

## §15. Комплексные и вещественные векторные пространства

**15.1. Овеществление комплексного пространства.** Каждое векторное пространство  $W$  над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$  одновременно является векторным пространством и над подполем вещественных чисел  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . Когда комплексное векторное пространство  $W$  рассматривается как векторное пространство над  $\mathbb{R}$ , оно обозначается  $W_{\mathbb{R}}$  и называется *овеществлением* комплексного пространства  $W$ . Если множество векторов  $E \subset W$  является базисом пространства  $W$  над  $\mathbb{C}$ , то множество  $E \sqcup iE$ , состоящее из векторов  $e$  и  $ie$ , где  $e \in E$ , является базисом пространства  $W_{\mathbb{R}}$  над  $\mathbb{R}$ , поскольку существование и единственность представления произвольного вектора  $w \in W$  в виде комплексной линейной комбинации

$$w = \sum_e z_e e = \sum_e (x_e + iy_e) e, \quad \text{где } z_e = x_e + iy_e \in \mathbb{C},$$

означает в точности существование и единственность линейного выражения

$$w = \sum_e x_e e + \sum_e y_e ie$$

вектора  $w$  через векторы  $e$  и  $ie$  с вещественными коэффициентами  $x_e = \operatorname{Re} z_e$ ,  $y_e = \operatorname{Im} z_e$ . В частности,  $\dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} W$ , где для избежания недоразумений мы здесь и далее пишем  $\dim_{\mathbb{R}}$  и  $\dim_{\mathbb{C}}$  для обозначения размерности векторных пространств над полями  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$  соответственно. Обратите внимание, что вещественные векторные пространства, возникающие как овеществления комплексных, всегда чётномерны.

Комплексно линейные операторы  $F : W \rightarrow W$  составляют алгебру  $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$  над полем  $\mathbb{C}$ , а вещественно линейные  $G : W_{\mathbb{R}} \rightarrow W_{\mathbb{R}}$  — алгебру  $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$  над полем  $\mathbb{R}$ , содержащую алгебру комплексно линейных эндоморфизмов в качестве подалгебры  $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W) \subset \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ . Сопоставление операторам из  $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$  и  $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$  их матриц, соответственно, в базисе  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $W$  над  $\mathbb{C}$  и базисе  $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$  пространства  $W_{\mathbb{R}}$  над  $\mathbb{R}$  отождествляет алгебру  $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$  с алгеброй  $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$  комплексных матриц размера  $n \times n$ , а алгебру  $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$  — с алгеброй  $\operatorname{Mat}_{2n}(\mathbb{R})$  вещественных матриц размера  $2n \times 2n$ , которые мы будем записывать блочно:

$$G = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \tag{15-1}$$

согласно разбиению базиса  $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$  на части  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  и  $i\mathbf{e} = (ie_1, \dots, ie_n)$ .

**Предложение 15.1 (условия Коши – Римана)**

Вещественно линейный оператор (15-1) тогда и только тогда комплексно линеен, когда  $C = -B$  и  $D = A$ . В базисе  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $W$  над полем  $\mathbb{C}$  такой оператор записывается комплексной  $n \times n$ -матрицей  $A + iB$ .

**Доказательство.** Комплексная линейность вещественно линейного оператора  $F : W \rightarrow W$  равносильна равенству  $F(iw) = iF(w)$  для всех  $w \in W$ , что достаточно проверить на базисных векторах  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ . Если  $F$  имеет матрицу (15-1), то  $F(i\mathbf{e}) = \mathbf{e}C + i\mathbf{e}D$ , а  $iF(\mathbf{e}) = i(\mathbf{e}A + i\mathbf{e}B) = -\mathbf{e}B + i\mathbf{e}A$ , откуда  $C = -B$ ,  $D = A$  и  $F(\mathbf{e}) = \mathbf{e}(A + iB)$ . □

**Пример 15.1 (комплексно дифференцируемые функции)**

Рассмотрим одномерное комплексное пространство  $W = \mathbb{C}$  со стандартным базисным вектором  $e = 1$ . Его овеществление  $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$  имеет базис  $(e, ie) = (1, i)$ . Каждый комплексно линейный

оператор  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  является умножением на некое комплексное число  $z = a + ib$  и в базисе  $(1, i)$  записывается  $2 \times 2$ -матрицей

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Произвольная функция  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto w = f(z)$ , одной переменной  $z \in \mathbb{C}$ , представляет собою отображение  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  и может быть задана парой вещественных функций  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  от двух вещественных переменных  $x, y$ , связанных с комплексными переменными  $z, w$  по формулам  $w = u + iv$ ,  $z = x + iy$ . Функция  $f$  называется *комплексно дифференцируемой* в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$ , если её приращение как функции от  $z$  имеет вид

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + \zeta \cdot \Delta z + o(\Delta z), \text{ где } \zeta \in \mathbb{C}.$$

Функция  $f$  называется *вещественно дифференцируемой*, если

$$\begin{pmatrix} u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(\Delta x, \Delta y), \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Из курса анализа известно, что линейные операторы, описывающие линейную часть приращения, в обоих случаях выражаются через производные:

$$\zeta = f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x, y_0) - g(x_0, y_0)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(x_0, y_0 + \Delta y) - g(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Из [предл. 15.1](#) вытекает, что пара вещественных непрерывно дифференцируемых функций двух вещественных переменных тогда и только тогда задаёт комплексно дифференцируемую функцию  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , когда эти функции удовлетворяют *дифференциальным уравнениям Коши – Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

**15.2. Комплексификация вещественного пространства.** Каждое векторное пространство  $V$  над полем  $\mathbb{R}$  канонически расширяется до векторного пространства  $V_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$  над  $\mathbb{C}$ , которое называется *комплексификацией* пространства  $V$ . Умножение разложимого тензора  $c \otimes v \in V_{\mathbb{C}}$  на комплексное число  $z \in \mathbb{C}$  задаётся правилом  $z(c \otimes v) = (zc) \otimes v$ , которое корректно продолжается до  $\mathbb{R}$ -линейного отображения  $z: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ ,  $w \mapsto zw$ , линейно зависящего от  $z \in \mathbb{C}$ .

