Дроби и ряды

АС3⋄1. Чему равен коэффициент при $x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$ у $(x_1 + \dots + x_m)^n$? У какого из многочленов $(1 + x^2 - x^3)^{1000}$ или $(1 - x^2 + x^3)^{1000}$ больше коэффициент при x^{17}?

АС3⋄2. Найдите коэффициент при x^m у $\sum_{i=k}^{n}(1+x)^i$.

АС3⋄3. Пусть $(1 + x + x^2)^n = \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$. Найдите: **а)** $a_0a_1 - a_1a_2 + a_2a_3 - \dots - a_{2n-1}a_{2n}$ **б)** $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - \dots + (-1)^{n-1}a_{n-1}^2$ **в)** $\sum_{k\geqslant 0} a_{2k}$ **г)** $\sum_{k\geqslant 0} a_{2k+1}$.

АС3⋄4. Докажите для любого $f \in \Bbbk[x]$ степени $\deg f < n$ равенства:

а) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{f(\alpha_i)/g'(\alpha_i)}{x - \alpha_i}$, если $g(x) = (x - \alpha_1)\dots(x - \alpha_n)$ и все $\alpha_i \in \Bbbk$ различны

б) $\dfrac{f(x)}{(x-\alpha)^n} = \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{f^{(i)}(\alpha)/i!}{(x-\alpha)^{n-i}}$, где $f^{(i)} = \left(\frac{d}{dx}\right)^i f$.

АС3⋄5. Разложите на простейшие дроби следующие рациональные функции:
а) $(3x^2+x+1)/(-6x^3-7x^2+1)$ **б)** $(x^4+1)/(x^2+x-6)$ **в)** $(x^3-1)/(x^4-4x+6x^2-4x^3+1)$.

АС3⋄6. Явно разложите в ряды в $\mathbb{Q}[\![x]\!]$ все дроби из предыдущей задачи, а также функции:
а) $1/(1+x+x^2)$ **б)** $1/(1+x+x^2)^2$ **в)** $1/(2x^2-3x+1)$ **г)** $1/(x^4+2x^3-7x^2-20x-12)$
д) $\sqrt[3]{1+2x}$ **е)** $1/\sqrt{1-3x}$ **ж)** $\cos x \overset{\text{def}}{=} (e^{ix}+e^{-ix})/2$ **з)** $\sin x \overset{\text{def}}{=} (e^{ix}-e^{-ix})/(2i)$
и) $\operatorname{ch} x \overset{\text{def}}{=} (e^x+e^{-x})/2$ **к)** $\operatorname{sh} x \overset{\text{def}}{=} (e^x-e^{-x})/2$.

АС3⋄7. Найдите k-тый член последовательности a_k, если:
а) $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ и $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}$ при $k \geqslant 2$
б) $a_0 = 1$, $a_1 = -7$ и $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ при $k \geqslant 2$
в) $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ и $a_k = 4a_{k-1} - 4a_{k-2}$ при $k \geqslant 2$
г) $a_0 = -1/4$, $a_1 = -1/2$ и $a_k = -a_{k-1} - a_{k-2}$ при $k \geqslant 2$
д) $a_0 = 5$, $a_1 = 3$, $a_2 = 48$, $a_k = a_{k-1} + 8a_{k-2} - 12a_{k-3}$ при $k \geqslant 3$
е) $a_0 = 1$, $a_1 = -9$, $a_2 = 14$, $a_k = -a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3}$ при $k \geqslant 3$
ж) $a_0 = 1$, $a_1 = -3$, $a_2 = -29$ и $a_k = 9a_{k-1} - 26a_{k-2} + 24a_{k-3}$ при $k \geqslant 3$.

АС3⋄8. Пользуясь разложениями $(1-x)^{\pm 1/2}$ в $\mathbb{Q}[\![x]\!]$, вычислите:

а) $\binom{2k}{k} + \binom{2}{1}\binom{2k-2}{k-1} + \binom{4}{2}\binom{2k-4}{k-2} + \dots + \binom{2k-2}{k-1}\binom{2}{1} + \binom{2k}{k}$

б) $\binom{2k-2}{k-1} + \frac{1}{2}\binom{2}{1}\binom{2k-4}{k-2} + \frac{1}{3}\binom{4}{2}\binom{2k-6}{k-3} + \dots + \frac{1}{k-1}\binom{2k-4}{k-2}\binom{2}{1} + \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}$

в) $\frac{2^{2k-1}}{1} - \frac{2^{2k-3}}{2}\binom{2}{1} - \frac{2^{2k-5}}{3}\binom{4}{2} - \dots - \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}$

г) $\frac{1}{1\cdot(k-1)}\binom{2k-4}{k-2} + \frac{1}{2\cdot(k-2)}\binom{2}{1}\binom{2k-6}{k-3} + \frac{1}{3\cdot(k-3)}\binom{4}{2}\binom{2k-8}{k-4} + \dots$
$\dots + \frac{1}{(k-2)\cdot 2}\binom{2k-6}{k-3}\binom{2}{1} + \frac{1}{(k-1)\cdot 1}\binom{2k-4}{k-2}$

АС3⋄9. Верно ли, что для любого многочлена $p \in \Bbbk[x]$ ряд $\sum_{k\geqslant 0} p(k)x^k$ является рациональной функцией из $\Bbbk(x) \subset \Bbbk(\!(x)\!)$?

АС3⋄10*. Лежат ли ряды **а)** e^x **б)** $\ln(1+x)$ **в)** $\sqrt{1+x}$ в подполе $\mathbb{Q}(x) \subset \mathbb{Q}(\!(x)\!)$?

АС3⋄11. Найдите первую дюжину коэффициентов ряда Тодда $\operatorname{td}(x) = x/(1-e^{-x})$ и вычислите $\operatorname{td}(x) - \operatorname{td}(-x)$.

АС3⋄12. Найдите $\operatorname{td}(d/dx)\, x^n$ и $\sum_{k=0}^{m} k^n$ для всех $0 \leqslant n \leqslant 6$.