Кватернионы

АС16◇1. Решите следующие системы линейных уравнений на неизвестные $x, y \in \mathbb{H}$:

$$\text{а)}\ \begin{cases} \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\cdot x + (1+\boldsymbol{k})\cdot y \\ \boldsymbol{i} = (1+\boldsymbol{i})\cdot x + (\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot y \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} \boldsymbol{k} = (1+\boldsymbol{i})\cdot x + \boldsymbol{j}\cdot y \\ \boldsymbol{i} = (1+\boldsymbol{j})\cdot x + \boldsymbol{k}\cdot y \end{cases}$$

АС16◇2. Какой бывает размерность подпространства $C_q = \{h \in \mathbb{H} \mid qh = hq\}$ для данного $q \in \mathbb{H}$? Для каждого из возможных значений $\dim C_q$ опишите все $q \in \mathbb{H}$, на которых оно достигается. В частности, найдите центр тела кватернионов.

АС16◇3. Покажите, что для любого $q \in \mathbb{H}$ с $q^2 = -1$ множество кватернионов вида $\alpha + q\beta$ с $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ является подполем, изоморфным $\mathbb{C}$.

АС16◇4. Покажите, что $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \boldsymbol{j}\mathbb{C} = \{z_1 + \boldsymbol{j}z_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{j}^2 = -1,\ \forall z \in \mathbb{C}\ z\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\overline{z}\}$.

АС16◇5. Верно ли, что любой невещественный кватернион является корнем квадратного уравнения с вещественными коэффициентами и отрицательным дискриминантом?

АС16◇6 (чисто мнимые кватернионы). Пусть $\mathbb{I} \overset{\text{def}}{=} \{q \in \mathbb{H} \mid q^* = -q\}$. Покажите, что **а)** $\mathbb{I} = \{q \in \mathbb{H} \mid q^2 \in \mathbb{R}_{\leqslant 0}\}$ **б)** $\{q \in \mathbb{H} \mid q^2 = -1\}$ — это единичная сфера в $\mathbb{I}$ **в)** форма $(p, q) \overset{\text{def}}{=} (pq^* + qp^*)/2$ задаёт на $\mathbb{I}$ евклидово скалярное произведение **г)** $\mathbb{I}$ замкнуто относительно коммутаторной скобки $[x, y] \overset{\text{def}}{=} xy - yx$ **д)** $[x, y]$ ортогонален x, y, а норма $\|[x, y]\|$ равна абсолютной величине площади параллелограмма, натянутого на x, y **е)** у всех ортонормальных базисов в $\mathbb{I}$, ориентированных как $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, одинаковые таблицы умножения **ж)** для любого ненулевого $h \in \mathbb{H}$ сопряжение $\mathrm{Ad}_h : q \mapsto hqh^{-1}$ корректно задаёт ортогональный оператор $\mathbb{I} \to \mathbb{I}$.

АС16◇7. Для отличного от 1 кватерниона $h \in \mathrm{SU}_2$ зафиксируем в $\mathbb{R}$-линейной оболочке кватернионов 1 и h один из двух перпендикулярных 1 векторов $\boldsymbol{m}$ единичной длины и зададим $\alpha \in \mathbb{R}$ формулой $h = \cos\alpha + \boldsymbol{m}\sin\alpha$. Покажите, что $\mathrm{Ad}_h : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ — это поворот по часовой стрелке на угол 2α вокруг оси, направленной вдоль $\boldsymbol{m}$.

АС16◇8. Для данной 2×2 матрицы $h \in \mathrm{SU}_2$ явно вычислите 3×3 матрицу $F_h \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, которой записывается в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ оператор Ad_h.

АС16◇9 (октаплекс, или бинарная группа тетраэдра). Покажите, что **а)** $\mathbb{Z}$-линейная оболочка восьми кватернионов ± 1, $\pm\boldsymbol{i}$, $\pm\boldsymbol{j}$, $\pm\boldsymbol{k}$ и шестнадцати кватернионов $(\pm 1 \pm \boldsymbol{i} \pm \boldsymbol{j} \pm \boldsymbol{k})/2$ является подкольцом в $\mathbb{H}$ **б)** эти 24 кватерниона составляют мультипликативную группу $\mathfrak{T}$ его обратимых элементов **в)** гомоморфизм $\mathrm{Ad} :\ \mathrm{SU}_2 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3$, $h \mapsto \mathrm{Ad}_h$, переводит $\mathfrak{T}$ в собственную группу правильного тетраэдра (явно укажите вершины этого тетраэдра) **г)** предъявите изоморфизмы $\mathfrak{T} \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, $T \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$, переводящие $\mathrm{Ad} : \mathfrak{T} \twoheadrightarrow T$ в факторизацию по центру $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ **д*)** кватернионы из группы $\mathfrak{T}$ являются вершинами правильного самодвойственного четырёхмерного многогранника с символом Шлефли $(3, 4, 3)$: опишите звезду вершины 1 и примыкающие к 1 грани всех размерностей, подсчитайте их количества, найдите порядок несобственной группы многогранника и убедитесь, что она транзитивно действует на флагах.

АС16◇10. Для каждого $z \in \mathbb{F}_9$ положим $\overline{z} \overset{\text{def}}{=} F_3(z) = z^3$. Не встречали ли Вы раньше группу

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{F}_9) \overset{\text{def}}{=} \{X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_9) \mid \overline{X}X^t = E\}\ ?$$

АС16◇11. Для любого $q \in \mathrm{SU}_2$ покажите, что отображение $\sigma_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $h \mapsto -qh^*q$, является отражением в гиперплоскости $q^\perp$.

АС16◇12. Для любых $p, q \in \mathrm{SU}_2$ положим $\varphi_{pq} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $h \mapsto phq^{-1}$. Докажите, что правило $(p, q) \mapsto \varphi_{p,q}$ задаёт эпимоморфизм групп $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ и найдите его ядро.

АС16◇13. Для данных 2×2 матриц $p, q \in \mathrm{SU}_2$ явно вычислите 4×4 матрицу $\Phi_{pq} \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$, которой записывается в базисе 1, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ оператор $\varphi_{p,q}$.