§3. Отступление: пучки прямых, коники и построения одной линейкой.

3.1. Проективная двойственность. Для любого $m = 0, 1, \dots, (n-1)$ существует каноническая биекция между m–мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $(n-1-m)$–мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n^\times \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V^*)$, переводящая подпространство $L = \mathbb{P}(U)$ в подпространство $L^\times \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\operatorname{Ann}(U))$, где *аннулятор* подпространства U

$$\operatorname{Ann}(U) \overset{\text{def}}{=} \{\, \xi \in V^* \mid \xi(u) = 0 \quad \forall\, u \in U \,\}$$

есть пространство линейных уравнений, задающих U. Соответствие $L \leftrightarrow L^\times$ называется *проективной двойственностью*, поскольку при естественном отождествлении $V^{**} = V$ мы имеем $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} U = \{\, v \in V \mid \xi(v) = 0 \quad \forall\, \xi \in \operatorname{Ann} U \,\} = U$, т. е. $L^{\times\times} = L$.

Проективная двойственность переводит геометрию на $\mathbb{P}_n$ в геометрию $\mathbb{P}_n^\times$ и обратно, обращая включения (т. е. $L_1 \subset L_2 \iff L_1^\times \supset L_2^\times$) и линейную инцидентность (т. е. все подпространства $L_1, L_2, \dots, L_r$ содержатся в некотором m-мерном подпространстве L тогда и только тогда, когда каждое из $L_1^\times, L_2^\times, \dots, L_r^\times$ содержат $(n-m-1)$-мерное подпространство $L^\times$). Например, 3 точки коллинеарны тогда и только тогда, когда 3 дуальные гиперплоскости содержат общее подпространство коразмерности 2.

В частности, на плоскости $\mathbb{P}_2$ мы имеем следующий словарик:

прямая $\ell \subset \mathbb{P}_2$	$\longleftrightarrow$	точка $\ell^\times \in \mathbb{P}_2^\times$
точка $p \in \ell$ на $\mathbb{P}_2$	$\longleftrightarrow$	прямая $p^\times \ni \ell^\times$ на $\mathbb{P}_2^\times$
прямая $(p_1, p_2) \subset \mathbb{P}_2$	$\longleftrightarrow$	точка пересечения прямых $p_1^\times \cap p_2^\times \in \mathbb{P}_2^\times$
точки p некоторой коники Q	$\longleftrightarrow$	касательные $p^\times$ к некоторой конике $Q^\times$
касательные ℓ к Q	$\longleftrightarrow$	точки $\ell^\times$ коники $Q^\times$

Упражнение 3.1. Чтобы понять последние два пункта, докажите, что касательные пространства невырожденной квадрики $Q \subset \mathbb{P}(V)$ составляют невырожденную квадрику $Q^\times \subset \mathbb{P}(V^*)$, матрица Грама которой в двойственном базисе пространства V^* обратна к матрице Грама квадрики Q.

3.1.1. СЛЕДСТВИЕ. *Каждые 5 прямых без тройных пересечений в $\mathbb{P}_2$ касаются единственной невырожденной коники.*

Доказательство. Это утверждение является проективно двойственным к предложению из n° 2.4.5. Если $\ell_i \in \mathbb{P}_2$ — заданные прямые, то существует единственная (автоматически невырожденная) коника $Q^\times$, проходящая через 5 точек $\ell_i^\times \in \mathbb{P}_2^\times$, и $\ell_i = \ell_i^{\times\times}$ касаются двойственной коники $Q = Q^{\times\times} \subset \mathbb{P}_2$. □

3.2. Дробно линейные преобразования и коники. Обозначим через $Q \xrightarrow{\pi_\ell^p} \ell$ проекцию произвольной невырожденной коники Q на произвольную прямую ℓ из любой точки $p \in Q$.

