

§14. Тензорная алгебра векторного пространства

Всюду в этом параграфе через V обозначается векторное пространство над произвольным полем $\mathbb{K}$.

14.1. Тензорные степени, свёртки и полилинейные формы. Тензорное произведение n экземпляров векторного пространства V с самим собой $V^{\otimes n} = V \otimes \dots \otimes V$ называется n -той *тензорной степенью* пространства V . Мы по определению полагаем $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$ и $V^{\otimes 1} = V$. Из универсального свойства тензорного произведения¹ вытекает, что двойственное к $V^{\otimes n}$ пространство $V^{\otimes n*}$ линейных функций $V^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{K}$ канонически изоморфно пространству n -линейных форм на V , т. е. отображений $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}$, линейных по каждому из n аргументов. С другой стороны, между пространствами $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n} = V^* \otimes \dots \otimes V^*$ имеется каноническое билинейное спаривание, сопоставляющее разложимым тензорам $v = v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\xi = \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ их *полную свёртку*

$$\langle v, \xi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n \langle v_i, \xi_i \rangle, \quad (14-1)$$

где $\langle v_i, \xi_i \rangle = \xi_i(v_i) = \text{ev}_{v_i}(\xi_i) \in \mathbb{K}$ — результат вычисления ковектора ξ_i на векторе v_i . Так как правая часть (14-1) полилинейна по всем v_i и ξ_i , правило $v \mapsto \langle v, \xi \rangle$ при фиксированном ξ корректно задаёт линейный функционал $V^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{K}$, который полилинейно зависит от ξ_i . Сопоставляя разложимому тензору $\xi \in V^{*\otimes n}$ такой функционал, мы получаем корректно определённое линейное отображение

$$V^{*\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n*}, \quad \xi \mapsto (v \mapsto \langle \xi, v \rangle). \quad (14-2)$$

Предложение 14.1

Для конечномерного пространства V линейное отображение (14-2) является изоморфизмом.

Доказательство. Выберем двойственные базисы $e_1, \dots, e_n$ в V и $x_1, \dots, x_n$ в V^* и рассмотрим в $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$ соответствующие базисы из тензорных мономов $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$ и $x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_n}$. Из соотношений $\langle x_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ и формулы (14-1) очевидно, что это двойственные базисы. $\square$

Следствие 14.1

Для конечномерного пространства V пространство $V^{*\otimes n}$ канонически изоморфно пространству n -линейных форм $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}$. При этом изоморфизме каждый разложимый тензор $\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ переходит n -линейную форму $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \prod_{i=1}^n \langle \xi_i, v_i \rangle$.

Доказательство. Это композиция изоморфизма (14-2) с упомянутым выше изоморфизмом пространства $V^{\otimes n*}$ с пространством n -линейных форм $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}$, вытекающим из универсального свойства тензорного произведения¹. $\square$

14.1.1. Частичные свёртки. Фиксируем два инъективных, но не обязательно монотонных отображения $I: \{1, \dots, m\} \hookrightarrow \{1, \dots, p\}$ и $J: \{1, \dots, m\} \hookrightarrow \{1, \dots, q\}$, которые будем записывать последовательностями из m не повторяющихся индексов $I = (i_1, \dots, i_m)$ и $J = (j_1, \dots, j_m)$,

¹См. предл. 13.1 на стр. 213.

¹Обратите внимание, что этот изоморфизм имеет место для любых, в том числе и бесконечномерных векторных пространств

где $i_v = I(v)$, $j_v = J(v)$. Линейный оператор $c_J^I: V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow V^{*\otimes(p-m)} \otimes V^{\otimes(q-m)}$, сворачивающий i_v -й сомножитель произведения $V^{*\otimes p}$ с j_v -м сомножителем произведения $V^{\otimes q}$ для каждого $v = 1, \dots, m$ и оставляющий все остальные сомножители в том же порядке:

$$(\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_p) \otimes (v_1 \otimes \dots \otimes v_q) \mapsto \left(\prod_{v=1}^m \langle \xi_{i_v}, v_{j_v} \rangle \right) \cdot \left(\bigotimes_{i \notin I} \xi_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{j \notin J} v_j \right), \quad (14-3)$$

называется *частичной свёрткой* по индексам I, J . Подчеркнём, что разные отображения I, J обычно задают разные частичные свёртки.