**Упражнение 15.1.** Убедитесь в этом.

Поскольку числа  $1, i \in \mathbb{C}$  составляют базис поля  $\mathbb{C}$  как векторного пространства над  $\mathbb{R}$ , каждый вектор  $w \in V_{\mathbb{C}}$  однозначно записывается в виде  $w = 1 \otimes u + i \otimes v$ , где  $u, v \in V$ . Векторы вида  $1 \otimes v$ , где  $v \in V$ , называются *вещественными* и образуют векторное пространство над полем  $\mathbb{R}$ , изоморфное исходному пространству  $V$ . Они составляют вещественное векторное подпространство в  $V_{\mathbb{C}}$ , которое обозначается через  $V \subset V_{\mathbb{C}}$ . Векторы вида  $i \otimes v$ , где  $v \in V$ , называются *чисто мнимыми*. Они тоже образуют векторное пространство над  $\mathbb{R}$ , также изоморфное исходному пространству  $V$ . Рассматриваемое как вещественное векторное подпространство в  $V_{\mathbb{C}}$ , оно обозначается через  $iV \subset V_{\mathbb{C}}$ . Таким образом, как векторное пространство над  $\mathbb{R}$ , пространство  $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$  является прямой суммой двух копий векторного пространства  $V$ . По этой причине векторы  $w = 1 \otimes u + i \otimes v \in V_{\mathbb{C}}$ , где  $u, v \in V$ , обычно записывают как  $w = u + iv \in V \oplus iV$ ,

где  $u, v \in V$ . Векторы  $u \in V$  и  $iv \in iV$  называются *вещественной* и *мнимой* частями вектора  $w \in V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ . В этих обозначениях умножение вектора  $w = u + iv$  на комплексное число  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  задаётся той же формулой

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu),$$

что и умножение чисел в поле  $\mathbb{C}$ . Действительно:

$$(x + iy)(1 \otimes u + i \otimes v) = x \otimes u - y \otimes v + ix \otimes v + iy \otimes u = 1 \otimes (xu - yv) + i \otimes (xv + yu).$$

Каждый базис  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$  над полем  $\mathbb{R}$ , рассматриваемый как набор векторов из вещественного подпространства  $V \subset V_{\mathbb{C}}$ , является базисом пространства  $V_{\mathbb{C}}$  над полем  $\mathbb{C}$ , поскольку единственность представления векторов  $v_1, v_2 \in V$  в виде  $v_1 = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,  $v_2 = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$  с  $x_v, y_v \in \mathbb{R}$  равносильна единственности представления вектора  $w = v_1 + iv_2 \in V \oplus iV$  в виде

$$w = z_1 e_1 + \dots + z_n e_n, \text{ где } z_v = x_v + iy_v \in \mathbb{C}.$$

Таким образом,  $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$ .

**15.2.1. Комплексное сопряжение.** На пространстве  $V_{\mathbb{C}}$  имеется  $\mathbb{R}$ -линейная инволюция

$$\sigma : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}, \quad w = v_1 + iv_2 \mapsto \bar{w} \stackrel{\text{def}}{=} v_1 - iv_2,$$

которая называется *комплексным сопряжением*. По построению,  $\sigma^2 = \text{Id}_{V_{\mathbb{C}}}$ , и вещественные подпространства  $V$  и  $iV$  являются собственными подпространствами оператора  $\sigma$  с собственными числами  $+1$  и  $-1$  соответственно. По отношению к умножению на комплексные числа инволюция  $\sigma$  *полулинейна*, т. е. удовлетворяет для всех  $z \in \mathbb{C}$  и  $w \in V_{\mathbb{C}}$  соотношению  $\sigma(zw) = \bar{z}\sigma(w)$ .

**15.2.2. Комплексификация операторов.** Каждый  $\mathbb{R}$ -линейный оператор  $F : V' \rightarrow V''$  между вещественными векторными пространствами продолжается до  $\mathbb{C}$ -линейного оператора

$$F_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Id}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} F : V'_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V' \rightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V'' = V''_{\mathbb{C}}$$

который называется *комплексификацией* оператора  $F$  и действует по правилу

$$F_{\mathbb{C}}(u + iv) = F(u) + iF(v), \text{ где } u + iv \in V' \oplus iV' = V'_{\mathbb{C}},$$

ибо  $\text{Id}_{\mathbb{C}} \otimes F(1 \otimes u + i \otimes v) = 1 \otimes Fu + i \otimes Fv = Fu + iFv$ . Оператор  $F_{\mathbb{C}}$  коммутирует с комплексным сопряжением: для каждого  $w = u + iv \in V_{\mathbb{C}}$  выполняются равенства

$$\overline{F_{\mathbb{C}} w} = \overline{F_{\mathbb{C}}(u + iFv)} = \overline{Fu + iFv} = Fu - iFv = F_{\mathbb{C}}(u - iv) = F_{\mathbb{C}}(\bar{w}). \quad (15-2)$$

В частности, равенства  $Fw = \lambda w$  и  $F\bar{w} = \bar{\lambda}\bar{w}$ , получающиеся друг из друга комплексным сопряжением, равносильны, а значит, вектор  $w \in V_{\mathbb{C}}$  тогда и только тогда является собственным для оператора  $F_{\mathbb{C}}$  с собственным числом  $\lambda \in \mathbb{C}$ , когда сопряжённый вектор  $\bar{w}$  собственный для  $F_{\mathbb{C}}$  с сопряжённым собственным числом  $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ .

**Предложение 15.2**

Комплексная линейная оболочка  $W = \text{span}_{\mathbb{C}}(w, \bar{w}) \subset V_{\mathbb{C}}$  пары сопряжённых собственных векторов  $w = v_1 + iv_2$  и  $\bar{w} = v_1 - iv_2$  оператора  $F_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$  с сопряжёнными собственными числами

$\lambda = a + ib$  и  $\bar{\lambda} = a - ib$  является комплексификацией вещественного инвариантного подпространства  $U = \text{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2) \subset V$  оператора  $F : V \rightarrow V$ , и ограничение  $F|_U : U \rightarrow U$  имеет в образующих  $(v_1, v_2)$  матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \quad (15-3)$$

Доказательство. Равенство  $F_{\mathbb{C}}(v_1 + iv_2) = (a + ib)(v_1 + iv_2)$  означает, что

$$F(v_1) + iF(v_2) = (av_1 - bv_2) + i(bv_1 + av_2),$$

откуда  $F(v_1) = av_1 - bv_2$ ,  $F(v_2) = bv_1 + av_2$ . Тем самым, оператор  $F$  переводит вещественное подпространство  $U = \text{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2)$  в себя и его ограничение на  $U$  имеет в образующих  $(v_1, v_2)$  матрицу (15-3). Комплексификация  $U_{\mathbb{C}} = \text{span}_{\mathbb{C}}(v_1, v_2)$  содержит векторы  $w = v_1 + iv_2$  и  $\bar{w} = v_1 - iv_2$ . Она линейно порождается этими векторами над  $\mathbb{C}$ , так как  $v_1 = (w + \bar{w})/2$ , а  $v_2 = (w - \bar{w})/2i$ .  $\square$

Следствие 15.1 (Ср. с прим. 9.5)

Каждый  $\mathbb{R}$ -линейный оператор на конечномерном вещественном векторном пространстве обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.  $\square$

Замечание 15.1. Для вещественного собственного числа  $\lambda \in \text{Spec } F$  предл. 15.2 утверждает, что все комплексные собственные векторы оператора  $F_{\mathbb{C}}$  лежат в комплексификации  $\mathbb{C} \otimes V_{\lambda} \subset V_{\mathbb{C}}$  вещественного собственного подпространства  $V_{\lambda} \subset V$  оператора  $F$ . Так как при  $u, w \in V$  равенство  $F_{\mathbb{C}}(u + iw) = Fu + iFw = \lambda(u + iw)$  равносильно равенствам  $Fu = \lambda u$ ,  $Fw = \lambda w$ , мы заключаем, что отвечающее вещественному собственному числу  $\lambda$  собственное подпространство оператора  $F_{\mathbb{C}}$  совпадает с  $\mathbb{C} \otimes V_{\lambda}$ .