Упражнение 3.2. Покажите, что эту проекцию можно доопределить в точке p правилом $p \longmapsto \ell \cap T_p Q$ до взаимно однозначного отображения, которое в координатах будет записываться рациональными алгебраическими функциями.

Указание. Выразить координаты $t = \pi_\ell^p(x)$ через координаты x удобно в системе, где $p = (1 : 0 : 0)$, а ℓ задается уравнением $x_0 = 0$ (тогда $t = (0 : x_1 : x_2)$). Чтобы получить обратное выражение $x = (x_0 : x_1 : x_2)$ через $t = (0 : t_1 : t_2)$, достаточно уметь решать линейные уравнения и находить второй корень квадратного уравнения, первый корень которого известен. Обе эти процедуры требуют применения лишь четырёх арифметических операций, т. е. их результат является *рациональной* функцией t.

Таким образом, для любой пары прямых ℓ_1, ℓ_2 на $\mathbb{P}_2$ произвольная коника Q с двумя отмеченными точками $p_1, p_2 \in Q$ определяет проективный линейный изоморфизм

$$\gamma_Q^{p_2 p_1} : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2 \,,$$

возникающий как композиция проекций $\gamma_Q^{p_2p_1} \overset{\text{def}}{=} \pi_{\ell_2}^{p_2} \circ \left(\pi_{\ell_1}^{p_1}\right)^{-1}$ (см. рис. 3◇1).

На самом деле любой проективный линейный изоморфизм $\ell_1 \xrightarrow{\gamma} \ell_2$ можно бесконечно многими способами представить в виде $\gamma_Q^{p_2p_1}$ для подходящих Q и $p_1, p_2 \in Q$. Скажем, если γ переводит тройку точек $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ в тройку точек $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$, достаточно взять в качестве p_1, p_2 *любые* две точки так, чтобы никакие 4 из 5 точек p_1, p_2, $(a_1\,p_1) \cap (a_2\,p_2)$, $(b_1\,p_1) \cap (b_2\,p_2)$, $(c_1\,p_1) \cap (c_2\,p_2)$ не были коллинеарны (см. рис. 3◇2) и провести Q через эти 5 точек (это уже делается единственным способом). Ясно, что $\gamma = \gamma_Q^{p_2p_1}$, поскольку они совпадают на 3 точках a_1, b_1, c_1.

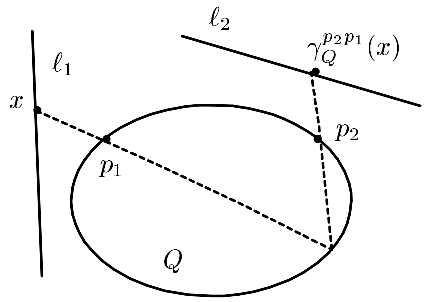

Рис. 3◇1. Композиция двух проекций.

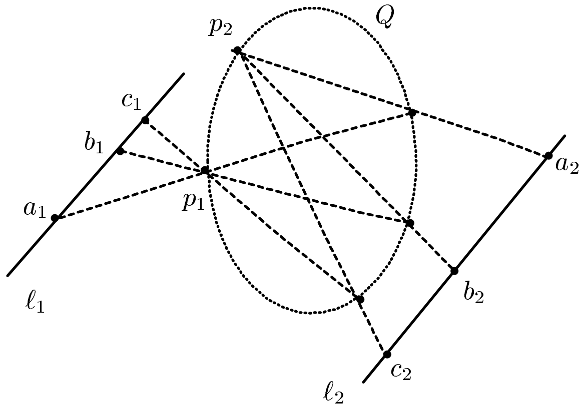

Рис. 3◇2. Как подобрать p_1, p_2.