ПРИМЕР 14.1 (СВЕРТКА ВЕКТОРА С ПОЛИЛИНЕЙНОЙ ФОРМОЙ)

Интерпретируем n -линейную форму $\varphi: V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ при помощи задаваемого полной свёрткой изоморфизма (14-2) как тензор $\varphi \in V^{*\otimes n}$ и свернём его по первому тензорному сомножителю с вектором $v \in V$. Получится тензор из $V^{*\otimes(n-1)}$, задающий $(n-1)$ -линейную форму $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$, которая называется *внутренним произведением* вектора v с полилинейной формой φ и обозначается $i_v \varphi$ или $v_{\perp} \varphi$. Покажем, что для всех $w_1, \dots, w_{n-1} \in V$

$$i_v \varphi(w_1, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, \dots, w_{n-1}).$$

Так как равенство линейно по φ , его достаточно проверить на линейно порождающих $V^{*\otimes n}$ разложимых тензорах $\varphi = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \in V^{*\otimes n}$, а для них оно верно:

$$i_v \varphi(w_1, \dots, w_{n-1}) = \langle \varphi_1, v \rangle \cdot \prod_{v \geq 2} \langle \varphi_v, w_v \rangle = \varphi(v, w_1, \dots, w_{n-1}).$$

14.1.2. Линейный носитель тензора. Пусть $t \in V^{\otimes n}$. Пересечение всех таких векторных подпространств $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$, называется *линейным носителем* тензора t и обозначается $\text{supp } t \subset V$. Иначе носитель можно охарактеризовать как такое наименьшее и по включению, и по размерности подпространство $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$. Эквивалентность всех этих описаний вытекает из равенства $U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n} = (U \cap W)^{\otimes n}$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.1. Докажите это равенство.

Размерность носителя называется *рангом* тензора и обозначается $\text{rk } t \stackrel{\text{def}}{=} \dim \text{supp } t$. Тензор t называется *вырожденным*, если $\text{rk } t < \dim V$. Это означает, что некоммутативный многочлен t «зависит» от меньшего, чем $\dim V$, числа «переменных», и лишние переменные можно убрать подходящей линейной заменой координат. Например, если $\dim \text{supp } t = 1$, то $t = c \cdot v^{\otimes n}$ для некоторых $c \in \mathbb{k}$ и $v \in V$.

Явно указать векторы, линейно порождающие $\text{supp } t$ над $\mathbb{k}$ можно при помощи частичных свёрток. Для каждой последовательности $J = (j_1, \dots, j_{n-1})$ из $n-1$ не повторяющихся индексов¹ $1 \leq j_v \leq n$ обозначим через

$$t_J: V^{*\otimes(n-1)} \rightarrow V, \quad \xi \mapsto c_{j_1, \dots, j_{n-1}}^{1, \dots, (n-1)}(\xi \otimes t), \quad (14-4)$$

полную свёртку с тензором t , которая спаривает v -й сомножитель произведения $V^{*\otimes(n-1)}$ с j_v -м сомножителем тензора t для всех $1 \leq v \leq (n-1)$. Если записать t в виде суммы разложимых тензоров вида $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$, то результатом такой свёртки будет линейная комбинация векторов v_i с $i \notin J$. Очевидно, что она лежит в $\text{supp } t$.

¹Ещё раз подчеркнём, что индексы не обязаны возрастать или убывать.

ТЕОРЕМА 14.1

Пространство $\text{supp } t$ линейно порождается образами всех свёрток (14-4).

Доказательство. Обозначим $\text{supp } t$ через $W \subset V$. Достаточно доказать, каждая линейная форма $\xi \in V^*$, аннулирующая образы всех свёрток (14-4), аннулирует подпространство W . Предположим противное: пусть ковектор $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W , но аннулирует $t_J(V^{*\otimes(n-1)})$ для всех J . Выберем в V^* базис $\xi_1, \dots, \xi_d$, в котором $\xi_1 = \xi$ и ограничения ковекторов $\xi_1, \dots, \xi_k$ на W образуют базис в W^* . Обозначим через $w_1, \dots, w_k$ двойственный базис пространства W и разложим t по этому базису. Значение $\xi(t_J(\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n-1}}))$ равно полной свёртке тензора t с базисным тензорным мономом $\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n-1}} \otimes \xi_1$ по всем n тензорным сомножителям в том порядке, который предписан последовательностью¹ J . Получающееся в результате этой свёртки число равно коэффициенту, с которым соответствующий двойственный тензорный моном¹ от базисных векторов w_i входит в разложение t . Подбирая надлежащие J , можно получить коэффициент при любом содержащем w_1 мономе, входящем в разложение t . Тем самым, все они нулевые, т. е. $w_1 \notin \text{supp } t$ вопреки нашему выбору. $\square$

14.2. Тензорная, симметрическая и внешняя алгебры. Тензорное умножение векторов задаёт на бесконечной прямой сумме $TV \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$ структуру ассоциативной некоммутативной градуированной¹ $\mathbb{k}$ -алгебры. Она называется *тензорной* или *свободной ассоциативной* алгеброй векторного пространства V . Если зафиксировать в V базис $E \subset V$, то по [предл. 13.3](#) на стр. 214 мономом $1 \in V^{\otimes 0}$ и всевозможные тензорные мономы

$$e_1 \otimes \dots \otimes e_m, \quad \text{где } e_i \in E, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (14-5)$$

