

### Кватернионы

**A12<sup>1</sup>/<sub>2</sub>♦1 (бинарная группа октаэдра).** Покажите, что **а)** объединение бинарной группы тетраэдра и ещё 24 кватернионов вида  $(\pm m \pm n) / \sqrt{2}$ , где  $m, n \in \{e, i, j, k\}$  — различные базисные элементы, составляют мультипликативную подгруппу  $\mathfrak{D} \subset \mathbb{H}$  **б)** гомоморфизм  $\text{Ad}: \text{SU}_2 \rightarrow \text{SO}_3, h \mapsto \text{Ad}_h$ , переводит  $\mathfrak{D}$  в собственную группу  $O$  октаэдра (явно укажите вершины этого октаэдра и двойственного ему куба) **в)** стабилизатор точки  $e \in \mathbb{H}$  в группе  $W_{\mathfrak{D}} \subset \text{SO}(\mathbb{H})$ , порождённой отражениями  $\sigma_q: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, h \mapsto -qh^*q, c q \in \mathfrak{D}$ , порождается отражениями в ортогоналах к чисто мнимым кватернионам из  $\mathfrak{D}$  (сколько их? какую фигуру они образуют?) **г)** кватернионы из группы  $\mathfrak{D}$  являются вершинами правильного многогранника с символом Шлефли  $(3, 3, 4)$ : опишите звезду вершины  $e$  и примыкающие к  $e$  грани всех размерностей, подсчитайте их количества, найдите порядок несобственной группы многогранника и убедитесь, что она транзитивно действует на флагах.

**A12<sup>1</sup>/<sub>2</sub>♦2.** Для каждого  $z \in \mathbb{F}_4$  положим  $\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} F_2(z) = z^2$ . Сколько элементов в группе

$$\text{SU}_2(\mathbb{F}_4) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \text{Mat}_2(\mathbb{F}_4) \mid \bar{X}X^t = E\}$$

и как она устроена<sup>1</sup>?

**A12<sup>1</sup>/<sub>2</sub>♦3 (бинарная группа икосаэдра).** Покажите, что **а)** объединение бинарной группы тетраэдра и 96 кватернионов, которые получаются из  $(\pm e \pm \alpha i \pm \alpha^{-1} j)/2$ , где  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ , всевозможными чётными перестановками букв  $e, i, j, k$ , составляют мультипликативную подгруппу  $\mathfrak{I} \subset \mathbb{H}$  **б)** гомоморфизм  $\text{Ad}: \text{SU}_2 \rightarrow \text{SO}_3, h \mapsto \text{Ad}_h$ , переводит  $\mathfrak{I}$  в собственную группу  $I$  икосаэдра (явно укажите вершины этого икосаэдра) **в)** стабилизатор точки  $e \in \mathbb{H}$  в группе  $W_{\mathfrak{I}} \subset \text{SO}(\mathbb{H})$ , порождённой отражениями  $\sigma_q: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, h \mapsto -qh^*q, c q \in \mathfrak{I}$ , порождается отражениями в ортогоналах к 30 чисто мнимым кватернионам из  $\mathfrak{I}$  и изоморфен несобственной группе икосаэдра **г)** кватернионы из группы  $\mathfrak{I}$  являются вершинами правильного многогранника с символом Шлефли  $(3, 3, 5)$ : опишите звезду вершины  $e$  и примыкающие к  $e$  грани всех размерностей, подсчитайте их количества, найдите порядок несобственной группы многогранника и убедитесь, что она транзитивно действует на флагах.

**A12<sup>1</sup>/<sub>2</sub>♦4.** Для каждого  $z \in \mathbb{F}_{25}$  положим  $\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} F_5(z) = z^5$ . Сколько элементов в группе

$$\text{SU}_2(\mathbb{F}_{25}) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \text{Mat}_2(\mathbb{F}_{25}) \mid \bar{X}X^t = E\}?$$

Не встречалась ли она Вам раньше?

**A12<sup>1</sup>/<sub>2</sub>♦5.** Докажите, что все ненулевые элементы конечномерной ассоциативной  $\mathbb{k}$ -алгебры с единицей обратимы если и только если в этой алгебре нет делителей нуля.

**A12<sup>1</sup>/<sub>2</sub>♦6 (обобщённые кватернионы).** Обозначим через  $H_{\mathbb{k}}(\alpha, \beta)$  ассоциативную  $\mathbb{k}$ -алгебру с единицей, порождённую (как  $\mathbb{k}$ -алгебра) элементами  $i, j$  с соотношениями  $ij = -ji, i^2 = \alpha, j^2 = \beta$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}^\times$ . Например,  $H_{\mathbb{R}}(-1, -1) = \mathbb{H}$ . Покажите, что

**а)**  $H_{\mathbb{k}}(\alpha, 1) \simeq \text{Mat}_2(\mathbb{k})$  для всех  $\alpha \in \mathbb{k}^\times$  **б)**  $H_{\mathbb{k}}(\delta^2\alpha, \gamma^2\beta) \simeq H_{\mathbb{k}}(\alpha, \beta)$  для всех  $\gamma, \delta \in \mathbb{k}^\times$

**в)** обратимость всех ненулевых элементов  $H_{\mathbb{k}}(\alpha, \beta)$  равносильна анизотропности квадратичной формы  $x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2$  на 4-мерном пространстве  $\mathbb{k}^4$ .

**A12<sup>1</sup>/<sub>2</sub>♦7 (октавы).** Зададим на 8-мерном вещественном пространстве  $\mathbb{O} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$  умножение, сопряжение и норму формулами  $(p_1 + \mathbf{l}q_1)(p_2 + \mathbf{l}q_2) \stackrel{\text{def}}{=} (p_1q_1 - q_2q_1^*) + \mathbf{l}(p_2q_1 + p_1^*q_2), (p + \mathbf{l}q)^* \stackrel{\text{def}}{=} p^* - \mathbf{l}q, \|w\| \stackrel{\text{def}}{=} ww^*$ . Для любого ненулевого  $a \in \mathbb{O}$  докажите, что  $\|a\| \in \mathbb{R}_{>0}$  и каждое из уравнений  $ax = b$  и  $xa = b$  имеет единственное решение<sup>2</sup> при всех  $b \in \mathbb{O}$ .

<sup>1</sup>Каковы её факторы Жордана – Гёльдера, разложима ли она в (полу)прямое произведение?

<sup>2</sup>Будьте внимательны: алгебра  $\mathbb{O}$  не ассоциативна.