Лекция 5
Линейные операторы на пространствах со скалярным произведением

▷Эрмитовы пространства ▷Эрмитова геометрия ▷Нормальные операторы в эрмитовом и в евклидовом пространстве ▷Самосопряжённость, антисамосопряжённость и изометричность ▷Собственные подпространства коммутирующих операторов ▷Другие приложения леммы о коммутирующих операторах

§1. Эрмитовы пространства

В этой лекции мы изучим строение некоторых естественных классов операторов на евклидовом пространстве. При этом мы будем следовать намеченной в прошлой лекции схеме рассуждений: сначала исследуем строение комплексифицированных операторов, а затем спустим эти свойства в исходное вещественное пространство.

1.1. Комплексификация евклидова пространства. Пусть V — евклидово пространство, и $\mathbb{C}\otimes V = V\oplus iV$ — его комплексификация. Нам бы хотелось комплексифицировать также и евклидову структуру на V до некоторого “скалярного произведения” на $\mathbb{C}\otimes V$. Если воспользоваться тем же приёмом, что и при комплексификации линейного оператора, т.е. продолжить форму (v,w) на векторы вида v_1+iv_2 по комплексной билинейности, полагая:

$$(v_1+iv_2, w_1+iw_2)_{\mathbb{C}} \overset{\text{def}}{=} (v_1,w_1)-(v_2,w_2)+i\Big((v_1,w_2)+(v_2,w_1)\Big),$$

то получится симметричная комплексно-билинейная форма $(*,*)_{\mathbb{C}}$ на $\mathbb{C}\otimes V$, называемая *комплексификацией* исходной вещественной билинейной формы на V. Увы, эта форма не обладает свойствами скалярного произведения: скалярные квадраты комплексных векторов будут, как правило, невещественны, а у чисто мнимых векторов вещественны, но отрицательны!

Задача 5.1. Убедитесь, что над полем комплексных чисел не существует положительно определённых билинейных форм.

Тем самым, комплексно-билинейные формы не пригодны для того, чтобы определить метрику на $\mathbb{C}\otimes V$ и заниматься в этом пространстве ортогональной геометрией. Чтобы обойти эту неприятность, евклидову форму продолжают по первому аргументу линейно, а по второму — *антилинейно*, т.е. так, чтобы мнимая единица выносилась из второго аргумента со знаком минус. Получающаяся при таком продолжени форма на $\mathbb{C}\otimes V$ обозначается также, как и исходное скалярное произведение. Итак, мы полагаем:

$$(v_1+iv_2, w_1+iw_2) \stackrel{\text{def}}{=} (v_1,w_1)+(v_2,w_2)+i\Big((v_2,w_1)-(v_1,w_2)\Big).$$

Задача 5.2. Убедитесь, что построенная форма обладает следующими свойствами:
(i) вещественная билинейность
(ii) $(zv,w)=z(v,w)=(v,\bar z w) \quad \forall z\in\mathbb{C}\ \ \forall v,w\in\mathbb{C}\otimes V$
(iii) $(v,w)=\overline{(w,v)} \quad \forall v,w\in\mathbb{C}\otimes V$
(iv) $(v,v)\in\mathbb{R}$ и *положительно* для любого ненулевого $v\in\mathbb{C}\otimes V$

Свойства (i) и (ii) в совокупности называются *комплексной полуторалинейностью*, свойство (iii) — *эрмитовой симметричностью* (или просто *эрмитовостью*), свойство (iv) — *положительной определённостью*.

1.2. Определение. *Векторное пространство W, над полем комплексных чисел называется эрмитовым, если на нём фиксирована полуторалинейная положительно-определённая эрмитово симметричная форма $(v,w):\ W\times W\longrightarrow\mathbb{C}$.*

Эта форма называется *эрмитовым скалярным произведением* или *эрмитовой структурой*.

1.2.1. Примеры Если $V=\mathbb{R}$ со стандартной евклидовой структурой $(x,y)=\sum x^\nu y^\nu$, то эрмитовым продолжением этой структуры на $\mathbb{C}^n=\mathbb{C}\otimes\mathbb{R}^n$ будет форма, действующая на столбцы комплексных чисел w,z по правилу:

$$(w,z)=\sum w^\nu \bar z^\nu$$

Она называется *стандартной эрмитовой структурой* на $\mathbb{C}^n$.