составят базис векторного пространства TV . Умножение мономов (14-5) заключается в приписывании их друг к другу через знак $\otimes$, мономом 1 служит единицей. Таким образом, фиксация базиса E в V отождествляет алгебру TV с алгеброй многочленов от не коммутативных переменных $e \in E$. Каждое прямое слагаемое $V^{\otimes n} \subset TV$ при этом отождествляется с пространством однородных многочленов степени n . Вложение векторного пространства V в алгебру V в качестве подпространства $V^{\otimes 1} \subset TV$ обозначается $\iota: V \hookrightarrow TV$ и обладает следующим универсальным свойством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.2 (УНИВЕРСАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ)

Для любого линейного отображения $f: V \rightarrow A$ пространства V в ассоциативную $\mathbb{k}$ -алгебру A существует единственный такой гомоморфизм $\mathbb{k}$ -алгебр $\alpha: TV \rightarrow A$, что $f = \alpha \circ \iota$. Другими словами, гомоморфизмы $\mathbb{k}$ -алгебр $TV \rightarrow A$ находятся в канонической биекции с линейными отображениями $V \rightarrow A$.

Доказательство. Искомый гомоморфизм α должен переводить каждый разложимый тензор

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in TV$$

¹Т. е. j_v -й сомножитель тензора t сворачивается с ξ_{i_v} при $1 \leq v \leq n-1$, а оставшийся в t сомножитель с номером $\{1, \dots, n\} \setminus J$ сворачивается с ξ_1 .

¹ j_v -й множитель этого монома равен w_{i_v} при $1 \leq v \leq n-1$, а оставшийся сомножитель с номером $\{1, \dots, n\} \setminus J$ равен w_1 .

¹Алгебра Анад коммутативным кольцом K называется *градуированной*, если она является прямой суммой K -модулей $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ и для всех k, m произведение $A_k A_m \subset A_{k+m}$.

в произведение $f(v_1) \dots f(v_n) \in A$. Так как это произведение линейно по каждому v_i , отображения $\alpha_n : v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto f(v_1) \dots f(v_n)$ корректно задают линейное отображение $\alpha : TV \rightarrow A$ переводящее конечную сумму $\sum_k t_k$ однородных тензоров $t_k \in V^{\otimes k}$ в сумму $\sum_k \alpha_k(t_k) \in A$, где $\alpha_0 : V^0 \rightarrow A$ переводит единицу в единицу. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 14.2. Убедитесь, что $\mathbb{k}$ -алгебра TV вместе с вложением $\iota : V \hookrightarrow TV$ определяются своим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма $\mathbb{k}$ -алгебр, перестановочного с вложением ι .

14.2.1. Идеалы в некоммутативном кольце. В некоммутативном кольце R бывают идеалы трёх типов. Подкольцо $I \subset R$ называется *левым идеалом*, если $xa \in I$ для всех $a \in I, x \in R$. Симметричным образом, $I \subset R$ называется *правым идеалом*, если $ax \in I$ при любых $a \in I$ и $x \in R$. Идеал $I \subset R$ называется *двусторонним*, если он одновременно и левый, и правый. Иначе двусторонние идеалы можно охарактеризовать как ядра гомоморфизмов (некоммутативных) колец. Действительно, если элемент $a \in R$ аннулируется гомоморфизмом $\varphi : R \rightarrow S$, то для любых $x, y \in R$ выполняется равенство $\varphi(xay) = \varphi(x)\varphi(a)\varphi(y) = 0$. Наоборот, если аддитивная подгруппа $I \subset R$ является двусторонним идеалом, то правило $[a][b] \stackrel{\text{def}}{=} [ab]$ корректно задаёт на аддитивной абелевой фактор группе¹ R/I умножение, ибо для любых $x, y \in I$

$$(a + x)(b + y) = ab + (ax + xb + xy) \equiv ab \pmod{I}$$

(обратите внимание, что для одностороннего идеала последнее сравнение может не имеет места). Относительно такого умножения фактор R/I становится кольцом, а аддитивный гомоморфизм факторизации $R \twoheadrightarrow R/I$ — гомоморфизмом колец с ядром I .

Из теоремы о строении гомоморфизма групп¹ вытекает, что каждый гомоморфизм колец $\varphi : R \rightarrow S$ является композицией эпиморфизма факторизации $R \twoheadrightarrow R/\ker \varphi \simeq \text{im } \varphi$ и вложения $R/\ker \varphi \simeq \text{im } \varphi \hookrightarrow S$.

Алгебры обычных и грассмановых многочленов являются факторами тензорной алгебры по двусторонним идеалам, порождённым соотношениями *коммутирования* и *антикоммутирования*.