Замечание 15.2. В любом вещественном базисе  $e_1, \dots, e_n \in V$  пространства  $V_{\mathbb{C}}$  над полем  $\mathbb{C}$  операторы  $F$  и  $F_{\mathbb{C}}$  имеют одну и ту же вещественную матрицу. Поэтому их характеристические многочлены одинаковы и имеют вещественные коэффициенты:  $\chi_F(t) = \chi_{F_{\mathbb{C}}}(t) \in \mathbb{R}[t]$ . В частности, невещественные собственные числа оператора  $F_{\mathbb{C}}$  разбиваются на пары комплексно сопряжённых, имеющих одинаковые кратности, что согласуется с предл. 15.2.

Идущее ниже предл. 15.3 утверждает, что разбиение на комплексно сопряжённые пары имеет место для всех невещественных элементарных делителей оператора  $F_{\mathbb{C}}$ . Напомню, что по теор. 9.1 на стр. 144 каждый вещественно линейный оператор  $F$  подобен умножению на  $t$  в прямой сумме фактор колец вида  $\mathbb{R}[t]/((t - \lambda)^m)$  и  $\mathbb{R}[t]/((t^2 - 2bt + a)^m)$ , где  $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$  и  $b^2 < a$ .

Предложение 15.3

Каждый элементарный делитель вида  $(t - \lambda)^m$  оператора  $F$  является элементарным делителем оператора  $F_{\mathbb{C}}$ , а каждому элементарному делителю вида  $(t^2 - 2bt + a)^m$  с  $b^2 < a$  оператора  $F$  отвечают два сопряжённых элементарных делителя  $(t - \mu)^m$  и  $(t - \bar{\mu})^m$  оператора  $F_{\mathbb{C}}$  с

$$\mu = b + i\sqrt{a - b^2} \in \mathbb{C},$$

и никаких других элементарных делителей у  $F_{\mathbb{C}}$  нет.

Доказательство. Из [прим. 13.8](#) на стр. 221 вытекает, что в условиях предложения

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}[t]}{(t-\lambda)^m} \simeq \frac{\mathbb{C}[t]}{(t-\lambda)^m} \quad \text{и} \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}[t]}{(t^2-2bt+a)^m} \simeq \frac{\mathbb{C}[t]}{(t-\mu)^m} \oplus \frac{\mathbb{C}[t]}{(t-\bar{\mu})^m}.$$

Поэтому оператор  $F_{\mathbb{C}}$  подобен умножению на  $t$  в прямой сумме фактор колец, полученной заменой каждого слагаемого  $\mathbb{R}[t]/(t-\lambda)^m$  слагаемым  $\mathbb{C}[t]/(t-\lambda)^m$ , а каждого слагаемого  $\mathbb{R}[t]/(t^2-2bt+a)^m$  — суммой  $\mathbb{C}[t]/(t-\mu)^m \oplus \mathbb{C}[t]/(t-\bar{\mu})^m$ .  $\square$

Следствие 15.2

Для каждого вещественного собственного числа  $\lambda \in \text{Spec}(F)$  комплексификации

$$\mathbb{C} \otimes V_{\lambda}, \mathbb{C} \otimes K_{\lambda} \subset \mathbb{C} \otimes V$$

собственного и корневого подпространств  $V_{\lambda}, K_{\lambda} \subset V$  оператора  $F$  являются, соответственно, собственным и корневым подпространствами оператора  $F_{\mathbb{C}}$ .  $\square$

Следствие 15.3

Для каждого невещественного собственного числа  $\lambda \in \text{Spec}(F_{\mathbb{C}})$  комплексное сопряжение

$$V_{\mathbb{C}} \simeq V_{\bar{\mathbb{C}}}, \quad w \mapsto \bar{w},$$

задаёт  $\mathbb{C}$ -полулинейные изоморфизмы  $K_{\lambda} \simeq K_{\bar{\lambda}} = \bar{K}_{\lambda}$  и  $V_{\lambda} \simeq V_{\bar{\lambda}} = \bar{V}_{\lambda}$  между корневыми и собственными подпространствами оператора  $F_{\mathbb{C}}$  с сопряжёнными собственными числами  $\lambda$  и  $\bar{\lambda}$ , а прямые суммы  $K_{\lambda} \oplus K_{\bar{\lambda}}$  и  $V_{\lambda} \oplus V_{\bar{\lambda}}$  являются комплексификациями собственного и корневого подпространств  $V_{\lambda}, K_{\lambda} \subset V$  оператора  $F$ .  $\square$

**15.2.3. Комплексификация билинейной формы.** Как и линейные операторы, каждую вещественно билинейную форму  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  на векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{R}$  можно продолжить до комплексно билинейной формы  $\beta_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ , значения которой на векторах  $w_1 = u_1 + iv_1, w_2 = u_2 + iv_2 \in V_{\mathbb{C}}$  вычисляются по правилу

$$\beta_{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) \stackrel{\text{def}}{=} (\beta(u_1, u_2) - \beta(v_1, v_2)) + i(\beta(u_1, v_2) + \beta(v_1, u_2)).$$

УПРАЖНЕНИЕ 15.2. Покажите, что  $\mathbb{C}$ -билинейное продолжение  $\beta_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  любой  $\mathbb{R}$ -билинейной формы  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  перестановочно с комплексным сопряжением векторов, т. е.  $\beta_{\mathbb{C}}(w_1, w_2) = \beta_{\mathbb{C}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$  для всех  $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$ .

Матрица Грама формы  $\beta_{\mathbb{C}}$  в любом вещественном базисе пространства  $V_{\mathbb{C}}$  совпадает с матрицей Грама формы  $\beta$  в том же базисе. Если форма  $\beta$  симметрична или кососимметрична, то такова же и её комплексификация  $\beta_{\mathbb{C}}$ . Обратите внимание, что классифицирующий вещественные симметричные билинейные формы инвариант — сигнатура<sup>1</sup> — после комплексификации утрачивается, поскольку все симметричные комплексно билинейные формы заданного ранга изометрически изоморфны<sup>2</sup> друг другу над полем  $\mathbb{C}$ . В частности,  $\mathbb{C}$ -билинейная комплексификация евклидова скалярного произведения представляет собою невырожденную форму, имеющую комплексные изотропные подпространства<sup>3</sup> размерности  $[\dim V/2]$ .