Если V — это пространство непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ со скалярным произведением

$$(f,g)=\int\limits_a^b f(t)g(t)dt,$$

то $C\otimes V$ естественно отождествляется с пространством *комплекснозначных* непрерывных функций $[a,b]\mapsto\mathbb{C}$, а эрмитово продолжение скалярного произведения задаётся формулой

$$(f,g)=\int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Наличие эрмитовой формы позволяет развить на *комплексном* векторном пространстве ортогональную и метрическую геометрию, вполне аналогичную евклидовой. Опишем вкратце её основные понятия.

1.3. Матрицы Грама. Эрмитова структура на пространстве, порождённом векторами $v_1,v_2,\dots,v_m$, вполне определяется (как и евклидова) заданием *матрицы Грама* $G_v=((v_i,v_j))$. Такая матрица обязательно *эрмитово-симметрична*, т.е. удовлетворяет равенству

$$G_v^t=\bar G_v$$

(где черта означает комплексное сопряжение всех элементов).

Задача 5.3. Проверьте, что если (z) и (w) — это столбцы коэффициентов разложения векторов по образующим $v_1, v_2, \dots, v_m$, то скалярное произведение (z, w) вычисляется по формуле $(z, w) = (z)^t G_v(\bar{w})$.

Задача 5.4. Пусть некий набор векторов $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s)$ связан с неким другим набором векторов $v = (v_1, v_2, \dots, v_s)$ по формуле $\tau = vC_{v\tau}$. Выведите из предыдущей задачи, что $G_\tau = C_{v\tau}^t G_v \bar{C}_{v\tau}$ю

1.4. Ортогонализация. Базис $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ эрмитова пространства называется *ортонормированным*, если его матрица Грама единичная: $G_e = E$, т.е. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Задача 5.5. Докажите, что координаты z^j вектора v в ортонормированном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ можно вычислять по формулам $z^j = (v, e_j) = \overline{(e_j, v)}$.

Процесс Грама-Шмидта дословно переносится в эрмитово пространство и позволяет модифицировать произвольный базис $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ в ортонормированный базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ так, что линейная оболочка первых k базисных векторов в обоих базисах будет одинакова при всех $k = 1, \dots, n$.

Как и в евклидовой геометрии, отсюда сразу получается

1.4.1. Утверждение. *Определитель Грама* $\det G_v$ *является вещественным неотрицательным числом и обращается в нуль тогда и только тогда, когда набор* $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ *линейно-зависим.*

Для доказательства достаточно заметить, что строки матрицы Грама линейно-зависимого набора векторов будут также линейно зависимы, а определитель матрицы Грама линейно независимого набора равен *квадрату модуля* $|\det C_{ev}|^2 = \det C_{ev} \cdot \det \bar{C}_{ev}$ определителя матрицы перехода от этого набора v к ортонормированному набору e.

1.5. Эрмитова метрика. Положительность определителя Грама в случае набора из двух векторов v, w приводит к эрмитову неравенству Буняковского-Коши-Шварца

$$|(v, w)|^2 \leqslant (v, v) \cdot (w, w),$$

из которого той же выкладкой, что и в евклидовом случае, выводится неравенство треугольника

$$\sqrt{(v, v)} + \sqrt{(w, w)} \geq \sqrt{(v + w, v + w)}.$$

Задача 5.6. Убедитесь в этом и докажите, что формула $||v|| = \sqrt{(v, v)}$ определяет норму на эрмитовом пространстве.

Метрика, индуцированная этой нормой, называется *эрмитовой метрикой*. Соотношения

$$(v + w, v + w) = ||v||^2 + ||w||^2 + 2\mathrm{Re}(v, w)$$

$$(v + iw, v + iw) = ||v||^2 + ||w||^2 - 2i\mathrm{Im}(v, w)$$

показывают, что скалярное произведение однозначно восстанавливается по индуцированной им метрике по формуле

$$2(v, w) = ||v + w||^2 - ||v + iw||^2$$

1.6. Углы. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца позволяет определить *угол между комплексными прямыми* в эрмитовом пространстве как единственное $\varphi \in [0; \pi/2]$:

$$\cos\varphi = \frac{|(v,w)|}{||v|| \cdot ||w||}.$$

Здесь мы сталкиваемся с важным отличием комплексной эрмитовой геометрии от вещественной евклидовой. В евклидовом пространстве формула $\cos\varphi = \dfrac{(v,w)}{||v|| \cdot ||w||}$ в действительности определяет *ориентированный угол* между *ориентированными прямыми*.В самом деле, в её правой части стоит скалярное произведение нормированных направляющих векторов $u/\,||u||$ и $v/\,||v||$, задающих не только прямые, но и ориентацию на них, ибо на вещественной прямой единичный направляющий вектор можно выбрать двумя способами (что и называется фиксацией ориентации). При смене ориентации одной из прямых скалярное произведение меняет знак, что геометрически выражается в переходе от одного угла между двумя пересекающимися вещественными прямыми к *смежному* с ним углу.

В комплексной геометрии дело обстоит совершенно иначе. Направляющие векторы длины 1 на комплексной прямой $\mathbb{C}^1$ заполняют единичную окружность S^1 и выбор одного из них не определяет никакой "комплексной ориентации" в том смысле, что переходу к другому направляющему вектору нельзя приписать никакого знака, как в вещественном случае. Поэтому угол между комплексными прямыми — величина *неориентированная* (и никаких смежных углов в эрмитовой геометрии нет).

По той же причине и изометрии многомерных эрмитовых пространств нельзя разделить на собственные и несобственные.

1.7. Изометрии. Линейный оператор $F:\ W \longrightarrow W$ на эрмитовом пространстве W называется *изометрией*, если он сохраняет эрмитову метрику: $||Fw|| = ||w||\ \forall w \in W$.

Изометрия автоматически сохраняет и скалярное произведение: $(Fv, Fw) = (v,w)\ \forall v,w \in W$, а потому задаётся в ортонормированном базисе матрицей F_e со свойством

$$F_e^t \bar{F}_e = E \qquad \text{или} \qquad F_e^{-1} = \bar{F}_e^t.$$

Такие матрицы называются *унитарными*.

Задача 5.7. Убедитесь, что унитарные матрицы размера $n \times n$ составляют группу по умножению.

Эта группа называется *унитарной группой* и обозначается U_n. Унитарные матрицы $C \in U_n$, подобно ортогональным, удовлетворяют условию $|\det C| = 1$. Однако, в отличие от вещественного случая, в комплексном случае это условие *не разбивает* изометрии на два класса.

Задача 5.8. Докажите, что U_n составляет компактное связное подмножество в $Mat_n(\mathbb{C})$.

Указание: если эта задача не получилась «с ходу», вернитесь к ней после того, как прочитаете до конца эту и следующую лекции.

1.8. Объём. Если приписать произвольному ортонормированному базису *объём* 1, то, как и в евклидовом случае, в эрмитовом пространстве однозначно зафиксируется (комплекснозначная) *форма объёма*. Её *модуль* не будет зависеть от выбора ортонормированного базиса и определит вещественнозначный *неориентированный объём* параллелепипедов в W, который будет удовлетворять всем стандартным аксиомам.

1.9. Ортогоналы. Как и в евклидовом пространстве, два подпространства $U_1, U_2 \subset W$ называются *ортогональными*, если $(u_1, u_2) = 0\ \forall u_1 \in U_1$ и $\forall u_2 \in U_2$. Поскольку $(u_1, u_2) = \overline{(u_2, u_1)}$, условие ортогональности симметрично.

Если пространства $U_1, U_2, \ldots, U_m$ попарно-ортогональны, то сумма $U_1 + U_2 + \cdots + U_m$ автоматически является прямой, ибо $u \in U_i \cap U_j \Longrightarrow (u, u) = 0 \Longrightarrow u = 0$.

Для любого подпространства $U \subset W$ множество векторов

$$U^{\perp} = \{w \in W \mid (u, w) = 0\ \forall u \in U\}$$

составляет подпространство в W, ортогональное к U. Если векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ составляют базис в U, то $\forall w \in W$ *ортогональная проекция*

$$\operatorname{ortpr}_U(w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum \frac{(w, u_\nu)}{||u_\nu||} \cdot u_\nu$$

не зависит от выбора базиса u_ν, поскольку является единственной ближайшей к концу вектора w точкой из U. Вектор $w - \operatorname{ortpr}_\nu(w)$ ортогонален к U, откуда как и в евклидовом случае, следует, что $W = U \oplus U^{\perp}$.