14.2.2. Симметрическая алгебра. Обозначим через $\mathcal{I}_{\text{com}} \subset TV$ двусторонний идеал, порождённый всевозможными разностями $u \otimes w - w \otimes u \in V \otimes V$, где $u, w \in V$. Он состоит из конечных линейных комбинаций тензоров, которые можно получить умножая эти разности слева и справа на любые элементы из TV и является прямой суммой однородных компонент:

$$\mathcal{I}_{\text{com}} = \bigoplus_{n \geq 2} (\mathcal{I}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n}),$$

где каждое пересечение $\mathcal{I}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n}$ линейно порождается разностями вида

$$(\dots \otimes v \otimes w \otimes \dots) - (\dots \otimes w \otimes v \otimes \dots), \quad (14-6)$$

и обозначенные многоточиями соответственные фрагменты произведений одинаковы. Фактор алгебра $SV \stackrel{\text{def}}{=} TV / \mathcal{I}_{\text{com}}$ называется *симметрической* или *свободной коммутативной* алгеброй пространства V . Умножение, индуцированное в ней тензорным произведением векторов, называется *коммутативным умножением* и обозначается точкой, которую, как правило, опускают.

¹См. [опр. 10.2](#) на стр. 186.

¹См. [сл. 10.4](#) на стр. 186.

Как векторное пространство симметрическая алгебра является прямой суммой своих однородных компонент: $SV = \bigoplus_{n \geq 0} S^n V$, где $S^n V \stackrel{\text{def}}{=} V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n})$. Пространство $S^n V$ называется n -й симметрической степенью пространства V и по построению порождается коммутативными произведениями $v_1 \dots v_n$, где $v_i \in V$. Обратите внимание, что $S^0 V = \mathbb{k}$ и $S^1 V = V$. Включение пространства V в алгебру SV в качестве прямого слагаемого $S^1 V$ обозначается $\iota : V \hookrightarrow SV$ и обладает универсальным свойством, аналогичным [предл. 14.2](#).

УПРАЖНЕНИЕ 14.3 (УНИВЕРСАЛЬНОЕ СВОЙСТВО АЛГЕБРЫ SV). Убедитесь, что для любого линейного отображения $f : V \rightarrow C$ пространства V в произвольную коммутативную $\mathbb{k}$ -алгебру C имеется единственный такой гомоморфизм $\mathbb{k}$ -алгебр $\tilde{f} : SV \rightarrow C$, что $f = \tilde{f} \circ \iota$, причём вложение $\iota : V \hookrightarrow SV$ определяются этим свойством однозначно с точностью до единственного перестановочного s изоморфизма $\mathbb{k}$ -алгебр.

Для любого базиса $E \subset V$ алгебра $\mathbb{k}[E]$ многочленов от переменных $e \in E$ и вложение $V \hookrightarrow \mathbb{k}[E]$ в качестве подпространства многочленов степени 1 тоже обладает универсальным свойством из [упр. 14.3](#).

УПРАЖНЕНИЕ 14.4. Убедитесь, что для любой коммутативной алгебры C имеется каноническая биекция между отображениями множеств $E \rightarrow C$ и гомоморфизмами $\mathbb{k}$ -алгебр $\mathbb{k}[E] \rightarrow C$.

Мы заключаем, что для каждого базиса $E \subset V$ существует единственный изоморфизм алгебр $\mathbb{k}[E] \simeq SV$, переводящий каждый базисный моном $e_1^{m_1} \dots e_k^{m_k} \in \mathbb{k}[E]$ в коммутативное произведение $e_1^{m_1} \dots e_k^{m_k} \in TV$ соответствующих базисных векторов пространства V в тензорной алгебре TV . В частности, такие произведения составляют базис симметрической алгебры как векторного пространства над полем $\mathbb{k}$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.5. Найдите $\dim S^n V$, если $\dim V = d$.

ПРИМЕР 14.2 (ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НА ПРОСТРАНСТВЕ V)

В силу универсального свойства симметрической алгебры, задаваемое каждым вектором $v \in V$ отображение вычисления на нём линейных форм $\text{ev}_v : V^* \rightarrow \mathbb{k}$, $\varphi \mapsto \varphi(v)$, однозначно продолжается до гомоморфизма коммутативных $\mathbb{k}$ -алгебр $\text{ev}_v : SV^* \rightarrow \mathbb{k}$, переводящего разложимый полином $\varphi_1 \dots \varphi_n \in S^n V^*$, где $\varphi_i \in V^*$, в $\prod_i \varphi_i(v)$. Если выбрать в V и V^* двойственные базисы $e_1, \dots, e_d$ и $x_1, \dots, x_d$, что позволит записывать элементы $f \in SV^*$ как многочлены $f(x_1, \dots, x_n)$, а векторы $v \in V$ как строки их координат, то результат вычисления $\text{ev}_v(f)$ многочлена f на векторе v равен числу, получающемуся подстановкой в f вместо переменных значений координат вектора v . По этой причине симметрическую алгебру SV^* называют *алгеброй многочленов* на пространстве V .

