§4. Аффинная и выпуклая геометрия.

4.1. Абстрактные аффинные пространства. Аффинное пространство, ассоциированное с заданным векторным пространством V, часто возникает не в виде $\mathbb{A}(V)$, как в n° 1.2, а как некое «абстрактное» множество точек, которое можно отождествить с $\mathbb{A}(V)$, зафиксировав «начало отсчёта» O, или же как множество точек, для которого V может интерпретироваться либо как множество классов эквивалентности «направленных отрезков» из $\mathbb{A}$, либо как абелева группа, свободно и транзитивно действующая на $\mathbb{A}$ «параллельными переносами». Эти интуитивные представления формализуются следующими тремя эквивалентными способами.

Множество $\mathbb{A}$ называется *аффинным*[1] *пространством* ассоциированным с векторным пространством V, если

первое определение: задана операция «откладывания векторов от точек» $\mathbb{A} \times V \xrightarrow{(p,v)\mapsto p+v} \mathbb{A}$, которая удовлетворяет аксиомам:

1) $(p+v)+w = p+(v+w)\ \forall\, v,\, w \in V\ \ \forall\, p \in \mathbb{A}$;
2) $p + \overrightarrow{0} = p\quad \forall\, p \in \mathbb{A}$;
3) $\forall\, p, q \in \mathbb{A}$ существует единственный вектор $v \in V$, такой что $q = p + v$.

второе определение: задана операция «сопоставления паре точек вектора» $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \xrightarrow{(p,q)\mapsto\overrightarrow{pq}} V$, которая удовлетворяет аксиомам:

1) $\forall\, v \in V$ и $\forall\, p \in \mathbb{A}$ существует единственная точка $q \in \mathbb{A}$, такая что $\overrightarrow{pq} = v$;
2) $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}\quad \forall\, p, q, r \in \mathbb{A}$.

третье определение: множество $\mathbb{A}$ представляет собой аффинную карту в проективном пространстве $\mathbb{P}(W)$, ассоциированным с векторным пространством $W = \Bbbk \oplus V$, которая состоит из всех одномерных подпространств в $\Bbbk \oplus V$, имеющих нулевое пересечение с V (или, что то же самое, эпиморфно проектирующихся на $\Bbbk$ вдоль V).

Эквивалентность первых двух определений очевидна, поскольку из написанных аксиом вытекает, что обе операции однозначно задают друга правилом

$$v = \overrightarrow{pq} \quad\Longleftrightarrow\quad q = p + v\,.$$

Более того, фиксация произвольной точки $o \in \mathbb{A}$ в качестве «начала отсчёта» задаёт отождествление $\mathbb{A} \simeq \mathbb{A}(V)$ по правилу $p \mapsto \overrightarrow{op}$.

Упражнение 4.1. Убедитесь в этом и проверьте, что для любых четырёх точек p, q, r, s аффинного пространства $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs} \Longleftrightarrow \overrightarrow{ps} = \overrightarrow{qr}$.

Чтобы увидеть, что аффинная карта из третьего определения моделирует пространства, удовлетворяющие первым двум определениям, выберем в каждом одномерном подпространстве из этой карты базисный вектор $p = (1, v_p)$, являющийся прообразом $1 \in \Bbbk$ при (эпиморфной) проекции $W = \Bbbk \oplus V$ на $\Bbbk$ вдоль V. Тогда вычисленные в W разности двух таких векторов

$$\overrightarrow{pq} \stackrel{\text{def}}{=} q - p = (1, v_p) - (1, v_q) = (0, (v_p - v_q))$$

лежат в V и удовлетворяют аксиомам второго определения, а откладывание вектора от точки, индуцированное сложением векторов в $W = \Bbbk \oplus V$:

$$p + v = (1, v_p) + (0, v) = (1, (v_p + v))$$

[1] этот термин — калька с английского affine (ассоциированный), чем и объясняется негреческая орфография

удовлетворяет аксиомам первого определения. Наоборот, любое абстрактное аффинное пространство, удовлетворяющее первому или второму определению, можно поместить в качестве аффинной карты в W — для этого надо выбрать в нём начало отсчёта, отождествить его с $\mathbb{A}(V)$ и вложить $\mathbb{A}(V)$ в $\mathbb{A}(W)$ в качестве гиперплоскости, состоящей из точек вида $(1, v)$.