Задача 5.9. Докажите, что оператор ortpr_U однозначно определяется соотношением

$$(w, u) = (\operatorname{ortpr}_U(w), u) \quad \forall u \in U\ \forall w \in W.$$

Задача 5.10. Докажите, что $U^{\perp\perp} = U$.

§2. Нормальные операторы.

Условимся под *пространством со скалярным произведением* понимать либо евклидово пространство, либо эрмитово пространство. Скалярное произведение мы в обоих случаях обозначаем $(*, *)$. Излагаемая далее теория может быть параллельно развита как в евклидовом, так и в эрмитовом случае. Наши формулы будут писаться для эрмитова случая, поскольку евклидов случай можно рассматривать как частный случай эрмитова: всегда можно рассмотреть евклидово пространство как вещественное подпространство в эрмитовом, полученном в результате его комплексификации. Однако читателю настоятельно рекомендуется самостоятельно провести все рассуждения для евклидова пространства независимо от эрмитовой теории.

2.1. Сопряжённый оператор. Оператор $F^* :\ W \longrightarrow W$ на эрмитовом пространстве называется сопряжённым к оператору $F :\ W \longrightarrow W$, если $\forall v, w \in W$ выполнено равенство

$$(F^* v, w) = (v, Fw).$$

Строго говоря, термин "сопряжённый оператор" уже использовался нами в первой лекции в другом смысле. Однако, такова традиция, и мы будем ей следовать. В этой лекции это не приведёт к путанице, поскольку сопряжённые в смысле первой лекции операторы нам ни разу не встретятся, а через лекцию мы увидим, что оба понятия сопряжённости совпадают при более широком взгляде на вещи.

Устраним для начала кажущийся произвол в выборе между левым и правым сомножителем в определении сопряжённого оператора (к одному из них применяется F, к другому F^*). В евклидовом пространстве равносильность написанной выше формулы формуле

$$(Fv, w) = (v, F^*w).$$

следует из симметричности скалярного произведения, а в эрмитовом — проверяется выкладкой

$$(Fv, w) = \overline{(w, Fv)} = \overline{(F^*v, w)} = (v, F^*w).$$

2.1.1. Лемма. *Всякий оператор в пространстве со скалярным произведением обладает и притом единственным сопряжённым.*

Доказательство. Рассмотрим эрмитов случай. Пусть $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — базис в W с матрицей Грама G_e и $(v), (w)$ — столбцы координат векторов $v, w \in W$. Условие $(F^*v, w) = (v, Fw)$ записывается матричным соотношением

$$(v)^t F_e^{*t} G_e(\bar{w}) = (v)^t G_e \bar{F}_e(\bar{w}),$$

выполнение которого для любых $v, w \in W$ равносильно равенству $F_e^{*t} G_e = G_e \bar{F}_e$, из которого матрица F_e^* однозначно выражается через F_e:

$$F_e^* = G_e^{t\,-1} \bar{F}_e^t G_e^t \tag{2-1}$$

Евклидов случай аналогичен.

Задача 5.11. Убедитесь, что в евклидовом случае матрица сопряжённого оператора выражается через матрицу исходного оператора и матрицу Грама по формуле

$$F_e^* = G_e^{t\,-1} F_e^t G_e^t$$

□

Из написанных выше формул вытекает, в частности, что в ортонормированном базисе сопряжённый оператор задаётся матрицей, которая комплексно-сопряжена к транспонированной матрице исходного оператора (в евклидовом случае слова о комплексной сопряжённости можно опустить).

