

Целые числа и вычеты

- АС1♦1.** Вычислите $\text{НОД}(a, b)$ и подберите такие целые x, y, α, β , что $\text{НОД}(a, b) = ax + by$ и $\text{НОК}(a, b) = \alpha a = \beta b$ для чисел а) $a = 221, b = -323$ б) $a = 8\,888\,888, b = 8\,888$ в) $a = -44\,863, b = 70\,499$ г) $a = 8\,385\,403, b = 2\,442\,778$
- АС1♦2.** Для всех $\ell, m, n \in \mathbb{N}, \ell \geq 2$, вычислите $\text{НОД}(\ell^n - 1, \ell^m - 1)$.
- АС1♦3.** Вычислите а) $\text{НОД}(665, 684, 741)$ б) $\text{НОД}(924, 1540, 3003, 5005)$ и представьте его в виде целочисленной линейной комбинации данных чисел.
- АС1♦4.** Найдите все целые решения (x, y) уравнений: а) $1537x + 1387y = 1$ б) $5x + 7y = 11$ в) $26x + 32y = 60$ г) $169x + 221y = 26$ д) $nx + (2n - 1)y = 3$.
- АС1♦5.** Найдите все натуральные решения уравнений: а) $173x + 95y = 20000$ б) $57x + 102y = 10000$.
- АС1♦6.** Составьте таблицы умножения в кольцах $\mathbb{Z}/(m)$ для $4 \leq m \leq 9$. В каждом из этих колец перечислите все квадраты, все делители нуля, все нильпотенты, все обратимые элементы, и для каждого обратимого элемента укажите обратный.
- АС1♦7.** Для данных $m, n \in \mathbb{N}, m \geq 2$, найдите все такие $x \in \mathbb{Z}/(m)$, что $[n]x = [0]$ в $\mathbb{Z}/(m)$. Сколько всего таких классов?
- АС1♦8.** Найдите остатки от деления на 7 и на 13 чисел а) 2025^{2024} б) $2025^{2024^{2023}}$.
- АС1♦9.** Верно ли, что а) $2222^{5555} + 5555^{2222} : 7$ б) $2^{70} + 3^{70} : 13$ в) $a^2 + b^2 : 7 \Rightarrow a : 7 \ \& \ b : 7$ г*) $a^3 + b^3 + c^3 : 7 \Rightarrow abc : 7$ д*) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 : 9 \Rightarrow abcde : 9$?
- АС1♦10.** Решите в целых числах уравнения а) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ б) $x^2 + y^2 + z^2 = 999\,999$.
- АС1♦11.** Верно ли, что а) ни одно число вида $4k + 3$ не является суммой квадратов двух целых чисел? б) ни одно число вида 10^{3k+1} не является суммой кубов двух целых чисел?
- АС1♦12.** Чему равно третье по величине натуральное число с остатками а) 2 и 7 от деления на 57 и 179 б) 2, 4, 5 от деления на 5, 7, 8 в) 4, 5, 6 от деления на 6, 7, 8 г) 2, 4, 6 и 8 от деления на 5, 7, 8 и 9?
- АС1♦13.** Верно ли что: а) $2^n - 1$ просто $\Rightarrow n$ просто б) $2^n + 1$ просто $\Rightarrow n = 2^m$? в*) Верны ли обратные импликации?
- АС1♦14.** Существуют ли ненулевые нетождественные гомоморфизмы колец: а) $\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$ б) $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ в) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ г) $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ д) $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] \rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, где $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$? Верно ли, что $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ — поле?
- АС1♦15.** Существуют ли на числовой прямой сколь угодно длинные отрезки, не содержащие ни одного простого числа?
- АС1♦16*.** Верно ли, что среди чисел вида а) $10 \dots 03$ б) $3 \dots 31$ бесконечно много составных?