Конечно порождённые абелевы группы

АЛ6⋄1. Пусть конечно порождённые модули A, B, C над областью главных идеалов таковы, что $A \oplus C \simeq B \oplus C$. Покажите, что $A \simeq B$.

АЛ6⋄2. Абелева группа A называется *разложимой*, если $A = B \oplus C$ для некоторых ненулевых собственных подгрупп $0 \neq B, C \subsetneq A$. Докажите, что каждая конечно порождённая абелева группа является прямой суммой неразложимых и перечислите все неразложимые группы.

АЛ6⋄3. Абелева группа A называется *простой*, если в ней нет ненулевых собственных подгрупп. Перечислите все конечно порождённые простые абелевы группы.

АЛ6⋄4. Абелева группа A называется *полупростой*, если для любой подгруппы $B \subset A$ существует такая подгруппа $C \subset A$, что $A \simeq B \oplus C$. Докажите, что

а) конечно порождённая абелева группа полупроста если и только если она является конечной прямой суммой простых

б) любая подгруппа конечно порождённой полупростой группы полупроста.

АЛ6⋄5*. Решите предыдущую задачу безо всяких предположений о конечности.

АЛ6⋄6. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие того, что абелева группа $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}/(p_1^{m_1}) \times \ldots \times \mathbb{Z}/(p_k^{m_k})$, где все p_i — просты, является циклической.

АЛ6⋄7. Пусть $n = 2^{\mu} p_1^{\nu_1} \ldots p_m^{\nu_m}$, где все $p_i > 2$ простые и попарно различны. Докажите, что:

а) $(\mathbb{Z}/(n))^{\times} = \left(\mathbb{Z}/(2^{\mu})\right)^{\times} \times \left(\mathbb{Z}/(p_1^{\nu_1})\right)^{\times} \times \ldots \times \left(\mathbb{Z}/(p_m^{\nu_m})\right)^{\times}$

б*) все группы $\left(\mathbb{Z}/(p_i^{\nu_i})\right)^{\times}$ циклические порядка $p_i^{\nu_i} - p_i^{\nu_i - 1}$

в*) $(\mathbb{Z}/(4))^{\times} \simeq \mathbb{Z}/(2)$ и $\left(\mathbb{Z}/(2^{\mu})\right)^{\times} \simeq \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2^{\mu-2})$ при $\mu > 2$.

АЛ6⋄8. Верно ли, что для любого натурального m, делящего порядок конечной абелевой группы, в этой группе найдётся подгруппа порядка m?

АЛ6⋄9*. Пусть для любого $m \in \mathbb{N}$ число элементов порядка m в двух конечных абелевых группах A и B одинаково. Обязательно ли $A \simeq B$?

АЛ6⋄10. Для каждого $\mathbb{Z}$-модуля M положим $M^* \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$.

а) Приведите пример ненулевого $\mathbb{Z}$-модуля M с $M^* = 0$.

б) Для каждого гомоморфизма $\varphi : M \to N$ постройте гомоморфизм $\varphi^* : N^* \to M^*$. Верно ли, что: (1) если φ сюрьективен, то φ^* инъективен? (2) если φ инъективен, то φ^* сюрьективен?

в) Пусть конечно порождённый $\mathbb{Z}$-модуль N свободен, и его подмодуль $L \subset N$ таков, что фактор N/L конечен. Покажите, что L^* свободен и конечно порождён, $N^* \subset L^*$ является его подмодулем, а фактор L^*/N^* конечен, и имеются канонические изоморфизмы:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N/L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Q}) \mid \varphi(L) \subset \mathbb{Z}\}/N^* \simeq L^*/N^* .$$

АЛ6⋄11 (формула Пика для параллелепипедов). Пусть v_1, v_2, $v_3 \in \mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ — три линейно независимых над $\mathbb{R}$ целых вектора, $L \subset \mathbb{Z}^3$ — порождённый ими $\mathbb{Z}$-подмодуль, а $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ — натянутый на эти векторы параллелепипед. Покажите, что объём Π равен числу элементов в фактор модуле $\mathbb{Z}^3/L$ и равен $v + f/2 + e/4 + 1$, где v, f и e суть количества целых точек, находящихся, соответственно, строго внутри Π, строго внутри его граней и строго внутри рёбер. Обобщите этот результат на произвольную размерность.