

§17. Кватернионы

17.1. Три инволюции на пространстве $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$. Обозначим через $U = \mathbb{C}^2$ двумерное эрмитово координатное пространство, а через $W = \text{Mat}_2(\mathbb{C}) = \text{End}_{\mathbb{C}} U = U^* \otimes U$ — четырёхмерное пространство его \mathbb{C} -линейных эндоморфизмов. На W есть три невырожденные формы $W \times W \rightarrow \mathbb{C}$:

- симметричная билинейная форма $\langle A, B \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \text{tr}(AB)$, сопоставляющая паре разложимых операторов $a \otimes \alpha, b \otimes \beta \in U \otimes U^*$ половину их полной свёртки $\frac{1}{2} \langle a, \beta \rangle \langle b, \alpha \rangle$
- поляризация квадратичной формы¹ $\det A = \frac{1}{2} \text{tr}(AA^\vee)$ — симметричная билинейная форма $\widetilde{\det}(A, B) = \frac{1}{2} \text{tr}(AB^\vee) = \langle A, B^\vee \rangle$, где

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^\vee = \begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{11} \end{pmatrix} \quad (17-1)$$

обозначает присоединённую матрицу²

- стандартная эрмитова структура на $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$ — эрмитово симметричная полуторалинейная форма $(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \text{tr}(AB^\times) = \langle A, B^\times \rangle$, где

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^\times = \begin{pmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{21} \\ \bar{c}_{12} & \bar{c}_{22} \end{pmatrix} \quad (17-2)$$

обозначает эрмитово сопряжённую матрицу³, принимающая на матрицах $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ значение

$$(A, B) = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} \bar{b}_{ij}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 17.1. Напишите матрицы Грама всех трёх форм в стандартном базисе из матричных единиц E_{ij} .

Линейная инволюция (17-1) и полулинейная инволюция (17-2) оборачивают сомножители в произведениях: $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$ и $(AB)^\times = B^\times A^\times$.

УПРАЖНЕНИЕ 17.2. Проверьте первое из этих равенств⁴.

Инволюции (17-1) и (17-2) коммутируют друг с другом. Их композиция сопоставляет матрице комплексно сопряжённую к матрице алгебраических дополнений и обозначается

$$\sigma : \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbb{C}), \quad C \mapsto C^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} C^{\vee \times} = C^{\times \vee}, \quad \text{где} \quad (17-3)$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^\sigma = \begin{pmatrix} \bar{c}_{22} & -\bar{c}_{21} \\ -\bar{c}_{12} & \bar{c}_{11} \end{pmatrix}$$

Инволюция (17-3) полулинейна и перестановочна с произведением: $(AB)^\sigma = A^\sigma B^\sigma$.

УПРАЖНЕНИЕ 17.3. Убедитесь, что и три инволюции (17-1) – (17-3) образуют вместе с тождественным преобразованием группу Клейна $V_4 \simeq \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$.

¹См. 8-22 на стр. 138.

²См. п° 8.4 на стр. 138.

³См. п° 16.1 на стр. 255.

⁴Второе равенство было установлено нами в предл. 16.1 на стр. 255.

Полулинейная инволюция σ задаёт на пространстве $W = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ вещественную структуру¹. Пространство её вещественных векторов обозначается через

$$\mathbb{H} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Re}_\sigma(W) = \{X \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid X^\sigma = X\} \simeq \mathbb{R}^4$$

и состоит из матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4. \quad (17-4)$$

Так как $\widetilde{\det}(A, B) = (A, B^\sigma)$, билинейная форма $\widetilde{\det}$ и эрмитова структура $(*, *)$ ограничиваются на \mathbb{H} в одну и ту же вещественно билинейную симметричную положительно определённую форму, задающую на \mathbb{H} евклидову структуру.

УПРАЖНЕНИЕ 17.4. Убедитесь, скалярный квадрат матрицы (17-4) равен

$$\|X\|^2 = (X, X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

а матрицы

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (17-5)$$

образуют ортонормальный базис в \mathbb{H} .