2.1.2. Утверждение. *Отображение: $F \mapsto F^*$ является антилинейным антигомоморфизмом $\mathbb{C}$-алгебры $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, W)$, причём его квадрат равен единице: $F^{**} = F$.*

Доказательство. $\mathbb{C}$-антилинейность

$$(z_1 F_1 + z_2 F_2)^* = \bar{z}_1 F_1^* + \bar{z}_2 F_2^*$$

следует прямо из формулы (2-1). Равенство $F^{**} = F$ и $(FG)^* = G^* F^*$ также можно непосредственно проверить при помощи этой формулы, но проще воспользоваться определением (и единственностью):

$$(FGv, w) = (Gv, F^*w) = (v, G^*F^*w)$$

означает, что $(FG)^* = G^*F^*$, а равенство $F^{**} = F$ есть лишь переформулировка того, что условия $(Fv, w) = (v, F^*w)$ и $(F^*v, w) = (v, Fw)$ равносильны. □

Задача 5.12. Как переформулировать это предложение в евклидовом случае?

2.1.3. Следствие. *Оператор сопряжения $F \mapsto F^*$ определяет вещественную структуру на пространстве $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,W)$, т.е. разложение*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,W) = \mathrm{Hom}^+_{\mathbb{C}}(W,W) \oplus \mathrm{Hom}^-_{\mathbb{C}}(W,W),$$

где

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}^+_{\mathbb{C}}(W,W) &= \{F \mid F^* = F\} \\ \mathrm{Hom}^-_{\mathbb{C}}(W,W) &= \{F \mid F^* = -F\} = i\mathrm{Hom}^+_{\mathbb{C}}(W,W) \end{aligned}$$

являются вещественными подпространствами в $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,W)$

Операторы из Hom^+ и Hom^- называются, соответственно *самосопряжёнными* и *антисамосопряжёнными* (или *кососимметричными*). Явно разложение любого оператора в сумму само- и антисамосопряжённого даётся формулой:

$$F = \frac{F+F^*}{2} + \frac{F-F^*}{2}.$$

В ортонормированном базисе самосопряжённые операторы задаются *эрмитово симметричными* матрицами (т. е. такими, что $M^t = \bar{M}$), а антисамосопряжённые — *эрмитово кососимметричными* матрицами (т. е. такими, что $M^t = -\bar{M}$).

Задача 5.13. Убедитесь, что тип симметрии матрицы изменяется на противоположный при умножении всех её элементов на i.

Задача 5.14. Докажите, что пространство линейных операторов на евклидовом пространстве также является прямой суммой подпространства самосопряжённых и подпространства антисамосопряжённых операторов, причём первые задаются в ортонормированном базисе симметричными относительно главной диагонали матрицами, а вторые — кососимметричными (т.е. меняющими знак при транспонировании).

2.1.4. Пример. В терминах операции $*$ *изометрии* эрмитова пространства можно характеризовать как *невырожденные операторы, сопряжённые своему обратному*: $F^* = F^{-1}$. В самом деле, если $F^* = F^{-1}$, то полагая в

$$(Fv,,w) = (v, F^*w) = (v, F^{-1}w)$$

вектор w равным $w = Fu$, получим, что $\forall u,v \quad (Fv,Fu) = (v,u)$. Наоборот, поскольку всякая изометрия невырождена, в равенстве $(Fv,Fw) = (v,w)$ можно взять $w = F^{-1}u$ и получить $(Fv,u) = (v,F^{-1}u) \quad \forall v,u$, откуда $F^{-1} = F^*$.

2.1.5. Пример. Пусть V — пространство бесконечно гладких функций на отрезке $[a,b]$, зануляющихся на концах отрезка вместе со своими производными. Введём на V евклидову структуру по формуле

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt,$$

и вычислим оператор, сопряжённый к $\frac{d}{dt}: \ f \longrightarrow f'$. Интегрируя по частям, находим

$$(\frac{d}{dt}f, g) = \int\limits_a^b f'g dt = -\int\limits_a^b f g' dt = (f, -\frac{d}{dt}g).$$

Тем самым оператор дифференцирования антисамосопряжён. Легко видеть, что оператор умножения на фиксированную функцию — самосопряжён. Поскольку сопряжение является антигомоморфизмом алгебры операторов, то, к примеру, оператор, сопряжённый оператору

$$t^3\frac{d^2}{dt^2}: \ f(t) \mapsto t^3 f''(t)$$

будет действовать по правилу $\left[t^3\frac{d^2}{dt^2}\right]^*: \ f(t) \mapsto \left(t^3 f(t)\right)'' = [t^3\frac{d^2}{dt^2} + 6t^2\frac{d}{dt} + 6t]f(t)$.