ПРИМЕР 14.3 (СИММЕТРИЧНЫЕ ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ)

Полилинейное отображение $\varphi : V \times \dots \times V \rightarrow W$ называется *симметричным*, если

$$\varphi(v_{g_1}, \dots, v_{g_n}) = \varphi(v_1, \dots, v_n)$$

для всех перестановок $(g_1, \dots, g_n) \in S_n$. В силу универсального свойства тензорного произведения, каждое полилинейное отображение f единственным образом раскладывается в композицию тензорного умножения $\tau : V \times \dots \times V \rightarrow V^{\otimes n}$ и линейного отображения

$$\tilde{\varphi} : V^{\otimes n} \rightarrow W, \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto \varphi(v_1, \dots, v_n).$$

Если отображение φ симметрично, то все линейно порождающие пространство $J_{\text{com}} \cap V^{\otimes n}$ разности (14-6) лежат в $\ker \tilde{\varphi}$, поскольку

$$\tilde{\varphi}(\dots \otimes v \otimes w \otimes \dots - \dots \otimes w \otimes v \otimes \dots) = \varphi(\dots, v, w, \dots) - \varphi(\dots, w, v, \dots) = 0.$$

Тем самым, $\tilde{\varphi}$ корректно факторизуется до линейного отображения

$$\tilde{\varphi}: S^n V = V^{\otimes n} / (J_{\text{com}} \cap V^{\otimes n}) \rightarrow W.$$

Мы заключаем, что коммутативное умножение векторов $\sigma: V \times \dots \times V \rightarrow S^n V$ является универсальным симметричным полилинейным отображением в том смысле, что каждое симметричное полилинейное отображение $\varphi: V \times \dots \times V \rightarrow W$ единственным способом раскладывается в композицию $\varphi = \tilde{\varphi}\sigma$, где $\tilde{\varphi}: S^n V \rightarrow W$ линейно.

УПРАЖНЕНИЕ 14.6. Покажите, что коммутативное умножение векторов определяется этим свойством однозначно с точностью до единственного линейного изоморфизма, перестановочного с коммутативным умножением векторов.

СЛЕДСТВИЕ 14.2

Пространство симметричных n -линейных форм $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ канонически двойственно пространству $S^n V$ для любого² векторного пространства V . $\square$

14.2.3. Внешняя алгебра. Обозначим через $J_{\text{sk}} \subset TV$ двусторонний идеал, порождённый квадратами $v \otimes v \in V \otimes V$ всевозможных векторов $v \in V$. Он является прямой суммой

$$J_{\text{sk}} = \bigoplus_{n \geq 2} J_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n},$$

своих однородных компонент $J_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n}$, которые линейно порождаются разложимыми тензорами вида $u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes v \otimes v \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_m$ и в частности содержат все суммы

$$(\dots \otimes u \otimes w \otimes \dots) + (\dots \otimes w \otimes u \otimes \dots), \quad (14-7)$$

а также все разложимые тензоры вида $\dots v \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_\ell \otimes v \otimes \dots$, у которых совпадающие сомножители v не обязательно стоят рядом.

УПРАЖНЕНИЕ 14.7. Убедитесь в этом и в том, что суммы (14-7) линейно порождают $J_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n}$, если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$.

Фактор алгебра $\Lambda V \stackrel{\text{def}}{=} TV / J_{\text{sk}}$ называется *внешней* или *грасмановой* алгеброй пространства V . Умножение в ΛV , индуцированное тензорным произведением в TV , называется *внешним* или *грасмановым* умножением и обозначается знаком $\wedge$. Как векторное пространство, внешняя алгебра является прямой суммой $\Lambda V = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n V$ своих однородных компонент

$$\Lambda^0 V = \mathbb{k}, \quad \Lambda^1 V = V \quad \text{и} \quad \Lambda^n V \stackrel{\text{def}}{=} V^{\otimes n} / (J_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n}),$$

которые называются *внешними степенями* пространства V . По построению, $\Lambda^n V$ линейно порождается произведениями $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$, где $v_i \in V$, и эти произведения кососимметричны:

$$v \wedge v = 0 \quad \text{и} \quad v_{g_1} \wedge \dots \wedge v_{g_n} = \text{sgn}(g) \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_n$$

²В том числе бесконечномерного.

для любых векторов $v, v_1, \dots, v_n \in V$ и перестановок $g = (g_1, \dots, g_n) \in S_n$. Для произвольных³ однородных $\omega \in \Lambda^k V, \eta \in \Lambda^m V$ выполняется равенство

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{km} \eta \wedge \omega.$$

Градуированные алгебры с таким свойством называются *s-коммутативными*⁰, а алгебра ΛV иначе называется *свободной s-коммутативной градуированной $\mathbb{k}$ -алгеброй*, порождённой векторным пространством V .

ПРИМЕР 14.4 (КОСОСИММЕТРИЧНЫЕ ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, СР. С ПРИМ. 14.3)

Полилинейное отображение $\varphi : V \times \dots \times V \rightarrow W$ называется *кососимметричным*, если оно зануляется всякий раз, когда какие-нибудь два его аргумента совпадают, т. е. при любом $v \in V$

$$\varphi(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0,$$

где на обозначенных многоточиями местах может стоять всё, что угодно.