Формы $\widetilde{\det}$ и $(*, *)$ задают, соответственно, \mathbb{C} -билинейное и эрмитово продолжения этой евклидовой структуры с \mathbb{H} на комплексификацию $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$. Так как инволюция σ является гомоморфизмом относительно матричного умножения, пространство её неподвижных точек $\mathbb{H} \subset \text{Mat}_2(\mathbb{C})$ является \mathbb{R} -подалгеброй в алгебре матриц. Эта подалгебра называется *алгеброй кватернионов*. Эрмитово сопряжение матриц $X \leftrightarrow X^\times$ и переход к присоединённой матрице $X \leftrightarrow X^\vee$ переводят алгебру \mathbb{H} в себя и задают на ней одну и ту же инволюцию, которая называется *кватернионным сопряжением* и обозначается звёздочкой: $q^* \stackrel{\text{def}}{=} q^\times = q^\vee$.

УПРАЖНЕНИЕ 17.5. Убедитесь, что кватернионное сопряжение тождественно действует на \mathbf{e} , меняет знак у $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и оборачивает порядок сомножителей в произведении: $(pq)^* = q^*p^*$ для всех $p, q \in \mathbb{H}$.

17.2. Тело кватернионов. Кватернион \mathbf{e} является единичным элементом алгебры \mathbb{H} и обычно обозначается просто 1, а в произведениях опускается вовсе. Таблица умножения остальных базисных кватернионов (17-5) такова:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (17-6)$$

Произвольная пара кватернионов перемножается по правилу

$$\begin{aligned} (x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) \cdot (y_0 + y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) = \\ = (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) + \\ + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{i} + \\ + (x_0y_2 + x_2y_0 + x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{j} + \\ + (x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (17-7)$$

¹См. н° 16.1.1 на стр. 256.

УПРАЖНЕНИЕ 17.6. Попробуйте убедиться прямым вычислением, что таблица умножения (17-6) задаёт на абстрактном вещественном векторном пространстве с базисом $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ структуру ассоциативной \mathbb{R} -алгебры.

По аналогии с комплексными числами, кватернионы из одномерного подпространства $\mathbb{R} \mathbf{e} \subset \mathbb{H}$ называются *вещественными*. Вещественность кватерниона q равносильна тому, что $q^* = q$. Трёхмерный ортогонал к вещественным кватернионам обозначается через

$$\mathbb{I} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}^\perp = \{x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

и называется пространством *чисто мнимых* кватернионов. Кватернион q чисто мним если и только если $q^* = -q$. На языке матриц вещественные кватернионы — это вещественные скалярные матрицы, а чисто мнимые кватернионы — это бесследные антиэрмитовы матрицы:

$$\mathbb{I} = \{X \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid X^\times = -X \ \& \ \text{tr} X = 0\}.$$

Кватернионы $\text{Re } q \stackrel{\text{def}}{=} (q + q^*)/2 \in \mathbb{R} \mathbf{e}$ и $\text{Im } q \stackrel{\text{def}}{=} (q - q^*)/2 \in \mathbb{I}$ называются *вещественной* и *мнимой* частями кватерниона $q \in \mathbb{H}$.

17.2.1. Норма и деление. Так как $\|X\|^2 = \det X$ для всех $X \in \mathbb{H}$, длина кватернионов мультипликативна по отношению к кватернионному умножению: $\|pq\| = \|p\| \cdot \|q\|$ для всех $p, q \in \mathbb{H}$. В терминах формул (17-7) равенство $\|p\|^2 \|q\|^2 = \|pq\|^2$ выражается *тождеством Эйлера*¹

$$(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = (x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3)^2 + \\ + (x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_0 y_2 + x_2 y_0 + x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_0 y_3 + x_3 y_0 + x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

Поскольку эрмитово сопряжение совпадает на \mathbb{H} со взятием присоединённой матрицы,

$$XX^\times = XX^\vee = \det(X) E = X^\vee X = X^\times X \text{ для всех } X \in \mathbb{H},$$

т. е. $\|q\|^2 = qq^* = q^*q$ для всех $q \in \mathbb{H}$. Из этого соотношения вытекает, что каждый ненулевой кватернион q обратим, и $q^{-1} = q^* / \|q\|^2$ является двусторонним обратным к q .

Ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обратим, называется *телом*². Таким образом, кватернионы образуют тело.

УПРАЖНЕНИЕ 17.7. Убедитесь, что $\text{Re}(pq^*) = \text{Re}(p^*q) = (p, q)$ для всех $p, q \in \mathbb{H}$.

17.2.2. Геометрия мнимых кватернионов. Зададим на трёхмерном евклидовом пространстве \mathbb{I} ориентацию³, объявив положительно ориентированным базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ из форм. (17-5) на стр. 265. Напомню, что *векторным произведением*⁴ $u \times w$ в ориентированном трёхмерном евклидовом пространстве V называется вектор, длина которого равна евклидовой площади параллелограмма⁵, натянутого на u, w , и — если она ненулевая — направленный перпендикулярно плоскости этого параллелограмма так, что базис $u \times w, u, w$ положительно ориентирован.

¹Которое играет важную роль в доказательстве теоремы о представимости натурального числа в виде суммы четырёх квадратов, ибо редуцирует его к анализу представимости простых чисел.

²Таким образом поля — это коммутативные тела.

³См. раздел 10.2.1 на стр. 133 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_10.pdf.

⁴См. раздел 10.5 на стр. 138 той же лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_10.pdf.

⁵Т. е. положительному квадратному корню из определителя матрицы Грама векторов u, w , см. формулу (10-9) из уже упомянутого раздела 10.2.1 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_10.pdf.

Вектор $u \times w$ однозначно задаётся тем, что для всех $v \in V$ выполняется равенство

$$\omega(v, u, w) = (v, u \times w),$$

где $\omega : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ — форма ориентированного объёма¹, равная единице на положительно ориентированном ортонормальном базисе. Из второго описания вытекает, что координатами вектора $u \times w$ в любом положительно ориентированном ортонормальном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ пространства V являются алгебраические дополнения к элементам первой строки 3×3 матрицы, по строкам которой написаны координаты векторов v, u, w в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, т. е.

$$u \times w = (x_2 y_3 - x_3 y_2, -x_1 y_3 + x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

для $u = (x_1, x_2, x_3), \quad w = (y_1, y_2, y_3)$.

Сравнивая это с форм. (17-7) на стр. 265, заключаем, что для всех $q_1, q_2 \in \mathbb{I}$

$$\operatorname{Re}(q_1 q_2) = -(q_1, q_2), \quad \operatorname{Im}(q_1 q_2) = q_1 \times q_2. \quad (17-8)$$

ЛЕММА 17.1

Произвольные $p, q \in \mathbb{H}$ ортогональны если и только если $pq^* \in \mathbb{I}$. Ортогональность чисто мнимых кватернионов $p, q \in \mathbb{I}$ равносильна равенству $pq = -qp$, и в этом случае кватернион $pq = -qp$ тоже чисто мним и ортогонален плоскости, натянутой на p и q .

Доказательство. Первое утверждение вытекает из упр. 17.7, остальные — из формул (17-8). \square

ЛЕММА 17.2

Множество решений уравнения $x^2 = -1$ в теле \mathbb{H} представляет собою двумерную сферу $S^2 \subset \mathbb{I}$, состоящую из чисто мнимых кватернионов единичной длины.

Доказательство. Если $q^2 = -1$, то $\|q\|^2 = \|-1\|^2 = 1$ и $q^* = q^{-1} = -q$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 17.8. Убедитесь, что уравнение $x^2 = 1$ имеет в \mathbb{H} ровно два решения $x = \pm 1$.

ЛЕММА 17.3

Кватернионы $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{H}$ тогда и только тогда удовлетворяют соотношениям (17-6):

$$\mathbf{l}^2 = \mathbf{m}^2 = \mathbf{n}^2 = -1,$$

$$\mathbf{lm} = -\mathbf{ml} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{mn} = -\mathbf{nm} = \mathbf{l}, \quad \mathbf{nl} = -\mathbf{ln} = \mathbf{m}$$

когда они образуют положительно ориентированный ортонормальный базис в \mathbb{I} .

