

Пространства с оператором

- АЛ7♦1.** Всякая ли квадратная матрица сопряжена своей транспонированной?
- АЛ7♦2.** Пусть $m \geq n$. Для любых линейных отображений $F : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^m$ и $G : \mathbb{k}^m \rightarrow \mathbb{k}^n$ над любым полем \mathbb{k} вычислите отношение характеристических многочленов $\chi_{FG}(t)/\chi_{GF}(t)$.
- АЛ7♦3.** Перечислите все импликации между следующими свойствами линейного оператора $F : V \rightarrow V$ над любым полем \mathbb{k} : а) F есть циклический вектор б) $\mu_F = \chi_F$ в) $Z_F \stackrel{\text{def}}{=} \{G \in \text{End}(V) \mid FG = GF\}$ совпадает с $\mathbb{k}[F] \stackrel{\text{def}}{=} \{h(F) \mid h \in \mathbb{k}[t]\}$.
- АЛ7♦4.** Пусть линейный оператор L над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} перестановочен со всеми операторами из $Z_F \stackrel{\text{def}}{=} \{G \in \text{End}(V) \mid FG = GF\}$. Верно ли, что $L \in \mathbb{k}[F]$?
- АЛ7♦5.** Вычислите $\text{Hom}_{\mathbb{k}[x]}(\mathbb{k}[x]/(f), \mathbb{k}[x]/(g))$ и его размерность.
- АЛ7♦6.** Найдите ЖНФ квадрата $J_m^2(\lambda)$ жордановой клетки размера $m \times m$ с собственным числом а) $\lambda \neq 0$ б) $\lambda = 0$.
- АЛ7♦7.** Существуют ли $(n + 1)$ -мерные векторные подпространства в $\text{End}(\mathbb{k}^n)$, состоящие из попарно перестановочных диагонализуемых операторов $\mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$?
- АЛ7♦8.** Покажите, что любые два коммутирующих линейных оператора $F, G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ в некотором базисе можно одновременно записать верхнетреугольными матрицами.
- АЛ7♦9*** (лемма Барта). Докажите, что над алгебраически замкнутым полем любые два линейных оператора F, G с $\text{rk}(FG - GF) = 1$ имеют общий собственный вектор.
- АЛ7♦10.** Равносильна ли нильпотентность линейного оператора F над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} тому, что $\text{tr } F^k = 0$ при всех $1 \leq k \leq n$, если а*) $\text{char } \mathbb{k} = 0$ б) $\text{char } \mathbb{k} \neq 0$?
- АЛ7♦11.** Пусть операторы F и G таковы, что $FG - GF = G$. Верно ли, что G нильпотентен?
- АЛ7♦12.** Всюду плотны ли матрицы с циклическим вектором а) в $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ б) в $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$?
- АЛ7♦13*** (принцип расщепления). Покажите, что: а) диагонализуемые операторы всюду плотны в $\text{End}(\mathbb{C}^n)$ б) если утверждение про матрицу A записывается системой полиномиальных соотношений с целыми коэффициентами на матричные элементы a_{ij} , то из его справедливости для какого-нибудь всюду плотного множества матриц A в $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ или в $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ вытекает, что оно верно для всех матриц над любым коммутативным кольцом в) если система полиномиальных соотношений на a_{ij} из предыдущего пункта не меняется при заменах $A \mapsto CAC^{-1}$ с произвольным¹ $C \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, то её достаточно проверить для диагональных комплексных матриц г) чтобы доказать тождество Гамильтона – Кэли $\chi_A(A) = 0$ для всех матриц A над любым коммутативным кольцом, его достаточно проверить для диагональных комплексных матриц (и сделайте эту проверку).
- АЛ7♦14***. Свяжем с матрицей $A \in \text{Mat}_n(K)$, где K — любое коммутативное кольцо, линейные отображения $L_A, R_A, \text{ad}_A, \text{Ad}_A : \text{Mat}_n(K) \rightarrow \text{Mat}_n(K)$, заданные правилами а) $L_A(X) = AX$ б) $R_A(X) = XA$ в) $\text{ad}_A(X) = AX - XA$ г) $\text{Ad}_A(X) = AXA^{-1}$ (тут предполагается, что A обратима). С помощью принципа расщепления найдите их следы и определители.
- АЛ7♦15***. Те же вопросы про линейные эндоморфизмы, которые матрица A задаёт на пространстве а) грассмановых б) обычных однородных многочленов степени 2 от строки переменных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ по правилу $f(\xi) \mapsto f(\xi A)$.

¹Т. е. является утверждением не про матрицу A , но про линейный оператор $\alpha : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ с матрицей A в некотором базисе.

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			
7			
8			
9			
10а			
б			
11			
12а			
б			
13а			
б			
в			
г			
14а			
б			
в			
г			
15а			
б			