

### Многочлены и комплексные числа

**АЛ2♦1 (минимальный многочлен).** Пусть поле  $\mathbb{k}$  является подполем поля  $\mathbb{K}$ . Число  $\alpha \in \mathbb{K}$  называется *алгебраическим* над  $\mathbb{k}$ , если  $f(\alpha) = 0$  для некоторого многочлена  $f \in \mathbb{k}[x]$ . Приведённый многочлен наименьшей степени с таким свойством называется *минимальным многочленом* алгебраического числа  $\alpha \in \mathbb{K}$  над полем  $\mathbb{k}$ . Докажите, что в  $\mathbb{k}[x]$  минимальный многочлен неприводим и делит все многочлены с корнем  $\alpha$ .

**АЛ2♦2.** Найдите минимальный многочлен числа **а)**  $2 - 3i \in \mathbb{C}$  над  $\mathbb{R}$  **б)**  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R}$  над  $\mathbb{Q}$ .

**АЛ2♦3.** Пусть  $\mathbb{k}$  — поле характеристики  $p > 0$  и  $a \in \mathbb{k}$ . Верно ли, что многочлен  $x^p - a$  либо неприводим в  $\mathbb{k}[x]$ , либо имеет  $p$ -кратный корень в  $\mathbb{k}$ ?

**АЛ2♦4\*.** Над любым ли конечным полем  $\mathbb{k}$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$  имеется неприводимый в  $\mathbb{k}[x]$  многочлен степени  $n$ ?

**АЛ2♦5.** Выражаются ли в радикалах вещественные и мнимые части корней квадратного трёхчлена из  $\mathbb{C}[x]$  через вещественные и мнимые части его коэффициентов?

**АЛ2♦6\*.** Покажите, что трёхчлен  $f(x) = x^3 + px + q \in \mathbb{R}[x]$  тогда и только тогда имеет три вещественных корня, когда его дискриминант<sup>1</sup> положителен, и в этом случае подходящая замена  $x = ct$ , где  $c \in \mathbb{R}$ , приводит уравнение  $f(x) = 0$  к виду  $4t^3 - 3t = a$ , где  $|a| \leq 1$ , а его корни выражаются через  $\arccos a$ .

**АЛ2♦7.** Для всех  $n, s \in \mathbb{N}$  вычислите в поле  $\mathbb{C}$  **а)** сумму **б)** произведение  $s$ -тых степеней всех корней  $n$ -той степени из 1.

**АЛ2♦8.** Покажите, что  $\sin mx / \sin x$  при нечётном  $m \in \mathbb{N}$  является многочленом от  $\sin^2 x$  и найдите степень, корни и старший коэффициент этого многочлена.

**АЛ2♦9\* (эйлеровы разложения).** При помощи предыдущей задачи докажите тождества

$$\text{а) } \frac{\sin(mx)}{\sin x} = (-4)^{\frac{m-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{m-1}{2}} \left( \sin^2 x - \sin^2 \left( \frac{2\pi j}{m} \right) \right) \quad \text{б) } (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin(mx) = 2^{m-1} \prod_{j=0}^{m-1} \sin \left( x + \frac{2\pi j}{m} \right)$$

**АЛ2♦10 (квадратичная взаимность по Эйзенштейну).** Зафиксируем простое  $p \in \mathbb{N}$ . Число

$$\left( \frac{n}{p} \right) \stackrel{\text{def}}{=} [n]_p^{(p-1)/2} = \begin{cases} 1 & \text{если } [n] \text{ ненулевой квадрат в } \mathbb{F}_p \\ 0 & \text{если } [n] = [0] \text{ в } \mathbb{F}_p \\ -1 & \text{если } [n] \text{ не квадрат в } \mathbb{F}_p \end{cases}$$

называется *символом Лежандра* числа  $n$  по модулю  $p$ .

**а)** Докажите, что  $\left( \frac{mn}{p} \right) = \left( \frac{m}{p} \right) \left( \frac{n}{p} \right)$ . **б)** Вычислите  $\sum_{n=1}^{p-1} \left( \frac{n}{p} \right)$ .

**в\*)** Сравните знак  $\left( \frac{m}{p} \right)$  со знаком произведения  $\prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \sin(2\pi mj/p) / \sin(2\pi j/p)$ , разложите в нём каждое отношение синусов по формулам из **зад. АЛ2♦9** и докажите для простых натуральных  $p, q > 2$  *квадратичный закон взаимности*:  $\left( \frac{p}{q} \right) \cdot \left( \frac{q}{p} \right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$ .

**г\*)** Найдите  $\left( \frac{43}{179} \right)$ .

**АЛ2♦11 (учите анализ).** Для произвольного  $f \in \mathbb{C}[x]$  положительной степени докажите, что:

**а)** для любого  $c \in \mathbb{R}$  найдётся такой круг  $D \subset \mathbb{C}$ , что  $|f(z)| > c$  для всех  $z \notin D$

**б\*)** в любом круге  $D \subset \mathbb{C}$  есть такая точка  $z_0 \in D$ , что  $|f(z)| \geq |f(z_0)|$  для всех  $z \in D$

**в\*)** существует такое  $z_0 \in \mathbb{C}$ , что  $|f(z)| \geq |f(z_0)|$  для всех  $z \in \mathbb{C}$

**г\*)** если  $f(z_0) \neq 0$ , то вблизи  $z_0$  найдётся такое  $z \in \mathbb{C}$ , что  $|f(z)| < |f(z_0)|$

**д\*)**  $f$  имеет корень в  $\mathbb{C}$ .

<sup>1</sup>Дискриминантом приведённого многочлена  $f(x) = \prod_i (x - \alpha_i)$  называется произведение  $\prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ .

Персональный табель \_\_\_\_\_  
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 2 (16.09.2024)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
8			
9а			
б			
10а			
б			
в			
г			
11а			
б			
в			
г			
д			