Доказательство. Из верхней строки вытекает, что все три кватерниона чисто мнимы длины 1, а из нижней — что $\mathbf{n} = \mathbf{l} \times \mathbf{m}$, $\mathbf{l} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$, $\mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{l}$. \square

¹Т.е. трилинейная кососимметричная форма, см. раздел 8.1 на стр. 95 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_08.pdf.

17.3. Универсальное накрытие $SU_2 \rightarrow SO_3$. Кватернионы единичной длины образуют трёхмерную сферу $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$. На языке матриц, условие $X \in S^3$ означает, что $\det X = 1$, откуда $X^\times = X^\vee = X^{-1}$. Мы заключаем, что $S^3 = SU_2$ — это двумерная специальная унитарная группа¹. Она действует на теле \mathbb{H} сопряжениями

$$\text{Ad}_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad h \mapsto qhq^{-1} = qhq^*, \quad \text{где } q \in SU_2 \subset \mathbb{H}. \quad (17-9)$$

УПРАЖНЕНИЕ 17.9. Убедитесь, что $\text{Ad} : SU_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H})$, $q \mapsto \text{Ad}_q$, является гомоморфизмом группы SU_2 в группу автоморфизмов² тела кватернионов.

Так как $\det(qhq^{-1}) = \det h$, оператор Ad_q сохраняет евклидово скалярное произведение на \mathbb{H} , а так как $\text{Ad}_q(1) = 1$, оператор Ad_q переводит трёхмерное подпространство $\mathbb{I} = 1^\perp \subset \mathbb{H}$ в себя. Поскольку непрерывная функция $\det \text{Ad} : S^3 \rightarrow \{\pm 1\}$, $q \mapsto \det \text{Ad}_q|_{\mathbb{I}}$, постоянна и равна 1 при $q = 1$, ортогональный оператор $\text{Ad}_q|_{\mathbb{I}} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ собственный. Мы получаем гомоморфизм групп

$$S^3 = SU_2 \rightarrow SO_3(\mathbb{R}) = SO(\mathbb{I}), \quad q \mapsto \text{Ad}_q|_{\mathbb{I}}. \quad (17-10)$$

Из равенств $\text{Ad}_q(1) = 1$, $\text{Ad}_q(q) = q$ вытекает, что при $q \neq 1$ оператор Ad_q тождественно действует на двумерной плоскости $P_q = \text{span}_{\mathbb{R}}(1, q)$. Мы заключаем, что ограничение $\text{Ad}_q|_{\mathbb{I}}$ является вращением вокруг прямой $\ell_q = P_q \cap \mathbb{I}$. Зафиксируем на этой прямой один из двух (различающихся знаком) чисто мнимых кватернионов \mathbf{l} единичной длины и отождествим плоскость P_q с полем комплексных чисел \mathbb{C} по правилу

$$\mathbb{C} \simeq P_q, \quad x + iy \mapsto x\mathbf{e} + \mathbf{l}y. \quad (17-11)$$

В результате такого отождествления каждый кватернион $p \in P_q \simeq \mathbb{C}$ приобретает *аргумент*

$$\alpha = \text{Arg}_{\mathbf{l}} p \in \mathbb{R} : p = \cos \alpha + \mathbf{l} \sin \alpha.$$

При этом $p^{-1} = p^* = \cos \text{Arg}_{\mathbf{l}} p - \mathbf{l} \sin \text{Arg}_{\mathbf{l}} p$.

ЛЕММА 17.4

Оператор $\text{Ad}_q|_{\mathbb{I}} \in SO(\mathbb{I})$ является поворотом вокруг прямой ℓ_q на угол $2 \text{Arg}_{\mathbf{l}}(q)$ по часовой стрелке, если смотреть вдоль зафиксированного выше единичного вектора $\mathbf{l} \in \ell_q$.