Например, чтобы представить в виде $\ell_1 \xrightarrow{\gamma_Q^{p_2p_1}} \ell_2$ центральную проекцию[1] $\ell_1 \xrightarrow{\gamma_O} \ell_2$, переводящую $x \in \ell_1$ в $\gamma_O(x) = (x\,O) \cap \ell_2$, достаточно (см. рис. 3◇3) выбрать p_1, p_2 на прямых (ad) и (be), проходящих через две пары соответственных точек a, $d = \gamma_O(a)$ и e, $b = \gamma_O(e)$ и провести конику Q через 5 точек p_1, p_2, a, b, c (равенство $\gamma_Q^{p_2p_1} = \gamma_O$ легко проверяется по трём точкам: $c \longmapsto c$, $a \longmapsto d$, $e \longmapsto b$).

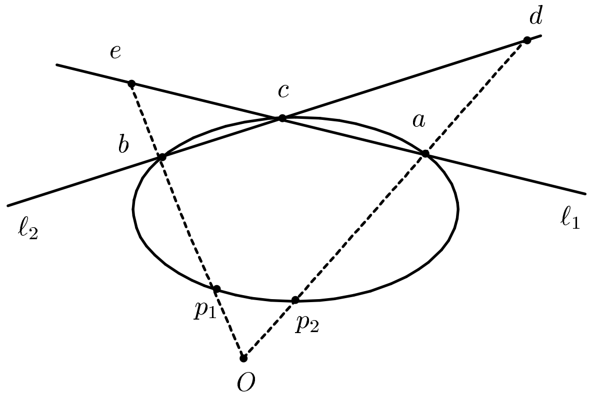

Рис. 3◇3. Замечательное совпадение.

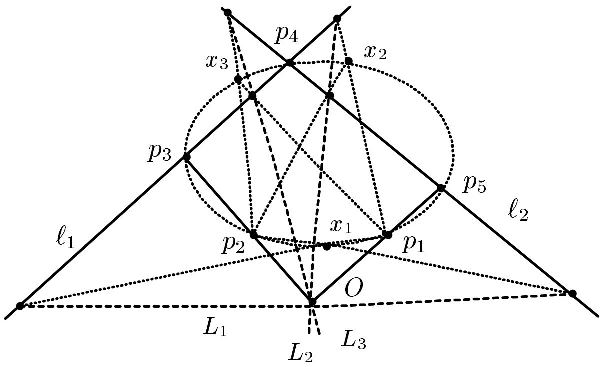

Рис. 3◇4. Построение коники.

3.2.1. Пример: построение коники одной линейкой. Предыдущее замечание позволяет, действуя одной только линейкой, построить сколь угодно плотное множество точек коники Q, проходящей через заданные 5 точек $p_1, p_2, \dots, p_5$, никакие 3 из которых не коллинеарны. Для этого восстановим рис. 3◇3, проведя прямые $\ell_1 = (p_3p_4)$, $\ell_2 = (p_4p_5)$, и рассмотрим центральную проекцию $\ell_1 \xrightarrow{\gamma_O} \ell_2$ из точки $O = (p_1p_5) \cap (p_2p_3)$ (см. рис. 3◇4). Эта проекция переводит друг в друга любые две точки $\ell_1 \cap L$, $\ell_2 \cap L$, высекаемые на ℓ_1, ℓ_2 произвольной прямой $L \ni O$. С другой стороны, поскольку $\gamma_O = \gamma_Q^{p_2p_1}$, прямая, соединяющая p_1 с $\ell_1 \cap L$, и прямая, соединяющая p_2 с $\ell_2 \cap L$, должны пересекаться в точке $x \in Q$. Тем самым, варьируя $L \ni O$, мы будем получать различные точки $x \in Q$, как на рис. 3◇4, где точки x_1, x_2, x_3 построены по прямым L_1, L_2, L_3.