4.1.1. Пример: барицентрические координаты. Если зафиксировать в аффинной карте

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(V) \subset \mathbb{P}(\Bbbk \oplus V)$$

какие-нибудь $(n+1)$ точек $(p_0, p_1, \dots, p_n)$, не лежащих в одной $(n-1)$-мерной аффинной гиперплоскости, и взять представляющие эти точки векторы $p_i = (1, v_i)$ в качестве базиса пространства $W = \Bbbk \oplus V$, то в этом базисе карта $\mathbb{A}(V)$ будет задаваться аффинным уравнением

$$\sum x_i = 1 \,,$$

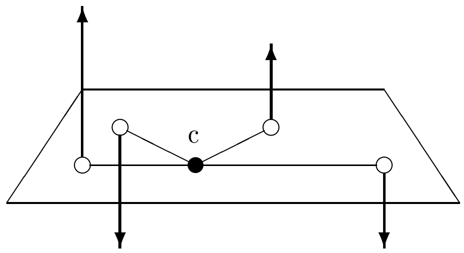


Рис. 4◇1. Моменты сил.

а произвольная точка $c \in \mathbb{P}(W)$ будет лежать в U тогда и только тогда, когда её однородные координаты $(\mu_0 : \mu_1 : \ \dots : \mu_n)$ в этом базисе будут удовлетворять условию $\sum \mu_i \neq 0$, т. е. могут быть перескалированы так, чтобы $\sum \mu_i = 1$. Однородные координаты $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$ можно в этом случае интерпретировать как веса, которые надо разместить в точки p_i, чтобы центр тяжести получившейся системы взвешенных точек попал в точку c.

Упражнение 4.2. Проверьте условие уравновешения моментов относительно точки c «сил тяжести», действующих на точки p_i (см. рис. 4◇1), т. е. равенство $\sum\limits_{i=0}^{n} \mu_i \cdot \overrightarrow{cp}_i = 0$.

Таким образом, сопоставляя набору весов $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ с $\sum \mu_i = 1$ центр тяжести c взвешенных точек $p_0, p_1, \dots, p_n$ (не лежащих в одной гиперплоскости), мы получаем биекцию между точками пространства $\mathbb{A}^n$ и такими наборами весов. Набор весов μ_i с $\sum \mu_i = 1$, отвечающий при этом точке $c = \sum \mu_i p_i$ называется *барицентрическими координатами* точки c относительно точек $(p_0, p_1, \dots, p_n)$.

4.1.2. Пример: центры тяжести и барицентрические комбинации. Более общим образом, для любого набора точек $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{A}^n$ и любого набора весов $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \Bbbk$ с $\sum \mu_i \neq 0$ существует единственная точка $c \in \mathbb{A}^n$ такая, что

$$\mu_1 \overrightarrow{cp}_1 + \mu_2 \overrightarrow{cp}_2 + \dots + \mu_m \overrightarrow{cp}_m = 0 \,. \tag{4-1}$$

Эта точка называется *центром тяжести* точек p_i с весами μ_i и находится по правилу

$$c = o + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i}{\mu_1 + \mu_1 + \ \cdots \ + \mu_m} \cdot \overrightarrow{op}_i \,, \tag{4-2}$$

в котором o — произвольная точка. Это сразу следует из того, что суммы (4-1), вычисленные для любых двух различных точек c, o, различаются на вектор

$$\sum \mu_i \overrightarrow{op}_i - \sum \mu_i \overrightarrow{cp}_i = \left(\sum \mu_i\right) \cdot \overrightarrow{oc} \,.$$

Отметим, что отсюда вытекает, в частности, что правая часть формулы (4-2) не зависит от выбора точки o.

Упражнение 4.3. Докажите, что для любого набора из m коэффициентов λ_i с $\sum \lambda_i = 1$ и любого набора m точек p_i точка

$$\sum \lambda_i p_i \overset{\text{def}}{=} o + \lambda_1 \overrightarrow{op}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{op}_2 + \dots + \lambda_m \overrightarrow{op}_m$$

не зависит от выбора точки o (она называется *барицентрической комбинацией* точек p_i).

