1}^{r} \frac{\mathbb{C}[t]}{((t-\lambda_\nu)^{m_\nu})} \simeq \frac{\mathbb{C}[t]}{(\prod (t-\lambda_\nu)^{m_\nu})} \,, \tag{11-8}$$

сопоставляющее функции f набор её m_ν*-струй* в точках λ_ν

$$s^{m_\nu}_{\lambda_\nu} f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{m_\nu - 1} f^{(k)}(\lambda_\nu)\,(t-\lambda_\nu)^k \pmod{(t-\lambda_\nu)^{m_\nu}} \,,$$

является гомоморфизмом $\mathbb{C}$-алгебр.

В случае, когда $\mu_F = \prod (t-\lambda_\nu)^{m_\nu}$ является минимальным многочленом оператора F, из этой задачи вытекает, что имеется гомоморфизм алгебр

$$C^{m_1, m_2, \dots, m_r}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r} \xrightarrow{f \mapsto p_f(F)} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \,,$$

сопоставляющий функции f оператор $p_f(F)$, где $p_f \in \mathbb{C}[t]/(\mu_F(t))$ есть образ f при гомоморфизме (11-8), и переводящий функции $f(t) \equiv 1$ и $f(t) = t$ в Id_V и F соответственно. Образ $p_f(F)$ данной функции $f \in C^{m_1, m_2, \dots, m_r}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r}$ при этом гомоморфизме обозначается $f(F)$ и называется *функцией f от оператора F*.

Отметим, что вместо задачи интерполяции функции f по модулю минимального многочлена $\mu_F(t)$ оператора F можно решать задачу интерполяции f по модулю характеристического многочлена $\chi_F(t)$ оператора F.

Упражнение 11.10. Пусть оператор $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ кратностей $k_1, k_2, \dots, k_r$ и $f \in C^{k_1,k_2,\dots,k_r}_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r}$. Покажите, что для (единственного) многочлена $P_f(t)$ степени меньшей, чем $\sum k_\nu$, и такого что $f^{(\ell)}(\lambda_\nu) = P_f^{(\ell)}(\lambda_\nu)$ при всех $0 \leqslant \ell \leqslant (k_\nu - 1)$, мы получим $P_f(F) = f(F)$.

Поскольку отыскать минимальный многочлен часто бывает трудно, а для $\chi_F(t)$ есть явное выражение, при практическом вычислении функций от оператора обычно используют именно этот интерполяционный многочлен.

11.3.1. ЛЕММА. *Пусть оператор $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ кратностей $k_1, k_2, \dots, k_r$ и $f \in C^{k_1,k_2,\dots,k_r}_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r}$. Тогда собственные значения оператора $f(F)$ исчерпываются числами $f(\lambda_\nu)$, и при $f'(\lambda_\nu) \neq 0$ каждый элементарный делитель вида $(t-\lambda_\nu)^m$ оператора F производит элементарный делитель $(t - f(\lambda_\nu))^m$ оператора $f(F)$. При $f'(\lambda_\nu) = 0$ элементарный делитель вида $(t - \lambda_\nu)^m$ оператора F (с $m > 1$) распадается в произведение элементарных делителей оператора $f(F)$ вида $(t - f(\lambda_\nu))^\ell$ с $\ell < m$.*

Доказательство. Из (11-6) видно, что диагональная и нильпотентная составляющие ограничения оператора $f(F)$ на неразложимое подпространство $J_\lambda(m)$ оператора F равны, соответственно, $f(\lambda) \cdot \mathrm{Id}$ и

$$\zeta = f'(\lambda) \cdot \eta + \frac{1}{2} f''(\lambda) \cdot \eta^2 + \ \cdots \ .$$

Поскольку $\zeta^{m-1} = f'(\lambda)^{m-1} \cdot \eta^{m-1} \neq 0$ при $f'(l) \neq 0$, жорданов базис для ζ тоже состоит из одной цепочки. При $f'(l) = 0$ и $m > 1$ нильпотентный оператор ζ будет аннулироваться строго меньшей степенью, чем m. $\square$