Доказательство. Пусть $\text{Arg}_{\mathbf{l}} q = \alpha$. Дополним \mathbf{l} до положительно ориентированного ортонормального базиса $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ пространства \mathbb{I} . По лем. 17.3 на стр. 267 таблица умножения кватернионов $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ такая же, как у $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ из форм. (17-6) на стр. 265. Поэтому

$$\begin{aligned} q\mathbf{m}q^{-1} &= (\cos \alpha + \mathbf{l} \sin \alpha)\mathbf{m}(\cos \alpha - \mathbf{l} \sin \alpha) = (\mathbf{m} \cos \alpha + \mathbf{n} \sin \alpha)(\cos \alpha - \mathbf{l} \sin \alpha) = \\ &= \mathbf{m}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2\mathbf{n} \cos \alpha \sin \alpha = \mathbf{m} \cos(2\alpha) + \mathbf{n} \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q\mathbf{n}q^{-1} &= (\cos \alpha + \mathbf{l} \sin \alpha)\mathbf{n}(\cos \alpha - \mathbf{l} \sin \alpha) = (\mathbf{n} \cos \alpha - \mathbf{m} \sin \alpha)(\cos \alpha - \mathbf{l} \sin \alpha) = \\ &= \mathbf{n}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 2\mathbf{m} \cos \alpha \sin \alpha = \mathbf{n} \cos(2\alpha) - \mathbf{m} \sin(2\alpha), \end{aligned}$$

т. е. действие оператора Ad_q на векторы \mathbf{m}, \mathbf{n} задаётся матрицей $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$. \square

¹См. п° 15.3.4 на стр. 252.

²Т. е. биекций, перестановочных со сложением, умножением, вычитанием и делением.

Следствие 17.1

Гомоморфизм (17-10) сюръективен и имеет ядро $\{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/(2)$.

Доказательство. Для каждого ненулевого вектора v и угла $\varphi \in [0, 2\pi]$ поворот по часовой стрелке на угол φ вокруг оси направленной по вектору v представляется как поворот на угол 2α в ту же сторону вокруг той же оси ровно для двух углов $\alpha = \varphi/2$ и $\alpha = \pi + \varphi/2$. \square

Замечание 17.1. (топологическое) С топологической точки зрения, гомоморфизм (17-10) является двулистным накрытием, склеивающим между собою диаметрально противоположные точки сферы $S^3 \subset \mathbb{H}$. Результатом такой склейки является трёхмерное вещественное проективное пространство¹ $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{H})$. Таким образом, накрытие (17-10) задаёт гомеоморфизм между $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ и $SO_3(\mathbb{R})$. Так как сфера S^3 односвязна², а группа $SO_3(\mathbb{R})$ линейно связна, накрытие (17-10) является универсальным. В частности, $\pi_1(SO_3) = \mathbb{Z}/(2)$. Это равенство означает, что в группе SO_3 имеется нестягиваемая петля, квадрат которой стягиваем. Эту петлю можно увидеть и почувствовать: держа на ладони книгу, непрерывным движением руки поворачиваем её на 360° так, чтобы книга в течение всей манипуляции оставалась горизонтальной, как показано на³ рис. 17◊1 (первый столбец сверху вниз). Изогнутая рука задаёт петлю в SO_3 , и напряжение локтевого сустава красноречиво свидетельствует о её нестягиваемости. Если превозмочь неприятное ощущение и продолжить вращение книги дальше в том же направлении (второй столбец снизу вверх), то после ещё одного полного оборота скрученный локоть полностью распрямится. Неформально говоря, взятие прообраза при накрытии (17-10) означает «извлечение корня» из вращения трёхмерного пространства, и два различающихся знаком значения этого корня являются диаметрально противоположными точками трёхмерной сферы или, что то же самое, отличающимися знаком унитарными операторами из SU_2 .