[1]из произвольной точки $O \notin \ell_1 \cup \ell_2$

3.2.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (ТЕОРЕМА ПАСКАЛЯ). *Шестиугольник $p_1, p_2, \dots, p_6$ тогда и только тогда вписан в невырожденную конику, когда лежат на одной прямой 3 точки пересечения продолжений его противоположных сторон: $(p_1p_2)\cap(p_4p_5)$, $(p_2p_3)\cap(p_5p_6)$, $(p_3p_4)\cap(p_6p_1)$ (см. рис. 3◇5).*

Доказательство. Проведем конику Q через пять вершин p_i — все, кроме p_4. Пусть $\ell_1 = (p_1p_6)$, $\ell_2 = (p_1p_2)$, $y = (p_5p_6) \cap (p_2p_3)$, $x = (p_3p_4) \cap \ell_1$, $z = (xy) \cap \ell_2$. Тогда $z \in \ell_2$ есть образ $x \in \ell_1$ при центральной проекции $\ell_1 \xrightarrow{\gamma_y} \ell_2$ из y, которая представляется композицией $\gamma_Q^{p_2p_1}$. Стало быть, точка пересечения $(p_3p_4) \cap (p_5z)$ лежит на Q , если и только если $p_4 = (p_3p_4) \cap (p_5z)$. □

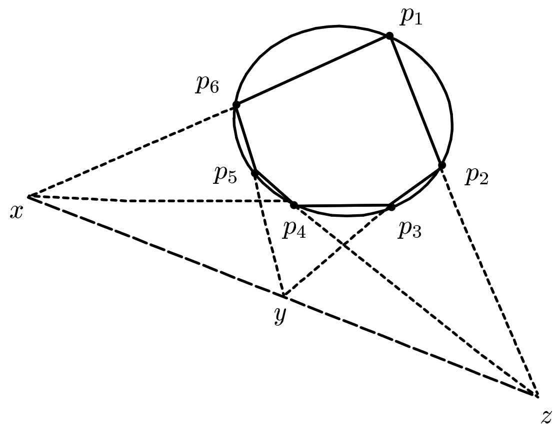

Рис. 3◇5. Вписанный шестиугольник.

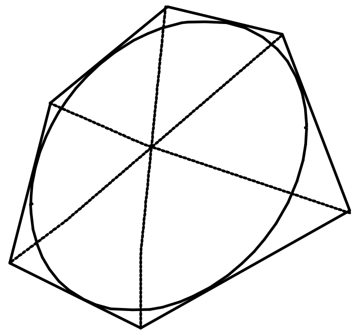

Рис. 3◇6. Описанный шестиугольник.

3.2.3. СЛЕДСТВИЕ (ТЕОРЕМА БРИАНШОНА). *Шестиугольник $p_1, p_2, \dots, p_6$ тогда и только тогда описан вокруг невырожденной коники, когда его главные диагонали (p_1p_4), (p_2p_5), (p_3p_6) пересекаются в одной точке (см. рис. 3◇6).*

Доказательство. Эта теорема проективно двойственна к теореме Паскаля. □

3.3. Линейные изоморфизмы пучков. Семейство геометрических фигур называется *пучком*, если оно естественно параметризуется точками проективной прямой. Например, все прямые, проходящие через данную точку $p \in \mathbb{P}_2$ образуют пучок, поскольку их уравнения пробегают прямую $p^\times \in \mathbb{P}_2^\times$. Аналогично, через любое заданное подпространство $L \subset \mathbb{P}_n$ коразмерности 2 проходит пучок гиперплоскостей $H \subset \mathbb{P}_n$, традиционно обозначаемый $|h - L|$ (что читается как «все гиперплоскости, содержащие L») или $L^\times \in \mathbb{P}_n^\times$.

Если заданы два таких пучка $L_1^\times$, $L_2^\times$ и ещё 3 точки $a, b, c \in \mathbb{P}_n \setminus (L_1 \cup L_2)$, никакие 2 из которых не лежат в одной гиперплоскости ни одного из пучков $L_i^\times$, то имеется канонический проективный линейный изоморфизм $L_1^\times \xrightarrow{\gamma_{abc}} L_2^\times$, переводящий три проходящие через a, b, c гиперплоскости первого пучка в аналогичные три гиперплоскости второго пучка.