Задача 5.15. В условиях примера вычислите L^* для

$$L = a(t)\frac{d^2}{dt^2} + b(t)\frac{d}{dt} + c(t): \ f \mapsto af'' + bf + c$$

где $a, b, c \in V$.

2.2. Критерии нормальности. Вопрос о диагонализуемости операторов в пространстве со скалярным произведением естественно ставить в более строгой формулировке: выяснить, существует ли для данного оператора *ортонормированный* базис из собственных векторов. Операторы, для которых такой базис существует, называются*нормальными*. Над полем комплексных чисел они описываются следующей теоремой.

2.3. Теорема. *Следующие условия на оператор $F: \ W \longrightarrow W$ в эрмитовом пространстве W попарно эквивалентны:*

(i) F имеет диагональный вид в некотором ортонормированном базисе.

(ii) $FF^* = F^*F$

(iii) Ортогональное дополнение $W_\lambda^\perp$ к любому собственному подпространству $W_\lambda^\perp = \{w \in W \mid Fw = \lambda w\}$ F-инвариантно (т.е. переходит в себя при действии F).

Доказательство. Мы проделаем круг (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$ (i).

(i)$\Rightarrow$ (ii). Рассмотрим собственный ортонормальный базис $\{e\}$ для F. Тогда

$$F_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad F_e^* = \begin{pmatrix} \bar\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar\lambda_n \end{pmatrix}$$

откуда

$$F_e F_e^* = F_e^* F_e = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}$$

(ii)$\Rightarrow$ (iii). Из условия $F_e F_e^* = F_e^* F_e$ вытекает, что всякое собственное подпространство W_λ оператора F инвариантно относительно F^*.

В самом деле, если w собственный для F с собственным значением λ : $Fw = \lambda w$, то F^*w также будет собственным для F с собственным значением λ:

$$F(F^*w) = FF^*w = F^*Fw = F^*\lambda w = \lambda F^*w$$

Проверим, что $W_\lambda^\perp$ переходит в себя под действием F. Пусть $u \in W_\lambda^\perp$, т.е. $(u, w) = 0\ \forall w \in W$. Тогда

$$(Fu, w) = (u, F^*w) = 0 \quad \forall w \in W$$

поскольку $F^*w \in W$, что и доказывает импликацию (ii)$\Rightarrow$ (iii).

(iii)$\Rightarrow$ (i). Индукция по размерности. Если $\dim W = 1$ или если F — гомотетия, то доказывать нечего. В остальных случаях у F имеется нетривиальное собственное подпространство $0 \neq W_\lambda \subset W$ с $\dim W_\lambda < \dim W$. Условие (iii) означает, что каждое из слагаемых ортогонального разложения

$$W = W_\lambda \oplus W_\lambda^\perp$$

переходит в себя под действием F. По индукции мы можем выбрать собственные ортонормальные базисы для F в W_λ и $W_\lambda^\perp$. Их объединение будет искомым базисом в W. □

2.4. Определение. *Операторы $F : W \longrightarrow W$ на эрмитовом пространстве W, удовлетворяющем условиям теоремы, называются нормальными.*

В частности, мы видим, что нормальными являются самосопряжённые, антисамосопряжённые и изометрические операторы.

2.4.1. Следствие. *Оператор $F : W \longrightarrow W$ тогда и только тогда является самосопряжённым, когда он нормален и все его собственные значения вещественны.*

2.4.2. Следствие. *Оператор $F : W \longrightarrow W$ тогда и только тогда является антисамосопряжённым, когда он нормален и все его собственные значения чисто мнимы.*

2.4.3. Следствие. *Оператор $F : W \longrightarrow W$ тогда и только тогда изометричен, когда он нормален и все его собственные значения по модулю равны 1.*

2.5. Канонический вид операторов в евклидовом пространстве. Для того, чтобы применить предыдущую теорему к вещественному оператору на евклидовом пространстве V, мы сначала должны это пространство комплексифицировать, а затем продолжить евклидову форму на V до эрмитовой структуры на $W = \mathbb{C} \otimes V$. При этом самосопряжённые, антисамосопряжённые и изометрические относительно евклидовой структуры на V опреаторы останутся таковыми и по отношению к эрмитовой структуре на W (их матрицы в вещественном базисе просто не изменятся).