<sup>1</sup> См. раздел 14.5 на стр. 190 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_14.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_14.pdf).

<sup>2</sup> См. следствие 13.1 на стр. 181 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_13.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_13.pdf).

<sup>3</sup> См. раздел 13.2.2 на стр. 174 той же лекции.

**15.2.4. Полуторалинейное продолжение билинейной формы.** В метрической геометрии вместо  $\mathbb{C}$ -билинейного продолжения вещественной билинейной формы  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  на комплексификацию  $V_{\mathbb{C}}$  пространства  $V$  обычно используется *полуторалинейное* (или *эрмитово*) продолжение  $\beta_{\mathbb{H}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ , которое  $\mathbb{C}$ -линейно по первому аргументу и полулинейно<sup>1</sup> по второму. Это означает, что  $\beta_{\mathbb{H}}(zw_1, w_2) = z\beta_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)$ , но  $\beta_{\mathbb{H}}(w_1, zw_2) = \bar{z}\beta_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)$  для всех  $z \in \mathbb{C}$  и  $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$ . Значение такой формы на векторах  $w_1 = u_1 + iv_1, w_2 = u_2 + iv_2 \in V_{\mathbb{C}}$  равно

$$\beta_{\mathbb{H}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) \stackrel{\text{def}}{=} (\beta(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2)) + i(\beta(u_1, v_2) - \beta(v_1, u_2)). \quad (15-4)$$

**Упражнение 15.3.** Покажите, что полуторалинейное продолжение  $\beta_{\mathbb{H}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  любой  $\mathbb{R}$ -билинейной формы  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  перестановочно с комплексным сопряжением векторов, т. е.  $\overline{\beta_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)} = \beta_{\mathbb{H}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$  для всех  $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$ .

Если  $\mathbb{R}$ -билинейная форма  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  симметрична, то вещественная часть её эрмитова продолжения  $\text{Re } g_{\mathbb{H}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = g(u_1, u_2) + g(v_1, v_2)$  является симметричной  $\mathbb{R}$ -билинейной формой  $V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ , а мнимая часть  $\text{Im } g_{\mathbb{H}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = g(v_1, u_2) - g(u_1, v_2)$  кососимметрична. Поэтому эрмитово продолжение симметричной формы при перестановке аргументов сопрягается:  $g_{\mathbb{H}}(w_2, w_1) = \overline{g_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)}$  для всех  $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$ . Это свойство называют *эрмитовой симметричностью*. В частности, эрмитов скалярный квадрат любого вектора веществен:  $g_{\mathbb{H}}(w, w) = \overline{g_{\mathbb{H}}(w, w)} \in \mathbb{R}$  для всех  $w \in V_{\mathbb{C}}$ .

Если  $\mathbb{R}$ -билинейная форма  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  кососимметрична, то наоборот  $\mathbb{R}$ -билинейная форма  $\text{Re } \omega_{\mathbb{H}}$  кососимметрична, а  $\text{Im } \omega_{\mathbb{H}}$  симметрична. Поэтому скалярные квадраты всех векторов относительно эрмитово продолженной формы  $\omega_{\mathbb{H}}$  чисто мнимы: для всех  $w = u + iv \in V_{\mathbb{C}}$

$$\omega_{\mathbb{H}}(w, w) = 2i \omega(u, v) \in i\mathbb{R}.$$

**Пример 15.2 (эрмитово продолжение евклидовой структуры)**

Рассмотрим вещественное векторное пространство  $V$  с евклидовым скалярным произведением<sup>2</sup>  $(*, *) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  и его эрмитово продолжение  $(*, *)_{\mathbb{H}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  на комплексификацию  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V$  пространства  $V$ . Форма  $(*, *)_{\mathbb{H}}$  эрмитово симметрична, вещественно билинейна, комплексно полуторалинейна и *положительна* в том смысле, что  $(w, w)_{\mathbb{H}} > 0$  для всех ненулевых  $w \in V_{\mathbb{C}}$ . Абстрактное комплексное векторное пространство  $W$ , оснащённое формой  $(*, *) : W \times W \rightarrow \mathbb{C}$  с такими свойствами, называется *эрмитовым*, а сама форма — *эрмитовым скалярным произведением* или *эрмитовой структурой* на  $W$ .

Например, комплексификацией вещественного координатного пространства  $V = \mathbb{R}^n$  со стандартной евклидовой структурой  $(x, y) = \sum x_\nu y_\nu$  является комплексное координатное пространство  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$  с эрмитовой структурой  $(z, w)_{\mathbb{H}} = \sum z_\nu \bar{w}_\nu$ , которая называется *стандартной эрмитовой структурой* на  $\mathbb{C}^n$ .

Аналогично, комплексификацией пространства  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  вещественных непрерывных функций на отрезке  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  с евклидовым скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt \quad (15-5)$$

<sup>1</sup>См. раздел 2.1.3 на стр. 23 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_02.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_02.pdf).

<sup>2</sup>См. определение 3.1 на стр. 33 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_03.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_03.pdf).

является пространство  $C^0([a, b], \mathbb{C})$  непрерывных функций  $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  с эрмитовой структурой

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\bar{g}(x) dx, \quad (15-6)$$

где под интегралом от комплекснозначной функции  $f$  по определению понимается комплексное число

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx,$$

действительная и мнимая части которого равны интегралам от вещественной и мнимой частей  $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  функции  $f$ .

**15.3. Эрмитовы пространства.** Векторное пространство  $W$  над полем  $\mathbb{C}$  называется *эрмитовым*, если на нём задана полуторалинейная эрмитово симметричная положительная форма<sup>1</sup>

$$(*, *) : W \times W \rightarrow \mathbb{C}, \quad (15-7)$$

где *полуторалинейность* означает, что  $z(u, w) = (zu, w) = (u, \bar{z}w)$  для всех  $u, w \in W$  и  $z \in \mathbb{C}$ , эрмитова симметричность — что  $(u, w) = \overline{(w, u)}$  для всех  $u, w \in W$ , а положительность — что вещественное число  $(v, v) = \overline{(v, v)}$  положительно для всех ненулевых  $v \in W$ . Выше мы видели, что комплексификация любого вещественного евклидова пространства имеет каноническую эрмитову структуру, задаваемую полуторалинейным продолжением евклидова скалярного произведения. Выясним, что означает эрмитовость с точки зрения вещественного пространства  $W_{\mathbb{R}}$ .