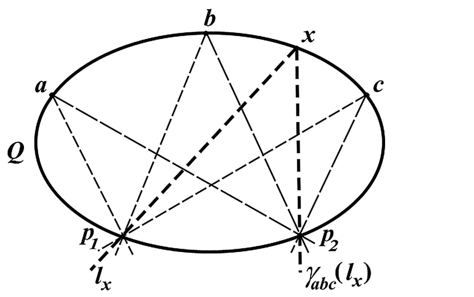

Рис. 3◇7. Эллиптический изоморфизм пучков.

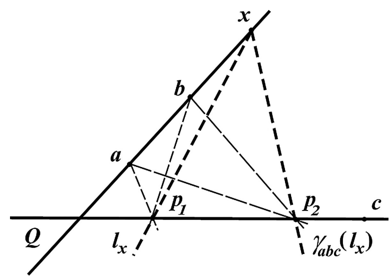

Рис. 3◇8. Параболический изоморфизм пучков.

3.3.1. Пример: всякий изоморфизм двух пучков прямых $p_1^\times$, $p_2^\times$ на $\mathbb{P}_2$ задается тройкой точек a, b, c, никакие 2 из которых не коллинеарны ни p_1, ни p_2, и посылает $(p_1a) \longmapsto (p_2a)$, $(p_1b) \longmapsto (p_2b)$, $(p_1c) \longmapsto (p_2c)$.

При этом для (единственной!) проходящей через 5 точек p_1, p_2, a, b, c коники Q возникают следующие две геометрически разных возможности.

В *эллиптическом* случае (см. рис. 3◇7), когда Q невырождена (т. е. никакие 3 из 5 точек не коллинеарны), график инцидентности[2] изоморфизма γ_{abc} совпадает с Q. В самом деле, Q также определяет проективный линейный изоморфизм $p_1^\times \xrightarrow{\gamma_Q} p_2^\times$ по правилу $\ell \mapsto \ell' \iff \ell \cap \ell' \in Q$, и его действие на три точки a, b, c совпадает с действием γ_{abc}.

В *параболическом* случае (см. рис. 3◇8), когда Q приводима, она распадается в объединение прямой (p_1p_2) и другой прямой ℓ, содержащей как минимум две из трёх точек a, b, c (напомним, что никакие 2 точки из a, b, c не коллинеарны ни с p_1, ни с p_2), и тогда график инцидентности изоморфизма γ_{abc} совпадает с этой прямой ℓ (см. рис. 3◇8).

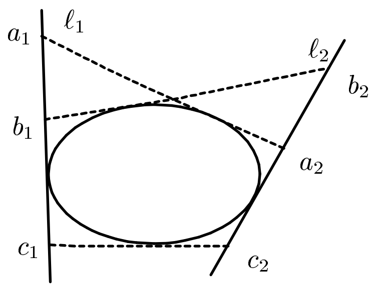

Рис. 3◇9. Эллиптический изоморфизм.

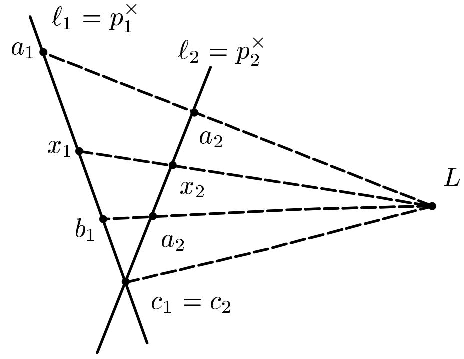

Рис. 3◇10. Параболический изоморфизм.

Упражнение 3.3. При помощи одной линейки постройте образ данной прямой ($\ell \in p_1^\times$) при эллиптическом проективном изоморфизме $p_1^\times \xrightarrow{\gamma_{abc}} p_2^\times$.