Объединяя собственные векторы и собственные значения комплексифицированных вещественных операторов в пары комплексно-сопряжённых, мы можем переформулировать предыдущие следствия в вещественных терминах, если воспользуемся результатами Утв.2.2.2.

2.5.1. Следствие. *Самосопряжённый оператор в евклидовом пространстве обладает ортонормированным базисом из собственных векторов.*

2.5.2. Следствие. *Кососимметричный оператор в евклидовом пространстве в подходящем ортонормированном базисе может быть записан блочно диагональной матрицей вида*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_k = \begin{pmatrix} 0 & a_\nu \\ -a_\nu & 0 \end{pmatrix}, a_\nu \in \mathbb{R}$$

2.5.3. Следствие. *Всякая изометрия евклидова пространства в подходящем ортонормированном базисе может быть записана матрицей вида*

$$\begin{pmatrix} \varPi_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & \varPi_k & & & & \\ & & & \pm 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

где $\varPi_\nu = \begin{pmatrix} \cos\varphi_\nu & \sin\varphi_\nu \\ -\sin\varphi_\nu & \cos\varphi_\nu \end{pmatrix}$ *— матрица поворота на угол* $\varphi_\nu :\ 0 < \varphi_\nu < 2\pi$*, а (единственная) минус единица присутствует тогда и только тогда, когда изометрия несобственная.*

> Задача 5.16. К какому виду можно привести произвольный нормальный оператор в евклидовом пространстве?

Важно подчеркнуть, что указанные представления операторов являются *каноническими* в том смысле, что с точностью до перестановки диагональных блоков они не зависят от выбора базиса и способа приведения. Действительно, стоящие на диагонали блоки однозначно восстанавливаются по набору корней (с учётом кратностей) характеристического многочлена.

> Задача 5.17. Укажите, как именно.

Вот ещё несколько полезных свойств нормальных операторов.

> Задача 5.18. Докажите, что оператор тогда и только тогда нормален, когда ортогональное дополнение к любому его инвариантному подпространству (не обязательно собственному) также будет инвариантным.

> Задача 5.19. Докажите, что собственные векторы нормального оператора, имеющие различные собственные значения, ортогональны.

> Задача 5.20. Докажите, что любой ортонормированный набор собственных векторов нормального оператора можно дополнить до ортонормального базиса из собственных векторов.

2.6. Отступление о перестановочных операторах. В доказательстве теоремы о нормальных операторах ключевым местом является факт, известный как *лемма о комутирующих операторах*:

Если операторы A и B коммутируют, то всякое собственное подпространство для A переводится в себя оператором B.

При всей своей простоте (его доказательство

$$Av = \lambda v \Longrightarrow A(Bv) = ABv = BAv = B(\lambda v) = \lambda Bv$$

занимает одну строчку!) этот факт лежит в основе многих глубоких результатов, так что если вы "пропустили" его двумя страницами выше, то я призываю вас обдумать его теперь. Отметьте, в частности, что он справедлив *всегда* (для любых гомоморфизмов A, B любых *модулей* над произвольными кольцами).

Вот ещё одно следствие леммы о коммутирующих операторах:

2.6.1. Утверждение. *Любой (в том числе бесконечный) набор попарно-перестановочных операторов, действующих в конечномерном пространстве V над алгебраически-замкнутым полем, имеет общий собственный вектор.*

Доказательство. Если $\dim V = 1$, или если все операторы — гомотетии, то любой ненулевой $v \in V$ является общим собственным вектором. Если среди операторов есть хотя бы один, не являющийся гомотетией, то можно воспользоваться индукцией по размерности. Этот оператор имеет собственное подпространство V_λ с $0 < \dim V_\lambda < \dim V$, и все операторы переводят это подпространство в себя, так что по индуктивному предположению в V_λ имеется общий для всех операторов собственный вектор.

> Задача 5.21. Докажите, что любой (в том числе и бесконечный) набор попарно-коммутирующих диагонализируемых операторов может быть приведён к диагональному виду в одном общем для всех операторов базисе.