УПРАЖНЕНИЕ 14.8. Убедитесь, что в этом случае $\varphi(v_{g_1}, \dots, v_{g_n}) = \text{sgn}(g)\varphi(v_1, \dots, v_n)$ для любых $v_i \in V$ и $g \in S_n$ и что для кососимметричности полилинейного отображения достаточно, чтобы оно занулялось при совпадении любых двух соседних аргументов.

Точно также, как в прим. 14.3 на стр. 227, из универсального свойства тензорного произведения и кососимметричности отображения φ вытекает, что f единственным образом раскладывается в композицию тензорного умножения $\tau : V \times \dots \times V \rightarrow V^{\otimes n}$ и линейного отображения

$$\tilde{\varphi} : V^{\otimes n} \rightarrow W, \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto \varphi(v_1, \dots, v_n).$$

которое зануляется на тензорах вида $u_1 \otimes \dots \otimes u_k \otimes v \otimes v \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_m$ и тем самым корректно факторизуется до линейного отображения $\tilde{\varphi} : \Lambda^n V \rightarrow W$. Иными словами, грассманово умножение векторов $\sigma : V \times \dots \times V \rightarrow S^n V$ является универсальным кососимметричным полилинейным отображением в том смысле, что каждое кососимметричное полилинейное отображение $\varphi : V \times \dots \times V \rightarrow W$ единственным способом раскладывается в композицию $\varphi = \tilde{\varphi}\sigma$, где $\tilde{\varphi} : S^n V \rightarrow W$ линейно.

УПРАЖНЕНИЕ 14.9. Покажите, что грассманово умножение векторов определяется этим свойством однозначно с точностью до единственного линейного изоморфизма, перестановочного с грассмановым умножением.

СЛЕДСТВИЕ 14.3

Пространство кососимметричных n -линейных форм $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$ канонически двойственно пространству $\Lambda^n V$ для любого⁰ векторного пространства V . $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.3

Для любого базиса $E \subset V$ отображение $\beta : \mathbb{k}\langle E \rangle \rightarrow \Lambda V$ из алгебры грассмановых многочленов⁰ от переменных $e \in E$ во внешнюю алгебру пространства V , переводящее каждый базисный грассманов моном $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in \mathbb{k}\langle E \rangle$ в грассманово произведение $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in \Lambda V$ соответствующих базисных векторов пространства V во внешней алгебре ΛV , является изоморфизмом $\mathbb{k}$ -алгебр.

³Не обязательно разложимых в грассманово произведение векторов.

⁰Префикс «s» можно по желанию воспринимать как аббревиатуру для *super* или для *skew*.

⁰В том числе бесконечномерного.

⁰См. н° 8.3 на стр. 133.

Доказательство. Обратное отображение $\Lambda V \rightarrow \mathbb{K}\langle E \rangle$ переводит каждое грассманово произведение векторов $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \in \Lambda^n$ в грассманов многочлен $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \in \mathbb{K}\langle E \rangle$, который является произведением в алгебре $\mathbb{K}\langle E \rangle$ этих векторов, рассматриваемых как однородные грассмановы многочлены степени 1 от переменных $e \in E$. Поскольку последнее произведение полилинейно и кососимметрично по векторам $v_i \in V$, это правило корректно задаёт линейное отображение из $\Lambda^n V$ в пространство однородных грассмановых многочленов степени n от переменных $e \in E$, и это отображение переводит вычисленные в ΛV грассмановы произведения базисных векторов в базисные грассмановы мономы алгебры $\mathbb{K}\langle E \rangle$. $\square$

Следствие 14.4

Пусть линейно упорядоченное множество векторов $E \subset V$ является базисом пространства V . Тогда грассмановы мономы $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$, где $e_1 < e_2 < \dots < e_n$ и все $e_i \in E$, образуют базис внешней алгебры ΛV . $\square$

Пример 14.5 (ГРАССМАНОВЫ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ)

Покажем, что на конечномерном пространстве V над любым полем $\mathbb{K}$ каждый ненулевой однородный грассманов многочлен второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ в подходящем базисе $e_1, \dots, e_d$ пространства V записывается в *нормальном виде Дарбу*

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}. \quad (14.8)$$

Рассмотрим произвольный базис $u_1, \dots, u_d$ и перенумеруем его векторы так, чтобы

$$\omega = u_1 \wedge (\alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) + u_2 \wedge (\beta_3 u_3 + \dots + \beta_n u_n) + (\text{члены без } u_1 \text{ и } u_2),$$

где коэффициент $\alpha_2 \neq 0$. Перейдём к новому базису $v_1, \dots, v_d$, в котором $v_2 = \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$, а остальные $v_i = u_i$ при $i \neq 2$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.10. Убедитесь, что это действительно базис.