На эрмитовом пространстве  $W$  с полуторалинейным скалярным произведением (15-7) имеются две вещественных билинейных формы  $g, \omega : W_{\mathbb{R}} \times W_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ , равные соответственно вещественной и мнимой части эрмитова скалярного произведения:

$$g(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re}(u, w) \quad \text{и} \quad \omega(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Im}(u, w). \quad (15-8)$$

Эрмитова симметричность комплекснозначной формы  $(u, w) = g(u, w) + i\omega(u, w)$  равносильна симметричности формы  $g$  и кососимметричности формы  $\omega$ . Положительность формы  $(u, w)$  влечёт положительность формы  $g$ , которая таким образом задаёт евклидову структуру на о вещественном пространстве  $W_{\mathbb{R}}$ . Равенство

$$(u, iw) = -i(u, w)$$

равносильно паре равенств  $g(u, iw) = \omega(u, w)$  и  $\omega(u, iw) = -g(u, w)$ , превращающихся друг в друга при замене  $w$  на  $iw$ . На языке матриц первое из этих равенств означает, что записанные в произвольном базисе пространства  $W_{\mathbb{R}}$  над полем  $\mathbb{R}$  матрицы Грама  $G, \Omega$  форм  $g, \omega$  и матрица оператора  $I : W_{\mathbb{R}} \rightarrow W_{\mathbb{R}}, w \mapsto iw$ , связаны соотношением  $GI = \Omega$ , из которого вытекает, в частности, что  $\det \Omega \neq 0$ , т. е. форма  $\omega$  невырождена и задаёт на о вещественном пространстве  $W_{\mathbb{R}}$  симплектическую структуру.

Наоборот, пусть на вещественном векторном пространстве  $V$  заданы

- евклидова структура<sup>2</sup>  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

<sup>1</sup>Любая такая форма называется *эрмитовой структурой* на комплексном пространстве  $W$ .

<sup>2</sup>Т. е. симметричная положительно определённая  $\mathbb{R}$ -билинейная форма.

- симплектическая структура<sup>1</sup>  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$ -линейный эндоморфизм  $I : V \rightarrow V$  с квадратом  $I^2 = -\text{Id}_V$ .

Оператор  $I$  с таким свойством называется *комплексной структурой* на вещественном векторном пространстве  $V$ , поскольку позволяет определить умножение векторов  $v \in V$  на комплексные числа  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  формулой

$$(x + iy)v \stackrel{\text{def}}{=} xv + yI(v). \quad (15-9)$$

УПРАЖНЕНИЕ 15.4. Убедитесь, что эта формула задаёт на  $V$  структуру векторного пространства над полем  $\mathbb{C}$ , и выведите отсюда, что вещественная размерность  $\dim_{\mathbb{R}} V$  чётна.

Рассмотрим  $V$  как комплексное векторное пространство и обозначим через

$$(*, *) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

вещественно билинейную форму, сопоставляющую векторам  $u, w \in V$  комплексное число

$$(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} g(u, w) + i\omega(u, w) \quad (15-10)$$

УПРАЖНЕНИЕ 15.5. Убедитесь, что эта форма вещественно билинейна, эрмитово симметрична и положительна.

Данные  $(I, g, \omega)$  называются *кэлеровой тройкой*, если они удовлетворяют лем. 15.1 ниже.

ЛЕММА 15.1

Следующие свойства тройки  $(I, g, \omega)$  эквивалентны друг другу:

- 1) форма (15-10) задаёт на комплексном векторном пространстве  $V$  эрмитову структуру
- 2) форма (15-10)  $\mathbb{C}$ -линейна по первому аргументу
- 3) форма (15-10)  $\mathbb{C}$ -полулинейна по второму аргументу
- 4)  $g(u, Iw) = \omega(u, w)$  для всех  $u, w \in V$
- 5)  $\omega(u, Iw) = -g(u, w)$  для всех  $u, w \in V$
- 6) записанные в одном базисе пространства  $V$  над полем  $\mathbb{R}$  матрицы Грама  $G, \Omega$  форм  $g, \omega$  и матрица оператора  $I$  связаны равенством  $GI = \Omega$ .

Доказательство. Равенство  $(Iu, w) = i(u, w)$  равносильно паре равенств

$$g(Iu, w) = -\omega(u, w) \quad \text{и} \quad \omega(Iu, w) = g(u, w),$$

переходящих друг в друга при замене  $u$  на  $Iu$ , так как  $I^2 = -\text{Id}$ . Равенство  $(u, Iw) = -i(u, w)$  равносильно паре равенств

$$g(u, Iw) = \omega(u, w) \quad \text{и} \quad \omega(u, Iw) = -g(u, w),$$

переходящих друг в друга при замене  $w$  на  $Iw$ . В силу симметричности  $g$  и кососимметричности  $\omega$  выполнение для всех  $u, w \in V$  первой пары равенств эквивалентно выполнению второй. Это доказывает эквивалентность первых пяти свойств. Условие (6) является матричной записью условия (4).  $\square$

<sup>1</sup>Т. е. невырожденная кососимметричная  $\mathbb{R}$ -билинейная форма.

Следствие 15.4

Задание эрмитовой структуры на комплексном векторном пространстве эквивалентно заданию кэлеровой тройки на его оеществлении.  $\square$

Следствие 15.5

Любые два элемента кэлеровой тройки  $(I, g, \omega)$  однозначно задают третий.

Доказательство. Это вытекает из свойства (6) и обратимости матриц  $I, G, \Omega$ .  $\square$

Следствие 15.6

Оператор  $I$  в кэлеровой тройке  $(I, g, \omega)$  одновременно является ортогональным для  $g$  и симплектическим для  $\omega$ , т. е.  $g(Iu, Iw) = g(u, w)$  и  $\omega(Iu, Iw) = \omega(u, w)$  для всех  $u, w \in V$ .

Доказательство. Из (1) вытекает, что  $(Iu, Iw) = (u, w)$ . Сравнивая вещественную и мнимую части, получаем требуемое.  $\square$

**15.3.1. Эрмитова норма вектора.** Вещественное число

$$\|w\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(w, w)} = \sqrt{g(w, w)} \quad (15-11)$$

называется *эрмитовой нормой* или *длиной* вектора  $w \in W$ . Обратите внимание, что эрмитова длина совпадает с евклидовой длиной вектора  $w$  относительно вещественного евклидова скалярного произведения  $g$  на  $W_{\mathbb{R}}$ . Эрмитово скалярное произведение  $W \times W \rightarrow \mathbb{C}$  однозначно восстанавливается по функции длины  $W \rightarrow \mathbb{R}$ , поскольку в силу эрмитовой симметричности и комплексной полуторалинейности скалярного произведения

