

### Пространство с оператором

**АС9♦1.** Какова степень минимального многочлена квадратной матрицы ранга 1?

**АС9♦2.** Для приведённого многочлена  $f \in \mathbb{k}[t]$  найдите характеристический и минимальный многочлены оператора умножения на  $t : \mathbb{k}[t]/(f) \rightarrow \mathbb{k}[t]/(f)$  и покажите, что каждый перестановочный с умножением на  $t$  линейный оператор  $G : \mathbb{k}[t]/(f) \rightarrow \mathbb{k}[t]/(f)$  является оператором умножения на многочлен  $g(t) = G([1])$ .

**АС9♦3.** Существует ли оператор с характеристическим и минимальным многочленами

**а)**  $\chi(t) = (t^6 + 1), \mu(t) = (t^2 + 1)$  **б)**  $\chi(t) = (t - 1)^2(t - 2)^3, \mu(t) = (t - 1)(t - 2)$

**в)**  $\chi(t) = (t - 1)^5(t - 2)^5, \mu(t) = (t - 1)^2(t - 2)^3$ ? Если да, то приведите пример.

**АС9♦4.** Перечислите, с точностью до подобия, все рациональные матрицы с характеристическим многочленом **а)**  $(x - 2)^3$  **б)**  $(x - 3)^4$  **в)**  $x^4 - 1$  **г)**  $(x^4 - 1)^2$ . Какие из них диагонализуемы? Какие полупросты? У каких есть циклический вектор?

**АС9♦5.** Для сходящегося в окрестности точки  $\lambda \in \mathbb{C}$  ряда  $f \in \mathbb{C}[[z]]$  выразите элементы матрицы<sup>1</sup>  $f(J_n(\lambda))$  через значения  $f$  и его производных в точке  $\lambda$ .

**АС9♦6.** Есть ли циклический вектор у оператора  $\mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^4$  с матрицей  $\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$ ?

**АС9♦7.** Существует ли такая комплексная матрица  $A$ , что **а)**  $e^A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

**б)**  $e^A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & 5 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$  **в)**  $A^6 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 1 \\ -3 & -7 & -1 \\ 13 & 22 & 2 \end{pmatrix}$  **г)**  $A^5 = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 1 \\ -3 & -7 & -1 \\ 13 & 22 & 2 \end{pmatrix}$  **д)**  $A^6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 7 & 6 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ?

Если да, предъявите такую матрицу явно. Если нет, объясните почему.

**АС9♦8.** Вычислите: **а)**  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}^7$  **б)**  $\begin{pmatrix} -2 & -8 & -9 \\ -9 & -29 & -33 \\ 9 & 28 & 32 \end{pmatrix}^{11}$  **в)**  $\begin{pmatrix} -25 & 6 & -6 \\ -27 & 6 & -7 \\ 77 & -19 & 18 \end{pmatrix}^{2023}$ .

**АС9♦9.** Найдите минимальные многочлены и ЖНФ следующих матриц над полем  $\mathbb{C}$ :

**а)**  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$  **б)**  $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$  **в)**  $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$  **г)**  $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ .

**АС9♦10.** Найдите ЖНФ **а)** операторов  $\partial/\partial x$  и  $x \cdot \partial/\partial x$  на пространстве  $\mathbb{C}[x]_{\leq n}$  многочленов степени  $\leq n$  **б)** оператора  $\partial/\partial x$  на пространстве  $e^{cx}\mathbb{C}[x]_{\leq n}$  функций вида  $e^{cx}f(x)$ , где  $c \in \mathbb{C}$  фиксировано, а  $f \in \mathbb{C}[x]_{\leq n}$ .

**АС9♦11.** Найдите минимальные многочлены и элементарные делители следующих матриц

над полем  $\mathbb{F}_5$ : **а)**  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  **б)**  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  **в)**  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Какие из них диагонализуемы? Какие полупросты? У каких есть циклический вектор?

**АС9♦12\*.** Перечислите, с точностью до подобия, все такие матрицы  $A \in \text{Mat}_3(\mathbb{F}_3)$ , что  $A^4 = A$ .

**АС9♦13\*.** Перечислите классы подобных матриц в  $\text{Mat}_2(\mathbb{F}_p)$ ,  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$  и  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_p)$  для  $p = 2, 3, 5$ .

<sup>1</sup>Напомню, что  $J_n(\lambda) \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$  — это жорданова клетка с собственным числом  $\lambda \in \mathbb{k}$ .