Комплексные и вещественные пространства

АЛ12⋄1 (сопряжённые комплексные структуры). Рассмотрим комплексное векторное пространство W и обозначим через $\overline{W}$ пространство, которое совпадает с W как векторное пространство над $\mathbb{R}$, но на комплексные числа векторы умножаются по формуле $z\cdot w \overset{\text{def}}{=} \bar{z}w$ (слева стоит произведение в $\overline{W}$, справа — в W). Покажите, что **а)** $\overline{W}$ является векторным пространством над $\mathbb{C}$ и $\dim_{\mathbb{C}} \overline{W} = \dim_{\mathbb{C}} W$ **б)** комплексификация $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}}$ овеществления $W_{\mathbb{R}}$ пространства W как комплексное векторное пространство канонически изоморфна $W\oplus\overline{W}$.

АЛ12⋄2. Для $\mathbb{C}$-линейного оператора $f : W \to W$ обозначим через $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}\otimes W_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}\otimes W_{\mathbb{R}}$ комплексификацию его овеществления. Как связаны друг с другом **а)** характеристические многочлены **б)** собственные числа **в)** собственные векторы **г)** элементарные делители операторов f и $f_{\mathbb{C}}$? Если общий случай вызывает затруднения, начните с оператора $z \mapsto iz$ умножения на i в одномерном пространстве $W = \mathbb{C}$.

АЛ12⋄3 (теорема Шура). Докажите, что любой оператор на эрмитовом пространстве записывается в подходящем ортонормальном базисе верхнетреугольной матрицей.

АЛ12⋄4. Постройте изоморфизм групп $\mathrm{U}_n \simeq \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

АЛ12⋄5. Всякая ли унитарная матрица является произведением вещественной ортогональной и комплексной симметричной матриц?

АЛ12⋄6. Всякая ли матрица из SU_2 подобна вещественной ортогональной матрице?

АЛ12⋄7. Линейный оператор $f : V \to V$ на эрмитовом пространстве V называется *нормальным*, если $f\circ f^{\times} = f^{\times}\circ f$. Докажите, что нормальность эквивалентна тому, что: **а)** эрмитова и антиэрмитова компоненты f_+, f_- оператора f перестановочны **б)** каждый собственный вектор оператора f собственный и для $f^{\times}$ **в)** $||fv|| = ||f^{\times}v||$ для всех $v \in V$ **г)** ортогонал к любому f-инвариантному подпространству f-инвариантен **д)** всякое f-инвариантное подпространство $f^{\times}$-инвариантно **е)** f диагонализуем в ортогональном базисе.

АЛ12⋄8. Верно ли, что обратимый оператор нормален, если и только если компоненты его полярного разложения перестановочны?

АЛ12⋄9. Пусть f — эрмитов оператор на координатном пространстве $\mathbb{C}^n$ со стандартной эрмитовой структурой, а $L \subset \mathbb{C}^n$ — r-мерное комплексное подпространство с ортонормальным базисом $e_1, \dots, e_r$. Положим $R_L(f) = \sum_{i=1}^{r}(fe_i, e_i)$. **а)** Зависит ли $R_L(f)$ от выбора ортонормального базиса в L? **б*)** Пусть f имеет попарно разные собственные значения $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$. Найдите $\max_L R_L(f)$ по всем r-мерным подпространствам $L \subset \mathbb{C}^n$.

АЛ12⋄10* (инвариантные углы). Для пары подпространств U, W эрмитова пространства, имеющих $\dim U \leqslant \dim W = m$, обозначим через $\alpha(U,W) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ упорядоченный по нестрогому убыванию набор сингулярных чисел[1] оператора $\pi_{UW} : W \to U$, проектирующего W на U вдоль $U^{\perp}$. Докажите, что упорядоченные пары подпространств (U_1, W_1) и (U_2, W_2) переводятся друг в друга унитарным оператором, если и только если $\dim U_1 = \dim U_2$, $\dim W_1 = \dim W_2$ и $\alpha(U_1, W_1) = \alpha(U_2, W_2)$.

АЛ12⋄11. Докажите, что отображения $A \mapsto (E - A)(E + A)$ и $U \mapsto (U - E)^{-1}(U + E)$ задают взаимно обратные биекции между антиэрмитовыми матрицами A и такими унитарными матрицами U, что $1 \notin \operatorname{Spec} U$. Как выглядит эта биекция для матриц 1×1?

АЛ12⋄12. Докажите, что для любых $h \in \mathrm{U}_n$ и $k \in \mathbb{N}$ существует такой многочлен $f \in \mathbb{C}[t]$, что $f(h) \in \mathrm{U}_n$ и $f(h)^k = h$.

АЛ12⋄13*. Покажите, что унитарная группа U_n компактна и линейно связна.

[1] Нестрого возрастающие углы $\varphi_i = \arccos \alpha_i \in [0, \pi/2]$ называются *инвариантными углами* между U и W.