ПРОГРАММА ПЕРВОГО СЕМЕСТРА

КУРСА «АЛГЕБРА – I»

интенсивность занятий: 1 пара лекций + 1,5 пары упражнений в неделю
темы, набранные *курсивом* могут стать необязательными или упраздниться вовсе

ПЕРВАЯ ЧЕТВЕРТЬ (8 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Определение поля, коммутативного кольца и абелевой группы. Примеры: числа, $\mathbb{F}_2$, многочлены, геометрические векторы, аддитивная и мультипликативная группы поля. Рабочий пример: кольцо $\mathbb{Z}$ — делимость, НОД и НОК, алгоритм Евклида – Гаусса, взаимная простота, свойства взаимно простых элементов, факториальность.

НЕДЕЛЯ 2. Второй рабочий пример: кольца и поля $\mathbb{Z}/(n)$ — таблицы умножения, делители нуля, нильпотенты, обратимые элементы, теоремы Ферма и Эйлера, свойства простых полей $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

НЕДЕЛЯ 3. Гомоморфизмы абелевых групп и коммутативных колец, непустой слой является сдвигом ядра. Приложения: квадраты в поле $\mathbb{F}_p$, простое подполе и гомоморфизм Фробениуса. Прямые произведения абелевых групп и коммутативных колец. Китайская теорема об остатках (КТО), явное отыскание чисел с заданными остатками.

НЕДЕЛЯ 4. Многочлены: «деление столбиком» (не только над полем); нод, нок, алгоритм Евклида, взаимная простота, неприводимость (над полем); факториальность кольца $\Bbbk[x]$. Корни и общие корни нескольких многочленов. Интерполяционный многочлен Лагранжа. КТО для многочленов.

НЕДЕЛЯ 5. Кольца и поля вычетов $\Bbbk[x]/(f)$, отыскание обратных элементов. Рабочий пример: поле $\mathbb{C}$. *Квадратичный закон взаимности.*

КОНТРОЛЬНАЯ № 1: НОД, НОК и КТО в $\mathbb{Z}$ и $\Bbbk[x]$, примитивные расширения полей, поле $\mathbb{C}$.

НЕДЕЛЯ 6. Конечные поля. Конечная мультипликативная подгруппа в поле циклическая. *Классификация конечных полей.*

НЕДЕЛЯ 7. Формальные степенные ряды и алгебраические операции над ними, обращение ряда с обратимым свободным членом. Дифференциальное исчисление, приложение: кратные корни многочленов, сепарабельность. Экспонента и логарифм, бином с произвольным показателем. *Продвинутые примеры: числа Каталана, действие $\mathbb{Q}[\![d/dt]\!]$ на $\mathbb{Q}[t]$ и суммирование степеней.*

НЕДЕЛЯ 8. Кольца частных, поле частных целостного кольца. Примеры: поле $\mathbb{Q}$, поле рациональных функций $\Bbbk(t)$ над полем $\Bbbk$, поле рядов Лорана $\Bbbk(\!(t)\!)$, разложение рациональных функций в сумму простейших дробей и в ряд Лорана. Приложение: решение линейных рекуррентных уравнений.

КОНТРОЛЬНАЯ № 2: рациональные функции и степенные ряды (в сессию после 1-го модуля).

ВТОРАЯ ЧЕТВЕРТЬ (8 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Идеалы и факторкольца. *Нётеровы кольца, теорема Гильберта о базисе идеала.* Простые и максимальные идеалы. Простые и неприводимые элементы кольца. Области главных идеалов, рабочий пример: евклидовы кольца. Факториальные кольца, факториальность области главных идеалов.

НЕДЕЛЯ 2. Лемма Гаусса и факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Разложение на множители многочленов с целыми коэффициентами, критерии неприводимости.

НЕДЕЛЯ 3. Модули над коммутативными кольцами: подмодули, фактормодули, дополнительные подмодули и неразложимость, гомоморфизмы и модули гомоморфизмов. Ранг свободного модуля. Задание модулей образующими и соотношениями. Основной рабочий пример: $\mathbb{Z}$-модули.

НЕДЕЛЯ 4. Матричный формализм: умножение матриц, как преобразуются строки/столбцы матрицы при умножении слева/справа на заданную матрицу. Матрицы переходов, матрицы гомоморфизмов. Алгебра матриц, таблица умножения базисных матриц E_{ij}.

НЕДЕЛЯ 5. Нильпотентные и обратимые матрицы, обращение верхней унитреугольной матрицы. Рабочий пример: модуль симметрических многочленов и теорема об элементарных симметрических функциях.

НЕДЕЛЯ 6. Определитель и обратимые матрицы размера 2×2, элементарные преобразования строк/столбцов, задаваемые левым/правым умножением на обратимые 2×2-матрицы. Метод Гаусса над областью главных идеалов: приведение матрицы к нормальной форме Смита. Основной рабочий пример: $\mathbb{Z}$-модули.

НЕДЕЛЯ 7. Строение конечно порождённых модулей над областью главных идеалов: теорема о взаимных базисах свободного модуля и его подмодуля, инвариантные множители и элементарные делители, разложение модуля в сумму неразложимых циклических подмодулей, независимость инвариантных множителей от выбора взаимных базисов. Основной рабочий пример: $\mathbb{Z}$-модули.

КОНТРОЛЬНАЯ № 3: разложение на множители и метод Гаусса.

НЕДЕЛЯ 8. Оставлена про запас.

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ЗА 1-Й СЕМЕСТР.