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}(w_1, w_2) &= (w_1, w_2) + \overline{(w_1, w_2)} = (w_1, w_2) + (w_2, w_1) = \\ &= (w_1 + w_2, w_1 + w_2) - (w_1, w_1) - (w_2, w_2) = \\ &= \|w_1 + w_2\|^2 - \|w_1\|^2 - \|w_2\|^2 \\ 2 \operatorname{Im}(w_1, w_2) &= -i((w_1, w_2) - \overline{(w_1, w_2)}) = i(w_2, w_1) - i(w_1, w_2) = \\ &= (w_1 + iw_2, w_1 + iw_2) - (w_1, w_1) - (w_2, w_2) = \\ &= \|w_1 + iw_2\|^2 - \|w_1\|^2 - \|w_2\|^2. \end{aligned} \quad (15-12)$$

**15.3.2. Матрицы Грама.** На матричном языке эрмитова симметричность скалярного произведения означает, что матрица Грама<sup>1</sup>  $G_w = ((w_i, w_j)) = \mathbf{w}^t \cdot \mathbf{w}$  любого набора векторов  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$  транспонирована своей комплексно сопряжённой:  $G_w^t = \overline{G_w}$ . Комплексные матрицы с таким свойством называются *эрмитовыми* или *эрмитово симметричными*. Так как эрмитово скалярное произведение полулинейно по второму аргументу, при линейной замене векторов по формуле  $\mathbf{w} = \mathbf{u} C_{uw}$  матрица Грама меняется по правилу

$$G_w = \mathbf{w}^t \mathbf{w} = C_{uw}^t \mathbf{u}^t \mathbf{u} \overline{C_{uw}} = C_{uw}^t G_u \overline{C_{uw}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1

Набор векторов  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  в эрмитовом пространстве  $W$  называется *ортонормальным* если его матрица Грама  $G_e$  единичная, т. е. когда все векторы попарно ортогональны друг другу и имеют единичные скалярные квадраты.

<sup>1</sup>Здесь и далее при перемножении матриц, элементами которых являются векторы пространства  $W$ , мы считаем, что  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} (u, w) \in \mathbb{C}$ . Таким образом, произведение двух матриц из векторов является матрицей из комплексных чисел. Ср. с н° 5.3.1 на стр. 95.

Предложение 15.4 (Ортогонализация Грама – Шмидта)

В  $\mathbb{C}$ -линейной оболочке любого набора ненулевых векторов  $w_1, \dots, w_m$  эрмитова пространства  $W$  имеется такой ортонормальный базис  $e_1, \dots, e_n$ , что при каждом  $k$  линейная оболочка векторов  $w_1, \dots, w_k$  содержится в линейной оболочке векторов  $e_1, \dots, e_k$ .

Доказательство. В качестве первого вектора искомого базиса возьмём  $e_1 = w_1 / \|w_1\|$ . Пусть для векторов  $w_1, \dots, w_k$  уже построены такие ортонормальные векторы  $e_1, \dots, e_i$ , что  $i \leq k$  и

$$\text{span}(e_1, \dots, e_i) = \text{span}(w_1, \dots, w_k). \quad (15-13)$$

Положим  $v_{i+1} = w_{k+1} - \sum_{v=1}^i (w_{k+1}, e_v) \cdot e_v$ . Так как для каждого из уже построенных векторов  $e_j$  выполняется равенство  $(v_{i+1}, e_j) = (w_{k+1}, e_j) - (w_{k+1}, e_j)(e_j, e_j) = 0$ , вектор  $v_{i+1}$  ортогонален подпространству (15-13). Если  $v_{i+1} = 0$ , то вектор  $w_{k+1}$  лежит в подпространстве (15-13) и набор  $w_1, \dots, w_k$  можно увеличить до набора  $w_1, \dots, w_{k+1}$ . Если  $v_{i+1} \neq 0$ , добавляем к векторам  $e_1, \dots, e_i$  вектор  $e_{i+1} = v_{i+1} / \|v_{i+1}\|$  и заключаем, что  $\text{span}(e_1, \dots, e_{i+1}) = \text{span}(w_1, \dots, w_{k+1})$ .  $\square$

Замечание 15.3. Описанный в доказательстве предл. 15.4 индуктивный способ построения ортонормального базиса называется *ортогонализацией Грама – Шмидта*.

Следствие 15.7

Определитель Грама  $\det G_w$  любого набора векторов  $w = (w_1, \dots, w_m)$  является вещественным неотрицательным числом и обращается в нуль если и только если  $w$  линейно зависим.

Доказательство. Пусть  $w = e C_{ew}$ , где  $e = (e_1, \dots, e_n)$  — ортонормальный базис в  $\text{span } w$ . Тогда  $G_w = C_{ew}^t \overline{C_{ew}}$ . Если  $n < m$ , то ранг матрицы  $G_w$  строго меньше её размера, и  $\det G_w = 0$ . Если  $n = m$ , то  $\det G_w = \det C_{ew} \cdot \overline{\det C_{ew}} = |\det C_{ew}|^2 > 0$ .  $\square$

**15.3.3. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца.** Неотрицательность определителя Грама любой пары векторов  $v, w \in W$

$$\det \begin{pmatrix} (v, v) & (v, w) \\ (w, v) & (w, w) \end{pmatrix} = \|v\|^2 \|w\|^2 - (v, w) \cdot \overline{(v, w)} \geq 0$$

переписывается как эрмитова версия евклидова неравенства Коши – Буняковского – Шварца<sup>1</sup>

$$|(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|, \quad (15-14)$$

равенство в котором равносильно пропорциональности векторов  $v$  и  $w$  над полем  $\mathbb{C}$ , а так как

$$\begin{aligned} \|w_1 + w_2\|^2 &= (w_1 + w_2, w_1 + w_2) = \\ &= \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + (w_1, w_2) + (w_2, w_1) = \\ &= \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2 \operatorname{Re}(w_1, w_2) \leq \\ &\leq \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2|(w_1, w_2)| \leq \\ &\leq \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2\|w_1\| \cdot \|w_2\| = (\|w_1\| + \|w_2\|)^2, \end{aligned}$$

мы заключаем, что всех  $w_1, w_2 \in W$  справедливо *неравенство треугольника*

$$\|w_1\| + \|w_2\| \geq \|w_1 + w_2\|. \quad (15-15)$$

<sup>1</sup>См. следствие 3.1 на стр. 34 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_03.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_03.pdf).