Получим выражение вида

$$\begin{aligned} \omega &= v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge (\gamma_3 v_3 + \dots + \gamma_n v_n) + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) = \\ &= (v_1 - \gamma_3 v_3 - \dots - \gamma_n v_n) \wedge v_2 + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) \end{aligned}$$

для некоторых $\gamma_3, \dots, \gamma_n \in \mathbb{K}$. Переходя к базису из векторов $w_1 = v_1 - \gamma_3 v_3 - \dots - \gamma_n v_n$ и $w_i = v_i$ при $i \neq 1$, получаем $\omega = w_1 \wedge w_2 + (\text{члены без } w_1 \text{ и } w_2)$, после чего процесс может быть продолжен по индукции.

Предложение 14.4

Если $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, то однородный грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^2 V$ тогда и только тогда разложим в произведение $u \wedge w$ двух векторов $u, w \in V$, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. Если $\omega = u \wedge w$, то $\omega \wedge \omega = u \wedge w \wedge u \wedge w = 0$. Чтобы получить обратное, выберем в V такой базис $e_1, \dots, e_d$, что $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots$, как в [прим. 14.5](#) выше. Если в этой сумме есть хотя бы два слагаемых, то базисный моном $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ войдёт в $\omega \wedge \omega$ с коэффициентом 2. Мы заключаем, что при $2 \neq 0$ равенство $\omega \wedge \omega = 0$ возможно только если $\omega = e_1 \wedge e_2$. $\square$

Упражнение 14.11. Запишем координаты векторов $u, w \in \mathbb{K}^4$ в стандартным базисом $e_1, \dots, e_4$ по строкам матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Убедитесь, что коэффициент при $e_i \wedge e_j$ в произведении $\omega = u \wedge w$ равен минору

$$A_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}$$

и выведите отсюда, что шесть чисел $A_{ij} \in \mathbb{K}$ являются минорами 2×4 матрицы если и только если выполняется квадратичное соотношение Плюккера⁰ $A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0$.

14.3. Симметричные и знакопеременные тензоры. Всюду в этом разделе мы по умолчанию считаем, что основное поле $\mathbb{K}$ имеет характеристику нуль. Симметрическая группа S_n действует на разложимых тензорах из $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей: для каждого $g \in S_n$ положим⁰

$$g(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = v_{g^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{g^{-1}(n)}. \quad (14-9)$$

Так как правая часть полилинейно зависит от $v_1, \dots, v_n$, эта формула корректно определяет линейный оператор $g : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$. Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *симметричным*, если $g(t) = t$ для всех $g \in S_n$, и *знакопеременным* — если $g(t) = \text{sgn}(g)t$ для всех $g \in S_n$. Симметричные и знакопеременные тензоры образуют в $V^{\otimes n}$ векторные подпространства

$$\begin{aligned} \text{Sym}^n V &= \{ t \in V^{\otimes n} \mid \forall g \in S_n \ g(t) = t \}, \\ \text{Alt}^n V &= \{ t \in V^{\otimes n} \mid \forall g \in S_n \ g(t) = \text{sgn}(g) \cdot t \}. \end{aligned}$$

14.3.1. Стандартные базисы. Зафиксируем в пространстве V базис $E \subset V$ и будем записывать тензоры $t \in V^{\otimes n}$ в виде некоммутативных многочленов от базисных мономов $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$, где $e_i \in E$. Два таких монома лежат в одной S_n -орбите если и только если для каждого $e \in E$ количество $m(e)$ равных e сомножителей в этих мономах одинаково. Мы заключаем, что S_n -орбиты базисных мономов в $V^{\otimes n}$ нумеруются функциями $m : E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с конечным носителем и суммой значений $|m| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{e \in E} m(e)$ равной n . При этом тензор t симметричен если и только если вместе с каждым базисным моном в него с тем же самым коэффициентом входят все мономы S_n -орбиты этого базисного монома. Мы заключаем, что симметричные тензоры

$$e_{[m]} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{l} \text{сумма всех базисных тензорных мономов, куда} \\ \text{каждый вектор } e \in E \text{ входит ровно } m(e) \text{ раз,} \end{array} \right) \quad (14-10)$$

занумерованные функциями $m : E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с $|m| = n$, образуют базис векторного подпространства $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$. Например, базис в $\text{Sym}^3(\mathbb{K}^2)$ составляют тензоры

$$\begin{aligned} e_{[3,0]} &= e_1 \otimes e_1 \otimes e_1, & e_{[0,3]} &= e_2 \otimes e_2 \otimes e_2, \\ e_{[2,1]} &= e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1, \\ e_{[1,2]} &= e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_2 \otimes e_1, \end{aligned}$$

⁰Ср. с формулой (8-20) из прим. 8.5 на стр. 137.

⁰Обратите внимание, что набор занумерованных векторов $v_1, \dots, v_n$ есть не что иное, как отображение $v : \{1, \dots, n\} \rightarrow V$. Левое действие группы S_n автоморфизмов множества $\{1, \dots, n\}$ на таких отображениях задаётся правилом $gv(i) = v(g^{-1}(i))$. При этом i -й слева элемент набора v оказывается в наборе $g(v)$ на $g(i)$ -м слева месте.