4.1.3. ТЕОРЕМА О ГРУППИРОВАНИИ МАСС. *Пусть точки p_i с весами λ_i имеют центр тяжести p, а точки q_j с весами μ_j имеют центр тяжести q. Тогда центр тяжести их объединения*[2] *совпадает с центром тяжести пары точек p и q, взятых с весами $\sum \lambda_i$ и $\sum \mu_j$.*

[2]допускается, чтобы наборы пересекались — при объединении одинаковых точек таких наборов веса складываются

Доказательство. Подставляя в условие равновесия для c

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{cp_i} + \sum_j \mu_j \overrightarrow{cq_j} = 0$$

разложения $\overrightarrow{cp}_i = \overrightarrow{cp} + \overrightarrow{pp}_i$, $\overrightarrow{qq}_j = \overrightarrow{cq} + \overrightarrow{qq}_j$ и пользуясь равенствами $\sum \lambda_i \overrightarrow{pp_i} = 0$, $\sum \mu_j \overrightarrow{qq_j} = 0$, получим: $\left(\sum \lambda_i\right)\overrightarrow{cp} + \left(\sum \mu_j\right)\overrightarrow{cq} = 0$. □

4.1.4. СЛЕДСТВИЕ. *Барицентрическая комбинация от барицентрических комбинаций является барицентрической комбинацией исходных точек.* □

4.1.5. Пример: теорема Чевы. Пусть на сторонах $\triangle ABC \subset \mathbb{A}^2$ (или на их продолжениях) взяты точки A_1, B_1, C_1 (см. рис. 4◊2). Набор весов α, β, γ, которые следует поместить в его вершины, так чтобы центр тяжести точек A и B оказался в точке C_1, центр тяжести точек B и C — в точке A_1, а центр тяжести точек C и A — в точке B_1, существует тогда и только тогда, когда [3]

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1\,. \tag{4-3}$$

Если это условие выполнено, то центр тяжести вершин треугольника будет по теореме о группировании масс лежать на каждой из прямых AA_1, BB_1, CC_1, которые, таким образом, будут пересекаться в одной точке. Поскольку при фиксированных A_1, B_1 условие (4-3) фиксирует и точку C_1 однозначно, мы заключаем, что прямая CC_1 будет проходить через точку $AA_1 \cap BB_1$ только при выполнении равенства (4-3), которое тем самым равносильно условию $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \neq \varnothing$.

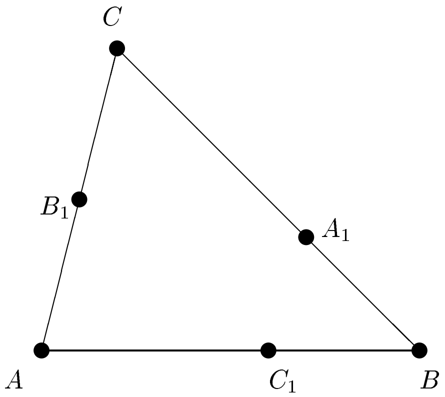


Рис. 4◊2. Теорема Чевы.

4.2. Аффинные отображения. Интуитивно, аффинное отображение

$$\mathbb{A} \xrightarrow{f} \mathbb{B} \tag{4-4}$$

между аффинными пространствами $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$, ассоциированными с векторными пространствами V и U, — это композиция линейного оператора и параллельного переноса. Чтобы сформулировать это точно, зафиксируем точку $o \in \mathbb{A}$ и свяжем с отображением (4-4) его *дифференциал*

$$V \xrightarrow{df} U\,, \tag{4-5}$$

определённый условием $u = df(v) \iff f(o) + u = f(o+v)$. По определению, отображение f называется *аффинным*, если его дифференциал df является линейным оператором.

Упражнение 4.4. Проверьте, что линейность отображения df не зависит от выбора точки o, и если df линейно, то сам оператор df также не зависит от выбора точки o.

На проективном языке, всякое аффинное отображение (4-4) является ограничением на аффинную карту $\mathbb{A}$ отображения проективных пространств

$$\mathbb{P}(\Bbbk \oplus V) \xrightarrow{\widetilde{F}} \mathbb{P}(\Bbbk \oplus U)$$

индуцированного линейным оператором $\Bbbk \oplus V \xrightarrow{F} \Bbbk \oplus U$, таким что $F(V) \subset U$ и индуцированный оператор

$$(\Bbbk \oplus V)/V \simeq \Bbbk \xrightarrow{F\,(\mathrm{mod}\,V)} \Bbbk \simeq (\Bbbk \oplus U)/U$$

является изоморфизмом. В самом деле, при выполнении этого условия F можно так домножить на константу (что не меняет $\widetilde{F}$), чтобы его матрица относительно разложений $\Bbbk \oplus V$ и $\Bbbk \oplus U$ имела вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & \widetilde{f} \end{pmatrix}\,,$$

[3] под отношением двух пропорциональных векторов понимается коэффициент пропорциональности

где $u = F\big((1,0)\big) = f(0)$ и $\widetilde{f} = F|_V = df : V \longrightarrow U$.