Указание. Проведём прямую через точки пересечения $(p_1b) \cap (p_2c)$ и $\ell_x \cap (a\,c)$ и отметим точку, где эта прямая пересекает прямую $(b\,c)$; искомая прямая $\gamma_{abc}(\ell)$ тоже проходит через эту отмеченную точку.

Переформулируя разобранные только что примеры на проективно двойственном языке, мы получаем геометрическую классификацию всех проективных линейных изоморфизмов $\ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ между двумя заданными прямыми на $\mathbb{P}_2$.

3.3.2. СЛЕДСТВИЕ. *Есть ровно два типа проективных линейных изоморфизмов $\ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$. Эллиптические изоморфизмы взаимно однозначно соответствуют невырожденным коникам Q, касающимся одновременно ℓ_1 и ℓ_2, и всякий такой изоморфизм γ_Q переводит точку $x \in \ell_1$ в такую точку $y \in \ell_2$, что прямая $(x\,y)$ касается Q (см. рис. 3◇9). Параболические изоморфизмы параметризуются точками $L \in \mathbb{P}_2 \setminus (\ell_1 \cup \ell_2)$ и представляют собой центральные проекции $\ell_1 \xrightarrow{\gamma_L} \ell_2$ (см. рис. 3◇10).* □

3.3.3. СЛЕДСТВИЕ. *Два треугольника ABC и $A'B'C'$ тогда и только тогда одновременно вписаны в одну и ту же конику Q, когда они одновременно описаны вокруг одной и той же коники Q'.*

Доказательство. Достаточно проверить импликацию «$\Rightarrow$» — противоположная импликация проективно двойственна. Рассмотрим прямые $\ell = (AC)$, $\ell' = (A'C')$ (см. рис. 3◇11) и эллиптический изоморфизм $\ell \xrightarrow{\gamma} \ell'$, представляющий собой композицию проекции ℓ на Q из B' и проекции Q на ℓ' из B. Он переводит $A \mapsto L'$, $C \mapsto K'$, $K \mapsto C'$, $L \mapsto A'$ и, по следствию из n° 3.3.2, ассоциирован с некоторой коникой Q', которая тем самым касается всех сторон обоих треугольников. □

3.3.4. СЛЕДСТВИЕ (ПОРИЗМ ПОНСЕЛЕ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ[3]). *Если две коники Q, Q' таковы, что существует треугольник ABC, одновременно вписанный в Q и описанный около Q',*

[2] т. е. кривая, заметаемая точкой пересечения $\ell \cap \gamma_{abc}(\ell)$, когда ℓ пробегает $p_1^\times$

[3] в действительности это справедливо для вписанно – описанных n-угольников с произвольным $n \geqslant 3$; ну а слово «поризм» означает задачу (в нашем случае — построение вписанно – описанного многоугольника), которая, если

то такой же треугольник $A'B'C'$ (одновременно вписанный в Q и описанный около Q') можно нарисовать стартовав с произвольной точки $A' \in Q$.

Доказательство. Возьмем любую $A' \in Q$ и выберем $B', C' \in Q$ такие, что прямые $(A'B')$, $(A'C')$ являются касательными к Q' (снова см. рис. 3◇11). По предыдущему следствию, треугольники ABC и $A'B'C'$ оба описаны вокруг некоторой коники, которая должна совпадать с Q', т. к. существует лишь одна коника, касающаяся 5 прямых (AB), (BC), (CA), $(A'B')$, $(A'C')$. □

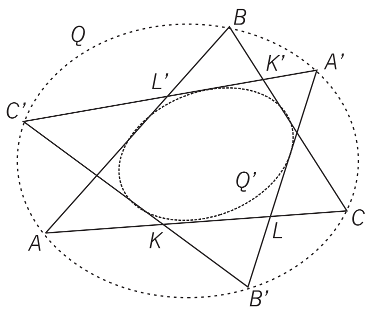

Рис. 3◇11. Вписанно-описанные треугольники.