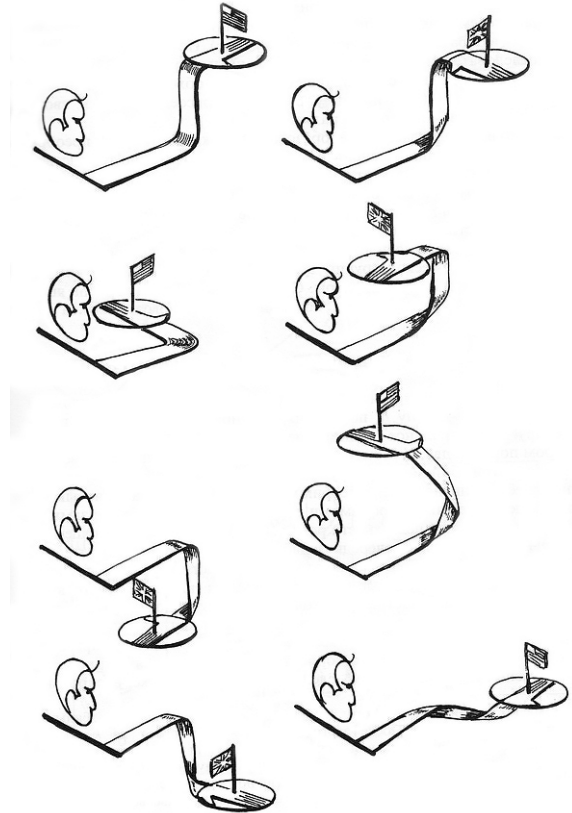


Рис. 17◊1. Образующая $\pi_1(SO_3) = \mathbb{Z}/(2)$.

Пример 17.1 (гурвицевы кватернионы и бинарная группа тетраэдра)

Восемь кватернионов $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$, составляющих мультипликативную группу Q_8 , располагаются в вершинах стандартного четырёхмерного октаэдра. Пропорциональные центрам шестнадцати его трёхмерных граней кватернионы $(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)/2$ располагаются в вершинах

¹Ср. с примером 16.3 на стр. 207 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_16.pdf.

²Т. е. фундаментальная группа $\pi_1(S^3)$ единичная.

³Рисунок взят из книги Франсис Дж. Книжка с картинками по топологии. М. «Мир» 1991.

вписанного в единичную сферу $S^3 \subset \mathbb{H}$ четырёхмерного куба, гомотетичного стандартному. Целочисленная линейная оболочка этих 24 кватернионов, т. е. кватернионы $x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$, координаты x_i которых либо все целые, либо все полуцелые, образует подкольцо в \mathbb{H} .

УПРАЖНЕНИЕ 17.10. Углядите это из форм. (17-7) на стр. 265.

Оно обозначается через H и называется кольцом *целых* или *гурвицевых* кватернионов. Целые кватернионы минимальной ненулевой длины 1 — это в точности 24 перечисленных выше кватерниона. Тем самым, они образуют мультипликативную группу $\mathfrak{I} \stackrel{\text{def}}{=} H^\times$ обратимых элементов кольца H , транзитивно действующую на себе левым умножениями, кои являются ортогональными преобразованиями $\mathbb{H} \simeq \mathbb{H}$. Универсальное накрытие (17-10):

$$\text{Ad} : \text{SU}_2 \rightarrow \text{SO}(\mathbb{H}), \quad q \mapsto \text{Ad}_q,$$

переводит группу \mathfrak{I} в собственную группу $T \subset \text{SO}_3$ правильного тетраэдра. В самом деле, по сл. 17.1 шесть кватернионов $\pm i, \pm j, \pm k$ задают в \mathbb{H} три поворота на угол π вокруг осей i, j, k , а 16 кватернионов $(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)/2$ — восемь поворотов на углы $\pm 2\pi/3$ вокруг четырёх осей, порождённых векторами $i + j + k, i + j - k, i - j + k, -i + j + k$.

УПРАЖНЕНИЕ 17.11. Убедитесь, что кватернион $q = (1 + i + j + k)/2$ имеет аргумент $\pm\pi/3$ в зависимости от знака выбранного в плоскости P_q чисто мнимого кватерниона l длины¹ 1.

Эти 11 поворотов вместе с тождественным отображением образуют группу вращений двух центрально симметричных друг другу тетраэдров с вершинами в центрах граней стандартного трёхмерного октаэдра с вершинами $\pm i, \pm j, \pm k$. Если раскрасить грани октаэдра в шахматном порядке, то один из тетраэдров будет иметь вершины в центрах белых граней

$$(i + j + k)/3, \quad (i - j - k)/3, \quad (-i + j - k)/3, \quad (-i - j + k)/3,$$

а другой — в центрах чёрных граней

$$(-i - j - k)/3, \quad (-i + j + k)/3, \quad (i - j + k)/3, \quad (i + j - k)/3$$

(обратите внимание, что у первого тетраэдра чётное число минусов в каждой вершине, у второго — нечётное). По этой причине группу \mathfrak{I} называют *бинарной группой тетраэдра*.