Упражнение 4.5. Докажите, что отображение f аффинных пространств тогда и только тогда аффинно, когда оно сохраняет барицентрические комбинации, т. е. для любого набора взвешенных точек (суммарного веса 1) выполнено равенство

$$f\left(\sum \lambda_i p_i\right) = \sum \lambda_i F(p_i)$$

4.2.1. Пример: аффинные функционалы. Аффинное отображение $\mathbb{A}^n \xrightarrow{a} \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}(\Bbbk)$ называется *аффинным функционалом* на $\mathbb{A}^n$. Выбирая в $\mathbb{A}^n$ начальную точку o, мы можем записать всякий аффинный функционал в виде

$$a(p) = \alpha(\overrightarrow{op}) + a_0 \ ,$$

где $a_0 = a(o) \in \Bbbk$ есть значение функционала a в точке o, а $\alpha = da \in V^*$ есть дифференциал a, являющийся элементом пространства, двойственного к векторному пространству V, подлежащему $\mathbb{A}^n$. В частности, аффинные функционалы на n-мерном аффинном пространстве составляют $(n+1)$-мерное *векторное* пространство, которое мы будем обозначать $F(\mathbb{A}^n)$. Отображение вычисления значения аффинного функционала в заданной точке $p \in \mathbb{A}^n$

$$\mathrm{ev}_p \ : F(\mathbb{A}^n) \xrightarrow{a \longmapsto a(p)} \Bbbk$$

является *линейный* функционалом на этом векторном пространстве, т. е. элементом векторного пространства $F^*(\mathbb{A}^n)$.

Упражнение 4.6. Покажите, что $n+1$ точек пространства $\mathbb{A}_n$ тогда и только тогда не лежат в одной гиперплоскости, когда отвечающие им функционалы вычисления образуют базис векторного пространства, двойственного пространству аффинных функционалов на $\mathbb{A}^n$.

Упражнение 4.7. Что за подмножество образуют в $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}\left(F^*(\mathbb{A}^n)\right)$ функционалы вычисления, отвечающие всевозможным точкам исходного аффинного пространства $\mathbb{A}^n$?

4.3. Вещественная выпуклая геометрия. Начиная с этого момента и до конца параграфа мы будем заниматься специальными свойствами аффинных пространств над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. При этом под $\mathbb{R}^n$ мы всегда будем понимать аффинное пространство, ассоциированное с n-мерным координатным векторным пространством над $\mathbb{R}$.

4.3.1. Кубы и стандартная топология в $\mathbb{R}^n$. Будем называть *ε-кубом*[4] с центром в точке $p = (p_1, p_2, \dots , p_n)$ фигуру

$$Q_\varepsilon(p) \overset{\text{def}}{=} \{x = (x_1, x_2, \dots , x_n) \ : \ |x_i - p_i| \leq \varepsilon \ \forall i\} \ .$$

Куб $Q_1(o)$, где $o = (0, 0, \ \dots \ , 0)$, мы будем называть *стандартным кубом*.

Упражнение 4.8. Нарисуйте произвольную 2-мерную проекцию 4-мерного куба, на которой все вершины изображаются разными точками, а также нарисуйте развёртку 3-мерной границы 4-мерного куба (она состоит из «обычных» 3-мерных кубиков) с указанием, какие двумерные грани (квадратики) надо склеить друг с другом, чтобы получился 4-мерный куб.

Упражнение 4.9. Для каждого $0 \leqslant k \leqslant (n-1)$ найдите число k-мерных граней n-мерного куба, а также число всех его внутренних диагоналей.

Напомним, что *стандартная топология* на $\mathbb{R}^n$ имеет в качестве открытых множества, содержащие вместе с каждой своей точкой и некоторый ε-куб с центром в этой точке. Дополненеия до открытых множеств называются *замкнутыми*.

Упражнение 4.10. Докажите, что это действительно топология, причём не зависящая от выбора системы координат.

Упражнение 4.11. Убедитесь, что сходимость в стандартной топологии пространства $\mathbb{R}^n$ означает покоординатную сходимость.

Напомним также, что со всякой фигурой $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ связано множество её *внутренних точек* $\overset{\circ}{\Phi}$, состоящее из точек, содержащихся в Φ вместе с некоторой кубической окрестностью, а также

[4] под ε мы всегда понимаем положительное вещественное число

замыкание $\overline{\Phi}$, равное пересечению всех замкнутых множеств, содержащих Φ. Точки дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Phi}$ называются *внешними точками* фигуры Φ, а точки, не являющиеся ни внешними, ни внутренними, называются *граничными* или *собственными граничными*, смотря по тому, принадлежат ли они фигуре Φ. Множество всех граничных точек Φ мы обозначим через $\partial\Phi$.

