Комплексное *vs* вещественное

AC15◇1. Рассмотрим комплексное векторное пространство W и обозначим через $W_{\mathbb{R}}$ его овеществление. Найдите вещественную коразмерность $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ в $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$.

AC15◇2. Обозначим через $\sigma, \tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ отражение и поворот, порождающие диэдральную группу D_n, а через $\sigma_{\mathbb{C}}, \tau_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ — их комплексификации. Как действует $\sigma_{\mathbb{C}}$ на собственные векторы поворота?

AC15◇3. Существует ли унитарный оператор $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, переводящий неупорядоченную пару одномерных комплексных подпространств, порождённых вектором $(-3, 2+i)$ и вектором $(-3+i, 2i)$, в неупорядоченную пару подпространств, порождённых векторами
а) $(-26+11i, 9+16i)$ и $(-20+18i, -11+17i)$ **б)** $(-8-i, -5+2i)$ и $(-6, -9+7i)$?

AC15◇4. Приведите пример линейного оператора на эрмитовом пространстве, имеющего инвариантное подпространство, ортогонал к которому не инвариантен.

AC15◇5. Покажите, что для каждого линейного отображения $f : U \to W$ эрмитовых пространств существует единственный такой оператор $f^{\times} : W \to U$, что $(fu, w) = (u, f^{\times}w)$ для всех $u \in U$ и $w \in W$, выразите матрицу $F^{\times}$ оператора $f^{\times}$ в произвольных базисах пространств U, W через матрицу F оператора f и матрицы Грама этих базисов и докажите, что **а)** $(fg)^{\times} = g^{\times}f^{\times}$ **б)** $f^{\times\times} = f$ **в)** $(\ker f)^{\perp} = \operatorname{im} f^{\times}$ **г)** $(\operatorname{im} F)^{\perp} = \ker f^{\times}$ **д)** $(zf)^{\times} = \overline{z}f^{\times}\ \forall z \in \mathbb{C}$.

AC15◇6. Пусть эрмитово пространство V распадается в (не обязательно ортогональную) прямую сумму $V = U \oplus W$ и оператор $F : V \to V$ проектирует V на W вдоль U. Покажите, что $V = U^{\perp} \oplus W^{\perp}$ и опишите действие оператора $F^{\times}$.

AC15◇7. Пусть F — произвольный линейный эндоморфизм эрмитова пространства W. Докажите, что **а)** если подпространство $U \subset W$ F-инвариантно, то $U^{\perp}$ $F^{\times}$-инвариантно
б) если вектор $w \in W$ собственный и для F, и для $F^{\times}$, то собственные числа сопряжены
в) если F обратим, то $F^{-1\times} = F^{\times-1}$.

AC15◇8. Рассмотрим пространство W бесконечно гладких функций $[0,1] \to \mathbb{C}$, зануляющихся в точках 0, 1 вместе со всеми своими производными. **а)** Покажите, что форма $(f, g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$ задаёт на нём эрмитову структуру. **б)** Вычислите сопряжённый к оператору $f \mapsto a_0 f + a_1 f'(x) + a_2 f''(x)$, где $a_0, a_1, a_2 \in W$ — заданные функции.
в) Самосопряжён ли оператор $x^2(x-1)^2\frac{d^2}{dx^2} + 2x(x-1)\frac{d}{dx}$?

AC15◇9. Выясните, нормален ли оператор $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ с матрицей
а) $\begin{pmatrix} \frac{2}{9}+\frac{11i}{9} & \frac{8i}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9}+\frac{7i}{9} \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}-\frac{13i}{9} & \frac{14}{9}+\frac{2i}{9} \\ \frac{10}{9}-\frac{10i}{9} & -\frac{1}{3}-\frac{14i}{9} \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} \frac{4}{9}-\frac{11i}{9} & \frac{1}{3}-\frac{4i}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9}-\frac{7i}{9} \end{pmatrix}$
в стандартном базисе, и если да, приведите его к нормальным осям.

AC15◇10. Покажите, что для самосопряжённых операторов f, g на эрмитовом пространстве W равенство $(fw, w) = (gw, w)$ для всех $w \in W$ равносильно равенству $f = g$.

AC15◇11. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ приведите к нормальным осям грассмановы квадратичные формы: **а)** $-\frac{8}{15}x_1 \wedge x_2 - \frac{8}{3}x_1 \wedge x_3 + \frac{94}{15}x_1 \wedge x_4 + \frac{56}{15}x_2 \wedge x_3 - \frac{8}{3}x_2 \wedge x_4 + \frac{8}{15}x_3 \wedge x_4$
б) $-\frac{52}{27}x_1 \wedge x_2 - \frac{112}{27}x_1 \wedge x_3 - \frac{76}{27}x_1 \wedge x_4 - \frac{104}{27}x_2 \wedge x_3 + \frac{68}{27}x_2 \wedge x_4 - \frac{38}{27}x_3 \wedge x_4$.

AC15◇12. Найдите полярные разложения $f = g_1 h_1$ и $f = h_2 g_2$, где h_1, h_2 самосопряжены и положительны, а $g_1, g_2 \in \mathrm{U}_2$, для оператора $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, имеющего в стандартном ортонормальном базисе матрицу: **а)** $\begin{pmatrix} -46/27 - 8i/9 & 20/27 - 38i/27 \\ -40/27 - 37i/27 & -44/27 + 2i/9 \end{pmatrix}$
б) $\begin{pmatrix} -10/9 + 8i/9 & -22/9 - 2i/3 \\ 2 - 4i/9 & -5/9 - 2i/9 \end{pmatrix}$.

AC15◇13. Существует ли матрица $X \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ с **а)** $e^X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ **б)** $e^X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & 5 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$?
Если да, предъявите такую матрицу явно. Если нет, объясните почему.