УПРАЖНЕНИЕ 17.12. Постройте коммутативную диаграмму гомоморфизмов групп

$$\begin{array}{ccc} \text{SL}_2(\mathbb{F}_3) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{PSL}_2(\mathbb{F}_3) & \xrightarrow{\sim} & T, \end{array}$$

где горизонтальные стрелки — изоморфизмы, а вертикальные — факторизации по ± 1 .

ПРИМЕР 17.2 (бинарная группа октаэдра)

Собственная группа O трёхмерного октаэдра с вершинами $\pm i, \pm j, \pm k$ получается расширением собственной группы тетраэдра T , вложенной в O как нормализатор² белых граней³ при помощи шести поворотов на углы $\pm\pi/2$ вокруг осей i, j, k и шести поворотов на угол π вокруг

¹ См. формулу (17-11) на стр. 268.

² См. п.° 10.4 на стр. 178.

³ Совпадающий с нормализатором чёрных граней.

Таким образом *бинарная группа икосаэдра* $\mathfrak{I} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ad}^{-1}(I) \subset \text{SU}_2$ является произведением $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}\mathfrak{C}$ бинарной группы тетраэдра \mathfrak{I} и циклической подгруппы $\mathfrak{C} \subset \text{SU}_2$, порождённой кватернионом

$$c = \cos \frac{\pi}{5} + \frac{\vartheta \mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{1 + \vartheta^2}} \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\vartheta}{2} + (\vartheta \mathbf{i} + \mathbf{j}) \sqrt{\frac{1 - \vartheta^2/4}{1 + \vartheta^2}} = \frac{1}{2}(\vartheta + \mathbf{i} + \vartheta^{-1} \mathbf{j}). \quad (17-12)$$

УПРАЖНЕНИЕ 17.14. Убедитесь, что помимо 24 кватернионов из группы \mathfrak{I} группа \mathfrak{I} содержит ещё 96 кватернионов, которые можно получить из c чётными перестановками базисных векторов $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ и произвольным выбором знака при каждом из них.

17.4. Универсальное накрытие $\text{SU}_2 \times \text{SU}_2 \rightarrow \text{SO}_4$. Отображение $\sigma_1 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, h \mapsto -h^*$, является отражением в гиперплоскости $1^\perp = \mathbb{I}$. Так как левое умножение $q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, h \mapsto qh$, на кватернион $q \in \text{SU}_2$ является ортогональным линейным преобразованием $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ и переводит 1 в q , отражение $\sigma_q = q\sigma_1q^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ в гиперплоскости q^\perp действует по правилу

$$\sigma_q : h \mapsto -q(q^{-1}h)^* = -qh^*q.$$

У сопряжения из форм. (17-9) на стр. 268 есть бивариантная версия: сопоставим каждой паре кватернионов $p, q \in \text{SU}_2$ ортогональное преобразование $\varphi_{pq} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, h \mapsto phq^{-1} = phq^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17.1

Отображение $\varphi : \text{SU}_2 \times \text{SU}_2 \rightarrow \text{SO}_4 = \text{SO}(\mathbb{H}), (p, h) \mapsto \varphi_{pq}$, является сюръективным гомоморфизмом групп с ядром $\{\pm(1, 1)\} \simeq \mathbb{Z}/(2)$.