Упражнение 4.12. Убедитесь, что

а) $p \in \partial\Phi$ тогда и только тогда, когда любой ε-куб $Q_\varepsilon(p)$ содержит как точки из Φ, так и точки, не принадлежащие Φ.

б) $p \notin \Phi$ является внешней , если и только если $\Phi \cap Q_\varepsilon(p) = \varnothing$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

4.3.2. Выпуклые оболочки и выпуклые фигуры. Барицентрическая комбинация

$$\sum \lambda_i \cdot p_i \qquad (\text{с } \sum \lambda_i = 1)$$

точек p_i называется *выпуклой*, если все $\lambda_i \geqslant 0$. Совокупность всех выпуклых барицентрических комбинаций всевозможных конечных наборов точек фигуры Φ называется *выпуклой оболочкой* фигуры Φ и обозначается $\operatorname{conv}(\Phi)$. Фигура, совпадающая со своей выпуклой оболочкой, называется *выпуклой*.

По теореме о группировании масс, отыскание барицентричекой комбинации произвольного конечного набора точек сводится к отысканию барицентричеких комбинаций пар точек. Следовательно, для выпуклости фигуры Φ необходимо и достаточно, чтобы вмести с любыми двумя точками $p, q \in \Phi$ в Φ содержался и соединяющий их *отрезок*

$$[pq] \overset{\text{def}}{=} \operatorname{conv}\{p,q\} = \{\lambda p + \mu q \mid \lambda + \mu = 1\,,\ \lambda, \mu > 0\}\ ,$$

и $\operatorname{conv}(\Phi) = \bigcup\limits_{p,q\in\Phi} [pq]$ для любой фигуры Φ.

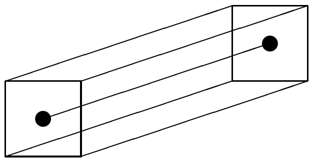


Рис. 4◇3. Выпуклость внутренности.

Упражнение 4.13. Убедитесь, что пересечение выпуклых фигур выпукло, и что $\operatorname{conv}(\Phi)$ совпадает с пересечением всех выпуклых множеств, содержащих Φ.

Отметим, что внутренность и замыкание любого выпуклого множества тоже будут выпуклы. Первое вытекает из того, что выпуклость Φ и $Q_\varepsilon(a) \subset \Phi$, $Q_\varepsilon(b) \subset \Phi$ влекут, что все точки отрезка $[ab]$ будут содержаться в Φ вместе с некоторыми кубическими окрестностями (см. рис. 4◇3). Второе вытекает из того, что для $a = \lim a_i$, $b = \lim b_i$ и любых фиксированных λ, μ мы имеем $\lim(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda a + \mu b$.

4.3.3. Пример: симплексы. Выпуклая оболочка $k+1$ точек $p_0, p_1, \dots, p_k$, не лежащих ни в какой $(k-1)$-мерной плоскости, называется k-мерным *симплексом* с вершинами в этих точках и обозначается

$$[p_0, p_1, \dots, p_k] = \left\{ \sum \lambda_i p_i \mid \sum \lambda_i = 1\,,\ \lambda_i \geqslant 0 \right\}\ .$$

В частности, 1-мерные и 2-мерные симплексы — это отрезки и треугольники.

Упражнение 4.14. Проверьте, что граница симплекса $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ является объединением всевозможных симплексов вида $[p_{\nu_1}, p_{\nu_2}, \dots, p_{\nu_m}]$ с $m < n$ и $\nu_i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Для каждого $0 \leqslant k \leqslant (n-1)$ подсчитайте количесиво k-мерных граней у n-мерного симплекса.

4.3.4. ЛЕММА. *В аффинном пространстве размерности $\geqslant 2$, через любую точку, не принадлежащую произвольно заданному открытому выпуклому множеству, всегда можно провести прямую, не пересекающую это множество.*

Доказательство. Если U открыто и выпукло, и $p \notin U$, то открытый конус C, заметаемый всевозможными пересекающими U открытыми лучами с началом в p

$$(pu) = \{\lambda p + \mu u \mid u \in U\,,\ \lambda + \mu = 1\,,\ \mu > 0\}$$

также будет открытым и выпуклым, причём для произвольной прямой $\ell \ni p$ будет выполнена альтернатива:

$$\text{либо } \ell \cap U = \varnothing\ , \qquad \text{либо } \ell \cap \partial C = \{p\}\,, \tag{4-6}$$