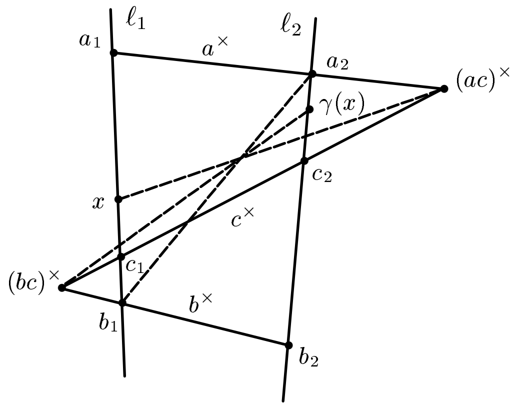

Рис. 3◇12. Нахождение $\gamma_Q(x)$.

3.4. Построение линейкой образа $x \in \ell_1$ при изоморфизме $\ell_1 \xrightarrow{\gamma} \ell_2$, который задан своим действием на 3 точки: $a_1 \longmapsto a_2$, $b_1 \longmapsto b_2$, $c_1 \longmapsto c_2$ в параболическом случае тривиально (см. рис. 3◇10). В эллиптическом случае это построение проективно двойственно упр. 3.3: начертим прямую $O^\times = (b_1 a_2)$; затем проведем прямую через x и $(a_1 a_2) \cap (c_1 c_2)$ и отметим точку её пересечения с $O^\times$; тогда $\gamma(x)$ есть пересечение ℓ_2 с прямой, проходящей через эту отмеченную точку и точку $(b_1 b_2) \cap (c_1 c_2)$ (ср. рис. 3◇7 и рис. 3◇12).

Упражнение 3.4. Пусть $Q \subset \mathbb{P}_2$ — невырожденная коника, рассматриваемая вместе с некоторой рациональной параметризацией $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} Q$.

а) Покажите,что для любых двух точек $p_1, p_2 \in Q$ и прямой $\ell \subset \mathbb{P}_2$ отображение $Q \xrightarrow{\gamma} Q$, заданное правилом: $x \overset{\gamma}{\mapsto} y \iff \pi_\ell^{p_1} x = \pi_\ell^{p_2} y$ индуцировано дробно-линейной перепараметризацией коники (т. е. линейным автоморфизмом $\mathbb{P}_1$).

б) Найдите образы p_1, p_2 и неподвижные точки указанного отображения.

в) Покажите, что любая дробно-линейная перепараметризация $Q \xrightarrow{\sim} Q$ может быть (многими способами) геометрически реализована при помощи подходящей пары точек $p_1, p_2 \in Q$ и прямой $\ell \subset \mathbb{P}_2$.

г) Как одной лишь линейкой подобрать (какие-нибудь) такие p_1, p_2, ℓ и найти неподвижные точки для заданной биекции $Q \xrightarrow{\sim} Q$, определённой своим действием на 3 точки $a, b, c \in Q$?

Указание. Возьмите $p_2 = a$.

Упражнение 3.5. Даны невырожденная коника Q и три точки A, B, C вне неё. При помощи одной линейки нарисуйте треугольник, который вписан в Q, а его стороны лежат на прямых, проходящих через A, B, C. Сколько решений имеет эта задача?

Указание. Начните «наивное» построение из какой-нибудь точки $p \in Q$ и обозначьте через $\gamma(p) \in Q$ точку, куда Вы вернетесь, побывав в A, B, C. Применимо ли упр. 3.4 к соответствию $p \longmapsto \gamma(p)$?

Упражнение 3.6. Сформулируйте и решите задачу, двойственную к предыдущей.

исходить из наивного подсчёта «степеней свободы», должна бы иметь конечное множество решений при любом «достаточно общем» выборе начальных данных (в нашем случае — пары коник), однако, оказывается или не имеющей решений вообще (для «большинства» пар коник), или тривиальной, т. е. имеющей в качестве множества решений сразу все точки коники (для специальных пар коник)