Задачи для подготовки к контрольной № 3

ПК3⋄1. Найдите сумму квадратов комплексных корней многочлена:
а) $x^3 - x^2 + 2x - 3$ **б)** $x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 1$.

ответ: $p_2 = e_1^2 - 2e_2$ в (а) равно -3, в (б) равно -1.

ПК3⋄2. Найдите (1) инвариантные множители (2) взаимные базисы в $\mathbb{Z}^3$ и его $\mathbb{Z}$-подмодуле, порождённом столбцами матрицы

а) $\begin{pmatrix} -80 & 42 & -46 & 36 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -40 & 19 & -22 & 17 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 0 \\ -30 & 2 & 14 & 5 \\ -32 & 0 & 12 & 4 \end{pmatrix}$.

ответ: в (а) инвариантные множители: 1, 5, взаимный базис в $\mathbb{Z}^3$ из столбцов матрицы $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, в (б) инвариантные множители: 1, 4, 12, взаимный базис в $\mathbb{Z}^3$ из столбцов матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ПК3⋄3. Найдите все целые решения систем уравнений

а) $\begin{cases} 185x_1 + 78x_2 - 30x_3 + 2x_4 = 45 \\ 273x_1 + 126x_2 - 42x_3 + 21x_4 = 105 \\ 299x_1 + 130x_2 - 50x_3 + 8x_4 = 47 \\ 124x_1 + 53x_2 - 22x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 65x_1 + 21x_2 + 9x_3 - 2x_4 = 7 \\ 64x_1 + 18x_2 + 12x_3 - 2x_4 = 2 \\ -47x_1 - 21x_2 + 2x_4 = -1 \\ -73x_1 - 30x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$.

в) $\begin{cases} -889x_1 - 283x_2 + 212x_3 + 62x_4 = 514 \\ -451x_1 - 153x_2 + 89x_3 + 29x_4 = 177 \\ -38x_1 - 7x_2 + 19x_3 + 4x_4 = 67 \\ 32x_1 + 15x_2 + 2x_3 - x_4 = 24 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} -208x_1 - 208x_2 + 116x_3 + 172x_4 = 28 \\ -11x_1 - 14x_2 + 7x_3 + 11x_4 = -1 \\ 31x_1 + 30x_2 - 17x_3 - 25x_4 = -5 \\ 113x_1 + 106x_2 - 61x_3 - 89x_4 = -21 \end{cases}$.

ответ: в (а) матрица $R_A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, приведённая матрица системы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 21 & 0 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, решения исходной системы: $\begin{pmatrix} -2z_1 + 7 & 6z_1 - 12 & 3z_1 + 11 & -4z_1 + 8 \end{pmatrix}$; в (б) матрица $R_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & -4 & 6 & 7 \\ -2 & -4 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$, приведённая матрица системы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, система не совместна; в (в) матрица $R_A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -1 \\ -2 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -9 & -11 & 5 \end{pmatrix}$, приведённая матрица системы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$, решения исходной системы: $\begin{pmatrix} -12 & 26 & -5 & -28 \end{pmatrix}$; в (г) матрица $R_A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 6 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 6 \\ 3 & -7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, приведённая матрица системы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, решения исходной системы: $\begin{pmatrix} 2z_1 + 2z_2 - 4 & 3z_1 + 6z_2 - 5 & 6z_1 + z_2 - 7 & 2z_1 + 9z_2 - 6 \end{pmatrix}$.

ПК3⋄4. Отщепляется ли прямым слагаемым $\mathbb{Z}$-подмодуль $L \subset \mathbb{Z}^3$, порождённый столбцами матрицы

а) $\begin{pmatrix} 18 & -18 & -27 & -6 \\ 12 & -4 & -1 & 0 \\ -57 & 37 & 43 & 9 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -98 & -17 & -38 & -8 \\ 33 & 7 & 13 & 3 \\ -46 & -9 & -18 & -4 \end{pmatrix}$, и если да, явно укажите в $\mathbb{Z}^3$ какой-нибудь дополнительный к L подмодуль.

ОТВЕТ: в (а) нет, т. к. инвариантные множители: 1, 3, и $\mathbb{Z}^3/L \simeq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/(3)$ имеет кручение; в (б) да, т. к. инвариантные множители: 1, 1, дополнительный подмодуль порождается третьим столбцом матрицы $\begin{pmatrix}-15 & 7 & 2\\ 5 & -2 & -1\\ -7 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

ПК3⋄5. Является ли $\mathbb{Z}$-линейная оболочка столбцов матрицы

а) $\begin{pmatrix}-335 & -59 & -151\\ 131 & 23 & 59\\ 40 & 7 & 18\end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix}488 & -284 & -108\\ 72 & -42 & -16\\ -236 & 137 & 52\end{pmatrix}$

множеством всех целых решений какой-нибудь системы линейных однородных уравнений с целыми коэффициентами на стандартные координаты (x_1, x_2, x_3) в $\mathbb{Z}^3$? Если да, напишите такую систему из минимально возможного числа уравнений, если нет, объясните, почему.

ОТВЕТ: в (а) линейная оболочка столбцов матрицы задаётся, например, уравнением $-x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0$ (матрица имеет ранг 2 и единичные инвариантные множители); в (б) нет: матрица имеет ранг 2 и инвариантные множители 1, -4.