причём во втором случае все точки ℓ по одну сторону от p будут внутренними для C, а по другую сторону — внешними. В частности, всегда существует точка, являющаяся внешней для C. Проведём через неё любую прямую ℓ, пересекающую U и не проходящую через p. На этой прямой найдётся точка $q \in \partial C$, отличная от p. Прямая (pq) является искомой в силу альтернативы (4-6): она проходит через p, содержит граничную для C точку $q \neq p$, а стало быть, не может пересекать U. $\square$

Упражнение 4.15. Убедитесь, что для одномерных пространств предыдущая лемма неверна, и укажите в доказательстве место, где использовалась многомерность.

4.4. Опорные полупространства. Для всякого аффинного функционала $\mathbb{R}^n \xrightarrow{a} \mathbb{R}$ обозначим через $H_a = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) = 0\}$ аффинную гиперплоскость, на которой он обращается в нуль. Эта гиперплоскость служит границей двух *полупространств*

$$H_a^+ \overset{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \geqslant 0\} \,,$$
$$H_a^- \overset{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) \leqslant 0\} \,,$$

внутренности которых являются непустыми непересекающимися открытыми выпуклыми множествами

$$\overset{\circ}{H}{}_a^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) > 0\}$$
$$\overset{\circ}{H}{}_a^- = \{p \in \mathbb{R}^n \mid a(p) < 0\}$$

с общей границей $\partial \overset{\circ}{H}{}_a^+ = \partial \overset{\circ}{H}{}_a^- = H_a$, и любой отрезок с концами в разных открытых полупространствах пересекает границу H_a в единственной внутренней точке. Всё это немедленно вытекает из хорошо известных ещё по школе свойств линейной функции на отрезке:

Упражнение 4.16. Убедитесь, что для любого аффинного линейного функционала a и произвольного отрезка $[pq]$ имеет место следующая альтернатива:

- либо $a|_{[pq]} \equiv 0$;
- либо a не обращается в нуль нигде на $[pq]$, имеет постоянный знак, и $a(p)a(q) > 0$;
- либо a обращается в нуль в единтвенной точке отрезка, причём либо эта точка внутренняя, и тогда $a(p)a(q) < 0$ и знаки у a по обе стороны от этой точки такие же как на соответствующих концах, либо эта точка совпадает с одним из концов, и тогда на остальной части отрезка знак у a такой же, как на другом конце.

4.4.1. ЛЕММА. *Любую (в том числе нульмерную) аффинную плоскость π, не пересекающую произвольно заданное открытое выпуклое множество U, можно расширить до гиперплоскости, также не пересекающей U.*

Доказательство. Можно считать, что дело происходит в аффинизации $\mathbb{A}(V)$ векторного пространства V, и что $\pi = \mathbb{A}(W)$ для некоторого векторного подпространства $W \subset V$. Рассмотрим какое-нибудь подпространство $H \subset V$, содержащее W, не пересекающее U и имеющее максимальную размерность среди всех подпространств, обладающих этими свойствами. Представим V в виде $V = H \oplus H'$ с подходящим H' и покажем, что $\dim H_1 = 1$. Для этого спроектируем V на H' вдоль H. Поскольку при такой проекции отрезки переходят в отрезки, а кубы — в кубы, множество U спроектируется в некоторое открытое выпуклое множество $U' \subset \mathbb{A}(H')$, которое не содержит нуля (ибо $H \cap U = \varnothing$), но пересекается с любой проходящей через нуль прямой (иначе H можно было бы увеличить). Согласно n° 4.3.4 такое возможно только в одномерном аффинном пространстве. $\square$

4.4.2. СЛЕДСТВИЕ. *Через каждую граничную точку p любого выпуклого множества M можно провести гиперплоскость H_a так, чтобы $M \subset H_a^+$.*

Доказательство. Случай, когда M лежит в плоскости, очевиден. В остальных случаях у M есть непустая внутренность (внутренность любого полномерного симплекса непуста), и мы можем провести через p

гиперплоскость H_a, не пересекающую внутренность M. Если бы a менял на $\mathring{M}$ знак, то соединяя точки разного знака отрезком, мы получили бы на этом отрезке нуль функционала, т.е. точку из H_a, что невозможно в виду выпуклости $\mathring{M}$. $\square$

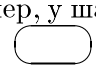
Полупространство H_a^+, гиперплоскость H_a и функционал a из предыдущего следствия называются *опорными* для множества M в точке $p \in \partial M$.