**15.3.4. Унитарная группа.** Линейный оператор  $F : W \rightarrow W$  на эрмитовом пространстве  $W$  называется *унитарным*, если  $\|Fw\| = \|w\|$  для всех  $w \in W$ . Так как эрмитово скалярное произведение однозначно выражается через длины векторов<sup>1</sup>, каждый унитарный оператор  $F$  сохраняет скалярное произведение:  $(Fv, Fw) = (v, w)$  для всех  $v, w \in W$ . Поэтому матрица унитарного оператора в любом базисе связана с матрицей Грама этого базиса соотношением

$$F^t G \bar{F} = G. \quad (15-16)$$

Беря определители, заключаем, что  $|\det F| = 1$ . В частности, каждый унитарный оператор  $F$  обратим, и  $F^{-1} = \bar{G}^{-1} \bar{F}^t G = G^{t-1} \bar{F}^t G^t$ . В ортонормальном базисе эта формула редуцируется до

$$F^{-1} = \bar{F}^t. \quad (15-17)$$

Матрицы с таким свойством называются *унитарными*. Унитарные операторы на эрмитовом пространстве  $W$  образуют группу, которая обозначается  $U(W)$  и называется *унитарной группой* пространства  $W$ . Запись унитарных операторов матрицами в фиксированном ортонормальном базисе  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $W$ , задаёт изоморфизм унитарной группы с группой *унитарных матриц*

$$U_n = \{F \in GL_n(\mathbb{C}) \mid F^{-1} = \bar{F}^t\}.$$

Её подгруппа  $SU_n = \{F \in U_n \mid \det F = 1\}$ , состоящая из матриц определителя 1, называется *специальной* унитарной группой. Обратите внимание, что в отличие от вещественных ортогональных матриц определитель унитарной матрицы может принимать любое значение на единичной окружности

$$U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1\}.$$

**15.3.5. Эрмитов объём.** Зафиксируем в эрмитовом пространстве  $W$  какой-нибудь ортонормальный базис  $e_1, \dots, e_n$  в качестве базиса единичного объёма и определим *эрмитов объём*  $n$ -мерного параллелепипеда, натянутого на векторы  $v = e C_{ev}$  формулой

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} |\det C_{ev}|.$$

Так как абсолютная величина определителя унитарной матрицы перехода между любыми двумя ортонормальными базисами равна единице, эрмитов объём не зависит от выбора эталонного ортонормального базиса, а квадрат эрмитова объёма, как и в евклидовом случае, равен абсолютной величине определителя Грама:

$$\text{Vol}^2(v_1, \dots, v_n) = |\det C_{ev}|^2 = \det C_{ev}^t \cdot \overline{\det C_{ev}} = \det(C_{ev}^t \bar{C}_{ev}) = |\det G_v|.$$

**15.3.6. Эрмитова двойственность.** В силу полуторалинейности эрмитова скалярного произведения каждый вектор  $w$  эрмитова пространства  $W$  задаёт полулинейно зависящий от  $w$  комплексно линейный функционал правого скалярного умножения на  $w$ :

$$h_w : W \rightarrow \mathbb{C}, \quad u \mapsto (u, v).$$

Полулинейное отображение

$$h : W \rightarrow W^*, \quad w \mapsto h_w, \quad (15-18)$$

<sup>1</sup>См. формулу (15-12) на стр. 250.

называется *эрмитовой корреляцией*. Оно инъективно, поскольку в силу положительности эрмитовой формы  $h_w(w) = (w, w) \neq 0$  для любого ненулевого  $w$ . Так как пространства  $W$  и  $W^*$  имеют равные размерности над  $\mathbb{C}$ , их овеществления имеют одинаковые размерности над  $\mathbb{R}$ . Поэтому отображение (15-18) является вещественно линейным комплексно полулинейным изоморфизмом векторных пространств. Это означает, что для любого  $\mathbb{C}$ -линейного функционала  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{C}$  существует единственный такой вектор  $u \in W$ , что  $\varphi(w) = (w, u)$  для всех  $w \in W$ , причём этот вектор  $\mathbb{C}$ -полулинейно зависит от  $\varphi$ .

В частности, у любого базиса  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  эрмитова пространстве  $W$  имеется *эрмитово двойственный* базис  $\mathbf{u}^\times = (u_1^\times, \dots, u_n^\times)$ , состоящий из прообразов  $u_i^\times \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1}(u_i^*)$  ковекторов двойственного к  $\mathbf{u}$  базиса  $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$  в  $W^*$  и однозначно задаваемый соотношениями

$$(u_i, u_j^\times) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (15-19)$$

На матричном языке эти соотношения означают, что  $\mathbf{u}^t \mathbf{u}^\times = E$ . Поэтому матрица  $C_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times}$ , линейно выражающая базис  $\mathbf{u}^\times$  через базис  $\mathbf{u}$  по формуле  $\mathbf{u}^\times = \mathbf{u} C_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times}$ , удовлетворяет равенству

$$E = \mathbf{u}^t \mathbf{u}^\times = \mathbf{u}^t \mathbf{u} \bar{C}_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times} = G_{\mathbf{u}} \bar{C}_{\mathbf{u}\mathbf{u}^\times},$$

откуда  $(u_1^\times, \dots, u_n^\times) = (u_1, \dots, u_n) \bar{G}_{\mathbf{u}}^{-1}$ .

УПРАЖНЕНИЕ 15.6. Убедитесь, что  $u_i^{\times \times} = u_i$  для любого базиса  $u_1, \dots, u_n$ .

Ортонормальность базиса означает, что он совпадает со своим эрмитово двойственным.

Так как  $i$ -я координата любого вектора  $w \in W$  в базисе  $\mathbf{u}$  равна  $u_i^*(w) = (w, u_i^\times)$ , разложение вектора  $w$  по любому базису  $\mathbf{u}$  имеет вид

$$w = \sum_i e_i \cdot (w, e_i^\times). \quad (15-20)$$

**15.3.7. Ортогонал и ортогональная проекция.** В эрмитовом пространстве  $W$  у любого подпространства  $U \subset W$  имеется выделенное дополнительное подпространство

$$U^\perp = \{w \in W \mid \forall u \in U (u, w) = 0\} = \{w \in W \mid \forall u \in U (w, u) = 0\},$$

которое называется *ортогоналом* к  $U$ . Каждый вектор  $w \in W$  задаёт линейный функционал

$$h_w : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad u \mapsto (u, w).$$

Как мы видели выше, существует единственный такой вектор  $w_U \in U$ , что  $(u, w) = (u, w_U)$  для всех  $u \in U$ . Разность  $w_{U^\perp} \stackrel{\text{def}}{=} w - w_U$  лежит в  $U^\perp$ , так  $(u, w_{U^\perp}) = (u, w) - (u, w_U) = 0$  для всех  $u \in U$ . Полученное нами разложение  $w = w_U + w_{U^\perp}$ , в котором  $w_U \in U$ , а  $w_{U^\perp} \in U^\perp$ , единственно, так как для любого такого разложения и всех  $u \in U$  выполняются равенства  $(u, w) = (u, w_U)$ , однозначно задающие вектор  $w_U \in U$ . Таким образом,  $W = U \oplus U^\perp$ .