Доказательство. Из курса геометрии известно, что всякое собственное ортогональное преобразование $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ является композицией чётного числа отражений σ_q с $q \in S^3$. Так как

$$\sigma_p\sigma_q : h \mapsto pq^*hq^*p = \varphi_{rs}(h)$$

для $r = pq^*, s = p^*q$, гомоморфизм φ сюръективен. Если $phq^* = h$ для всех $h \in \mathbb{H}$, то полагая $h = 1$, заключаем, что $q = p^* = p^{-1}$, откуда $p = \pm 1$ по сл. 17.1. \square

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 17.1. Ненулевые элементы матриц Грама исчерпываются произведениями

$$\langle E_{ij}, E_{ji} \rangle = (E_{ij}, E_{ij}) = 1/2, \quad \text{где } 1 \leq i, j \leq 2, \\ \widetilde{\det}(E_{11}, E_{22}) = \widetilde{\det}(E_{22}, E_{11}) = 1 \quad \text{и} \quad \widetilde{\det}(E_{12}, E_{21}) = \widetilde{\det}(E_{21}, E_{12}) = -1.$$

Упр. 17.2. Для невырожденной матрицы C выполняется равенство $C^\vee = \det(C) C^{-1}$. Поэтому для таких матриц $(AB)^\vee = \det(AB)(AB)^{-1} = \det(A) \det(B) B^{-1} A^{-1} = B^\vee A^\vee$. Так как пары невырожденных матриц всюду плотны в пространстве всех пар матриц, четыре квадратичных соотношения с целыми коэффициентами на матричные элементы, закодированные в матричном равенстве $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$, тождественно выполняются для всех матриц.

Упр. 17.7. Это сразу следует из форм. (17-7) на стр. 265.

Упр. 17.8. Если $q^2 = 1$, то $\|q\|^2 = 1$ и $q^* = q^{-1} = q$, откуда $q \in \mathbb{R}$.

Упр. 17.11. Так как l пропорционален $i + j + k \in \Pi_q \cap 1^\perp$ и $\|i + j + k\| = \sqrt{3}$, мы заключаем, что $q = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} l$.

Упр. 17.12. Изоморфизм $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq T$ является композицией изоморфизма $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$, задаваемого тавтологическим действием группы $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ на четырёх точках проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_3) = \{(1 : 0), (0 : 1), (1 : 1), (1 : -1)\}$, и изоморфизма $A_4 \simeq T$, сопоставляющего чётной перестановке вершин тетраэдра осуществляющее её вращение. В упр. 10.35 на стр. 187 мы видели, что при факторизации по $\pm E$ коммутант $\text{SL}'_2(\mathbb{F}_3) \simeq Q_8 = \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$, где

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

переходит в группу Клейна $V_4 \subset \text{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$, осуществляющую независимые транспозиции двух пар точек на \mathbb{P}_1 . Матрицы

$$\pm \frac{1}{2}(E + I + J + K) = \mp(E + I + J + K) = \mp \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (0 : 1) \mapsto (1 : 1) \mapsto (1 : -1) \\ \pm \frac{1}{2}(E + I + J - K) = \mp(E + I + J - K) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} : (1 : 0) \mapsto (0 : 1) \mapsto (1 : 1) \\ \pm \frac{1}{2}(E + I - J + K) = \mp(E + I - J + K) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : (1 : 0) \mapsto (1 : -1) \mapsto (0 : 1) \\ \pm \frac{1}{2}(E - I + J + K) = \mp(E - I + J + K) = \mp \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : (1 : 0) \mapsto (1 : 1) \mapsto (1 : -1)$$

переходят в четыре 3-цикла, оставляющие на месте четыре разные точки на \mathbb{P}_1 :

$$(1 : 0), \quad (1 : -1), \quad (1 : 1), \quad (0 : 1)$$

соответственно. Четыре обратные к ним матрицы перейдут в четыре обратных 3-цикла.

Упр. 17.13. Обозначим сторону икосаэдра через a . Гипотенуза прямоугольного треугольника в левом верхнем углу квадрата на рис. 17♦3 на стр. 271 равна высоте правильного треугольника со стороной a , а его катеты равны $1 - a/2$ и 1 , откуда $a^2 + 2a - 4 = 0$ и $a = \sqrt{5} - 1$. Точка $N = i + ja/2 = i + j\vartheta^{-1}$ удалена от центра куба на расстояние $\sqrt{1 + a^2/4} = \sqrt{1 + \vartheta^{-2}} = \vartheta/\sqrt{1 + \vartheta^2}$.