4.5. Замкнутые выпуклые множества. Ясно, что любые пересечения полупространств являются замкнутыми выпуклыми множествами. Обратное тоже верно.

4.5.1. ТЕОРЕМА. *Всякое замкнутое выпуклое множество является пересечением своих опорных полупространств.*

Доказательство. Индукция по размерности сводит всё к случаю, когда рассматриваемое множество M имеет непустую внутренность. Чтобы проверить, что каждая внешняя точка $q \notin M$ не лежит хотя бы в одном из опорных полупространств, соединим q отрезком $[qp]$ с какой-нибудь внутренней точкой $p \in \mathring{M}$ и проведём опорное полупространство H_a^+ к M в граничной точке $x \in \partial M \cap [qp]$. Поскольку x лежит строго внутри $[qp]$, из $a(p) > 0$ и $a(x) = 0$ следует, что $a(q) < 0$, т.е. $q \notin H_a^+$. $\square$

4.5.2. Грани и крайние точки. Пересечение замкнутого выпуклого множества M с любой его опорной гиперплоскостью называется *гранью* M. Все грани тоже являются замкнутыми выпуклыми множествами, и лежат в аффинных пространствах, размерности которых меньше, чем у исходного пространства, содержащего M. Размерностью грани называется размерность её *аффинной оболочки*[5]. По отношению к стандартной топологии этой аффинной оболочки имеет смысл говорить о внутренних, внешних и граничных точках каждой грани. Нульмерные грани (т.е. грани-точки) называются *вершинами*.

Предупредим, что интуитивное содержание термина «грань», основанное на опыте работы с многогранниками (см. n° 4.6 ниже), может оказаться неадекватным при работе с произвольными выпуклыми замкнутыми множествами. Например, у шара имеется континуальное множество граней и все они нульмерны, а с фигурами типа  (имеющими гладкое сопряжение отрезков с овалами) дело обстоит ещё более странно.

Упражнение 4.17. Всегда ли грань грани является гранью и для исходной фигуры?

Точка $p \in M$ называется *крайней*, если она не является внутренней точкой никакого отрезка, целиком содержащегося в M. Например, любая вершина $p = H_a \cap M$ является крайней точкой, поскольку опорный функционал a строго положителен на M всюду вне p, и согласно альтернативе из упр. 4.16, p может быть лишь концом для отрезка из M.

Упражнение 4.18. Приведите пример выпуклой фигуры с отличными от вершин крайними точками.

4.5.3. ЛЕММА. *Всякое выпуклое замкнутое ограниченное множество является выпуклой оболочкой своих крайних точек.*

Доказательство. Всякая внутренняя точка ограниченного замкнутого выпуклого множества является выпуклой комбинацией концов отрезка, высекаемого множеством на произвольной прямой, проходящей через эту точку. Эти концы лежат в некоторых гранях, и применяя индукцию по размерности, мы можем считать, что они являются выпуклыми комбинациями крайних точек этих граней. Но крайние точки грани $H_a \cap M$ являются крайними точками и для M: как и выше, такая точка не может быть внутренней точкой никакого отрезка с концом в $M \setminus H_a$, поскольку a строго положителен на $M \setminus H_a$. $\square$

4.6. Выпуклые многогранники. Пересечение конечного числа замкнутых полупространств называется *выпуклым многогранником*. На языке формул, выпуклый многогранник является множеством решений конечной системы нестрогих линейных неоднородных неравенств.

Отметим, что многогранник не обязан быть ограниченным: например, любые аффинные подпространства также являются многогранниками.

Другими важными примерами неограниченных многогранников являются *выпуклые полиэдральные конусы*, которые определяются как пересечения конечных наборов полупространств,

[5] т.е. пересечения всех аффинных подпространств, содержащих эту грань

все граничные гиперплоскости которых проходят через фиксированную точку — *вершину конуса*. Вместе с каждой своей отличной от вершины точкой такой конус содержит и весь проходящий через эту точку замкнутый луч с началом в вершине. В аффинных координатах с началом в вершине конуса выпуклый полиэдральный конус задаётся системой линейных *однородных* неравенств.

4.6.1. ЛЕММА. *Все грани произвольного выпуклого многогранника являются решениями всевозможных систем, получающихся из исходной системы неравенств, задающей сам многогранник, заменой некоторых неравенств на равенства*[6].

