

Многочлены и расширения полей

- АС2♦1.** Найдите остатки от деления многочлена $x^{179} + x^{57} + x^2 + 1$ в кольце $\mathbb{Z}[x]$ на многочлены а) $x + 1$ б) $x^2 - 1$ в) $x^2 + 1$ г) $x^2 + x + 1$ д) $x^2 - x + 1$ е*) $x^2 + x - 1$.
- АС2♦2.** Вычислите $\text{НОД}(f_1, f_2)$ в кольце $\mathbb{Q}[x]$ и подберите такие $h_1, h_2 \in \mathbb{Q}[x]$, что $\text{НОД}(f_1, f_2) = f_1 h_1 + f_2 h_2$ и $\deg h_1 < \deg f_2 - d$, $\deg h_2 < \deg f_1 - d$, где $d = \deg \text{НОД}(f_1, f_2)$, для многочленов а) $f_1 = x^{30} - 1$, $f_2 = x^8 - 1$ б) $f_1 = x^5 - 1$, $f_2 = x^4 + x^2 + 1$.
- АС2♦3.** Найдите в $\mathbb{Q}[x]$ все многочлены с остатками а) $1 + x$, $1 + x^2$ от деления на $1 + x^2$, $1 + x^4$ б) $1, 2, x$ от деления на $(x - 1)^2$, $(x + 1)^2$, $x^2 + 1$ соответственно.
- АС2♦4.** Подберите $f \in \mathbb{Q}[x]$ с $\deg f = 2$ и $f(1) = 2$, $f(2) = 20$, $f(3) = 200$. Много ли таких f ?
- АС2♦5.** Пусть поле $\mathbb{F}$ бесконечно. Докажите, что любой ненулевой многочлен $f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ задаёт ненулевую функцию $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$.
- АС2♦6.** Пусть поле $\mathbb{F}$ конечно. Верно ли, что любая функция а) $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ б*) $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ является многочленом? Существует ли ненулевой многочлен $f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$, задающий тождественно нулевую функцию $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$?
- АС2♦7.** Является ли кольцо вычетов а) $\mathbb{R}[x]/(x^4 + 1)$ б) $\mathbb{Q}[x]/(x^4 + 1)$ в) $\mathbb{Q}[x]/(x^3 + x + 1)$ полем? Найдите в этих кольцах $[1 + x]^{-1}$ и $[1 + x^2]^{-1}$ если они существуют.
- АС2♦8.** В поле $\mathbb{C}$ явно вычислите $\text{Re } z$, $\text{Im } z$, $|z|$, $\text{Arg } z$ для а) $z = (1 + i)^5 / (1 - i)^3$ б) $z = (1 + i)^{50}$ в) такого z , что $z^2 = -1 + i\sqrt{3}$.
- АС2♦9.** Куда переводят отображения $z \mapsto z^2$ и $z \mapsto 1/z$ а) прямые $x = c$, $y = c$, $y = cx$, где $c \in \mathbb{R}$ б) окружности $|z - 1| = 1$ и $|z - i| = 1$ в) кошку с рис. 1♦1?
- АС2♦10.** Покажите, что четыре различные неколлинеарные точки $z_1, \dots, z_4 \in \mathbb{C}$ лежат на одной окружности если и только если их двойное отношение $\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} \in \mathbb{R}$.
- АС2♦11.** Решите в поле $\mathbb{C}$ уравнения: а) $z^3 = -i$ б) $\bar{z} = z^3$ в) $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$ г) $(z + i)^n + (z - i)^n = 0$.
- АС2♦12.** Вычислите суммы: а) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$ б) $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \dots$
- АС2♦13.** Выразите $\sin 5\varphi$ через $\sin \varphi$, а $\cos(2\pi/5)$ и $\cos(4\pi/5)$ — через радикалы от рациональных чисел.
- АС2♦14.** Покажите, что всякий многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ раскладывается в произведение линейных двучленов и квадратных трёхчленов с отрицательным дискриминантом. Разложите в $\mathbb{R}[x]$ на неприводимые множители многочлены $x^4 + 4$ и $x^8 + 128$.
- АС2♦15.** Найдите все $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых многочлен $x^4 - 4x + \lambda$ имеет кратный корень.
- АС2♦16.** Выпишите все неприводимые многочлены степени ≤ 5 над полем $\mathbb{F}_2$ и все неприводимые приведённые многочлены степени ≤ 4 над полем $\mathbb{F}_3$.
- АС2♦17.** Какие из колец а) $\mathbb{F}_5[x]/(x^3 + x^2 + x + 1)$ б) $\mathbb{F}_5[x]/(x^3 + x + 1)$ в) $\mathbb{F}_5[x]/(x^3 + x^2 + 1)$ являются полями? Найдите в этих кольцах $[1 + x]^{-1}$ и $[1 + x^2]^{-1}$ если они существуют.
- АС2♦18.** У скольких многочленов степени $\leq n$ из кольца $\mathbb{F}_2[x]$ нет корней в $\mathbb{F}_2$?
- АС2♦19.** Предъявите примеры полей из а) 4 б) 8 в) 9 г) 16 элементов. Укажите в них все квадраты, все кубы и все образующие мультипликативной группы.
- АС2♦20.** Изоморфны ли поля $\mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ и $\mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1)$? Если да, предъявите изоморфизм явно. Тот же вопрос про поля из зад. АС2♦17.

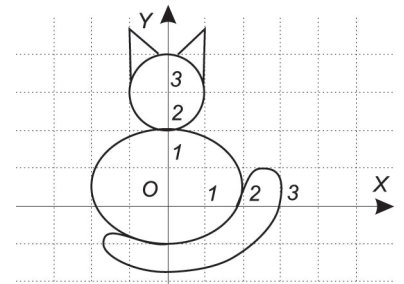


Рис. 1♦1. Комплексная кошка.