Комплексно линейный оператор  $\pi_U : W \rightarrow W$ ,  $w \mapsto w_U$ , проектирующий  $W$  на  $U$  вдоль  $U^\perp$  называется *ортогональным проектором*. Так как для любой пары эрмитово двойственных базисов  $u_1, \dots, u_m$  и  $u_1^\times, \dots, u_m^\times$  подпространства  $U$  выполняются равенства

$$w_U = \sum_i (w_U, u_i^\times) u_i = \sum_i \overline{(u_i^\times, w_U)} u_i = \sum_i \overline{(u_i^\times, w)} u_i = \sum_i (w, u_i^\times) u_i,$$

координатами ортогональной проекции  $w_U$  вектора  $w$  на  $U$  в любом базисе  $u_1, \dots, u_m$  подпространства  $U$  являются скалярные произведения  $(w, u_i^\times)$  вектора  $w$  с векторами эрмитова двойственного базиса.

Иначе ортогональная проекция  $w_U$  вектора  $w$  на  $U$  описывается как единственный вектор из  $U$ , на котором (нелинейный) функционал  $U \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \|u - w\|$ , расстояния до вектора  $w$  достигает своего абсолютного минимума на  $U$ . В самом деле, для всех  $v \in U$

$$\|w - (w_U + v)\|^2 = ((w - w_U) - v, (w - w_U) - v) = \|w - w_U\|^2 + \|v\|^2 \geq \|w - w_U\|^2,$$

и равенство равносильно тому, что  $v = 0$ .

**15.3.8. Угол между комплексными прямыми.** В евклидовом пространстве любые две пересекающиеся прямые  $L_u = \mathbb{R}u$  и  $L_w = \mathbb{R}w$  разбивают натянутую на них вещественную плоскость на две пары смежных вертикальных углов, и косинус наименьшего из них равен<sup>1</sup>

$$\cos \angle(L_u, L_w) = \frac{|(u, w)|}{\|u\| \cdot \|w\|} = |(u/\|u\|, w/\|w\|)| \in [0, \pi/2]. \quad (15-21)$$

Обратите внимание, что направляющие векторы единичной длины  $u/\|u\|$  и  $w/\|w\|$  на каждой прямой единственны с точностью до умножения на  $\pm 1$ . Абсолютная величина скалярного произведения в формуле (15-21) не зависит от выбора этих знаков и в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца принимает значения на отрезке  $[0, 1]$ .

В овеществлении  $W_{\mathbb{R}}$  эрмитова пространства  $W$  комплексные прямые

$$L_u = \mathbb{C}u \quad \text{и} \quad L_w = \mathbb{C}w$$

представляют собою двумерные вещественные плоскости, пересекающиеся в единственной точке  $0 \in W_{\mathbb{R}}$ . Их вещественная линейная оболочка  $V = L_u \oplus L_w$  является четырёхмерным вещественным пространством. Базисные векторы единичной длины  $e_u \in L_u$  и  $e_w \in L_w$  замечают в каждой из плоскостей единичную окружность с центром в нуле. Эти две окружности не пересекаются и лежат на компактной вещественной трёхмерной сфере  $S^3 = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$ . Поэтому евклидов угол  $\angle(e_u, e_w)$  ограничен и достигает своего минимального значения на некоторой паре векторов  $e_u, e_w$ . Этот минимальный угол называется *эрмитовым углом* между комплексными прямыми  $L_u, L_w$  и обозначается  $\angle(L_u, L_w)$ . Покажем, что он вычисляется по той же самой формуле (15-21), что и в евклидовом пространстве.

Пусть векторы  $u \in L_u$  и  $w \in L_w$  имеют длину 1. При умножении этих векторов на комплексные числа единичной длины  $|(u, w)|$  не меняется. Поэтому правая часть формулы (15-21) и сумма<sup>2</sup>  $g^2(u, w) + \omega^2(u, w) = |(u, w)|^2$  не зависят от выбора векторов  $u$  и  $w$  на единичных окружностях в  $L_u$  и  $L_w$ . Максимальное значение  $\cos^2 \angle(u, w) = g^2(u, w)$  получается при минимальном значении  $\omega^2(u, w)$ . Покажем, что последнее достигается и равно нулю. Так как форма  $\omega$  невырождена, для каждого вектора  $u \in L_u$  длины 1 вещественное подпространство  $u_\omega^\perp = \{v \in V \mid \omega(u, v) = 0\}$  имеет коразмерность 1 в  $V$  и тем самым нетривиально пересекает двумерное подпространство  $L_w \subset V$ . Поэтому существует такой вектор  $w \in L_w$  длины 1, что  $\omega^2(u, w) = 0$ , а  $g^2(u, w) = |(u, w)|^2$  максимально возможное. Для этих векторов формула (15-21) выдаёт минимально возможный евклидов угол между вещественными прямыми  $\mathbb{R}u$  и  $\mathbb{R}w$  в евклидовой структуре, задаваемой формой  $g$ .

<sup>1</sup> См. раздел 10.4.2 на стр. 137 лекции [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom\\_ru/2122/lec\\_10.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_10.pdf).

<sup>2</sup> Напомню, что  $g(u, w) = \operatorname{Re}(u, w)$ , а  $\omega(u, w) = \operatorname{Im}(u, w)$ , см. (15-8).

**Ответы и указания к некоторым упражнениям**

Упр. 15.1. Тензор  $(zc) \otimes v \in \mathbb{C} \otimes V$  трилинеен по  $z \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}, v \in V$ .

Упр. 15.2. Пусть  $w_1 = u_1 + iv_1, w_2 = u_2 + iv_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \overline{\beta_{\mathbb{C}}(w_1, w_2)} &= \beta_{\mathbb{C}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = (\beta(u_1, u_2) - \beta(v_1, v_2)) + i(\beta(u_1, v_2) + \beta(v_1, u_2)) = \\ &= (\beta(u_1, u_2) - \beta(v_1, v_2)) - i(\beta(u_1, v_2) + \beta(v_1, u_2)) = \beta_{\mathbb{C}}(u_1 - iv_1, u_2 - iv_2) = \beta_{\mathbb{C}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2). \end{aligned}$$

Упр. 15.3. Пусть  $w_1 = u_1 + iv_1, w_2 = u_2 + iv_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \overline{\beta_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)} &= \beta_{\mathbb{H}}(u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) = (\beta(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2)) + i(\beta(v_1, u_2) - \beta(u_1, v_2)) = \\ &= (\beta(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2)) + i(\beta(u_1, v_2) - \beta(v_1, u_2)) = \beta_{\mathbb{H}}(u_1 - iv_1, u_2 - iv_2) = \beta_{\mathbb{H}}(\bar{w}_1, \bar{w}_2). \end{aligned}$$

Упр. 15.5. Первое очевидно, второе вытекает из симметричности  $g$  и кососимметричности  $\omega$ , третье — из положительности формы  $g$ .