Доказательство. Пусть многогранник M является пересечением полупространств $H_1^+, H_2^+, \dots, H_m^+$, отвечающих функционалам $a_1, a_2, \dots, a_m$. Мы должны показать, что все грани M исчерпываются непустыми пересечениями вида

$$H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k} \cap M \neq \varnothing \,.$$

То, что такое пересечение (если оно не пусто) является гранью сразу следует из того, что функционал $b = a_{i_1} + \dots + a_{i_k}$ является опорным для M, и $H_b \cap M = H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_k} \cap M$. Наоборот, для произвольной грани $\Gamma = H_b \cap M$ перенумеруем функционалы a_ν так, чтобы $a_1, a_2, \dots, a_k$ занулялись на Γ тождественно, а каждый из оставшихся $m - k$ функционалов был бы положителен хоть в какой-нибудь точке из Γ. Тогда в центре тяжести $p \in \Gamma$ всех этих точек будут положительны одновременно *все* $m - k$ последних функционалов, откуда следует, что $k \geqslant 1$, и p является внутренней точкой для грани

$$\Phi = H_{a_1} \cap \dots \cap H_{a_k} \cap M \,.$$

По построению, $\Gamma \subset \Phi$. С другой стороны, $\Phi \subset H_b$, поскольку в противном случае мы имели бы точку $q \in \Phi$ с $b(q) > 0$ и, немного продлив отрезок $[qp]$ за внутреннюю для Φ точку p, получили бы точку $r \in \Phi$ с $b(r) < 0$, что невозможно для опорного функционала b. Итак $\Phi \subset H_b \cap M = \Gamma$, т. е. $\Gamma = \Phi$. □

4.6.2. СЛЕДСТВИЕ. *Любой выпуклый многогранник имеет конечное множество граней, причём все они также являются выпуклыми многогранниками.* □

4.6.3. СЛЕДСТВИЕ. *В произвольном выпуклом многограннике каждая грань любой грани является гранью и для исходного многогранника.* □

4.6.4. СЛЕДСТВИЕ. *Концевыми точками произвольного выпуклого многогранника являются его вершины и только они.*

Доказательство. Концевая точка лежит в грани, причём в гарани этой грани, более того, в грани грани грани и т. д. пока не дойдём до нульмерных граней, т. е. до вершин. □

4.6.5. ТЕОРЕМА МИНКОВСКОГО – ВЕЙЛЯ. *В классе ограниченных замкнутых выпуклых множеств выпуклыми многогранниками являются выпуклые оболочки конечных наборов точек и только они.*

Доказательство. Из предыдущего описания граней и концевых точек вытекает, что у любого выпуклого многогранника имеется конечное множество концевых точек (= вершин), и по n° 4.5.3 многогранник является их выпуклой оболочкой.

Проверить, что выпуклая оболочка любого конечного набора точек $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{A}^n$ задаётся конечным числом неравенств достаточно в предположении, что эти точки не лежат ни в какой гиперплоскости, и стало быть, из функционалов вычисления ev_{p_i} можно выбрать базис $e_0, e_1, \dots, e_n$ для пространства F^*, двойственного к векторному пространству F всех аффинных функционалов на $\mathbb{A}^n$.

Ясно, что $\mathrm{conv}(p_1, p_2, \dots, p_m)$ является пересечением бесконечного семейства полупространств H_a^+ по всем a, удовлетворяющим условиям $a(p_i) \geqslant 0$ для всех i. Поскольку p_i не лежат ни в какой гиперплоскости, для каждого такого функционала a число $\sum a(p_i)$ строго положительно, и, деля каждый a на $\sum a(p_i)$ (что никак не влияет на полупространство H_a^+), мы можем ограничиться только функционалами a с $\sum a(p_i) = 1$. В аффинном пространстве $\mathbb{A}(F)$ такие функционалы образуют выпуклый многогранник, задаваемый условиями

$$\sum a(p_i) = 1 \,, \quad a(p_i) \geqslant 0 \,.$$

[6] что формально эквивалентно дописываню к исходной системе неравенств $f_\nu \geqslant c_\nu$ нескольких противоположных неравенств $f_\nu \leqslant c_\nu$

Этот многогранник содержится в единичном координатном кубе $0 \leqslant e_i(a) \leqslant 1$ и, будучи ограниченным, является выпуклой оболочкой конечного множества своих вершин $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Иными словами, все рассматриваемые нами a представимы в виде $a = \sum \lambda_\mu a_\mu$ с $\lambda_\mu \geqslant 0$, и значит все неравенства $a(p_i) \geqslant 0$ являются следствиями конечного числа неравенств $a_j(p_i) \geqslant 0$. $\square$