где $E = \{e_1, e_2\} \subset \mathbb{k}^2$ — стандартный базис, а $[i, j] : E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $e_1 \mapsto i$, $e_2 \mapsto j$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.12. Убедитесь, что в сумме (14-10) ровно $n! / \prod_{e \in E} m(e)!$ слагаемых.

В разложении кососимметричного тензора $t \in \text{Alt}^n V$ участвуют только те базисные мономы $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$, у которых $e_i \neq e_j$ при $i \neq j$. Орбита такого монома состоит из $n!$ мономов

$$e_{g(1)} \otimes \dots \otimes e_{g(n)}, \text{ где } g \in S_n,$$

и коэффициент при каждом таком мономе получается из коэффициента при $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ умножением на $\text{sgn } g$. Мы заключаем, что если зафиксировать на множестве базисных векторов $E \subset V$ какой-нибудь линейный порядок, то кососимметричные тензоры

$$\langle e_1 \otimes \dots \otimes e_n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) e_{g(1)} \otimes \dots \otimes e_{g(n)}, \text{ где } e_1 < \dots < e_n, \quad (14-11)$$

составят базис векторного подпространства $\text{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$.

ТЕОРЕМА 14.2 (поляризация многочленов)

Если $\text{char } \mathbb{k} = 0$, то ограничения отображения факторизации

$$V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V = V^{\otimes n} / (J_{\text{com}} \cap V^{\otimes n}), \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto v_1 \dots v_n, \quad (14-12)$$

на подпространство симметричных тензоров $\text{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ и отображения факторизации

$$V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V = V^{\otimes n} / (J_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n}), \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_n, \quad (14-13)$$

на подпространство знакопеременных тензоров $\text{Alt}^n \subset V^{\otimes n}$ являются линейными изоморфизмами векторных пространств. Они действуют на стандартные базисы (14-10) и (14-11) так:

$$e_{[m]} \mapsto \frac{n!}{\prod_{e \in E} m(e)!} \prod_{e \in E} e^{m(e)}, \quad (14-14)$$

$$\langle e_1 \otimes \dots \otimes e_n \rangle \mapsto n! e_1 \wedge \dots \wedge e_n. \quad (14-15)$$

Доказательство. Проекция (14-12) переводит каждое из $n! / \prod_{e \in E} m(e)!$ слагаемых, входящих в сумму (14-10), в стандартный коммутативный базисный моном $\prod_{e \in E} e^{m(e)}$ алгебры многочленов $\mathbb{k}[E]$, а проекция (14-13) переводит каждое из $n!$ слагаемых суммы (14-11) в стандартный базисный грассманов моном $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ алгебры грассмановых многочленов $\mathbb{k}\langle E \rangle$. $\square$

Предостережение 14.1. Не смотря на теор. 14.2, симметричные и знакопеременные тензоры, т. е. подпространства $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ и $\text{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$, не следует путать с однородными многочленами, т. е. с фактор пространствами $S^n V = V^{\otimes n} / (J_{\text{com}} \cap V^{\otimes n})$ и $\Lambda^n V = V^{\otimes n} / (J_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n})$. Если $\text{char } \mathbb{k} = p > 0$, то ограничения проекций $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ и $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ на подпространства симметрических и знакопеременных тензоров могут иметь ненулевые ядра. Даже в характеристике нуль эти проекции переводят стандартные базисные векторы тензорных и полиномиальных пространств не буквально друг в друга, но в некоторые кратности друг друга, и эти поправочные комбинаторные множители приходится учитывать как при попытке поднять на пространства симметричных и знакопеременных тензоров коммутативное и s -коммутативное умножения, имеющиеся в алгебрах SV и ΛV , так и при попытке спустить в симметрическую и грассманову алгебру отображения свёртки, которые имеются между тензорами из двойственных пространств V и V^* .

14.3.2. Двойственность. Напомню, что полная свёртка⁰ задаёт невырожденное спаривание между тензорными степенями $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$ двойственных друг другу конечномерных векторных пространств V и V^* , и тензорные мономы $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$ и $x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_n}$, составленные из векторов двойственных друг другу базисов $e_1, \dots, e_d \in V$ и $x_1, \dots, x_d \in V^*$, образуют двойственные друг другу базисы в $V^{\otimes n}$ и в $V^{*\otimes n}$. Если $\text{char } \mathbb{k} = 0$, то ограничение этого спаривания на подпространства симметрических тензоров $\text{Sym}^n V$ и $\text{Sym}^n V^*$ тоже невырождено, и стандартные базисные симметрические тензоры (14-10) сворачиваются друг с другом по правилу

$$\langle x_{[m]}, e_{[m]} \rangle = n! / \prod_{e \in E} m(e)! \quad \text{и} \quad \langle x_{[k]}, e_{[\ell]} \rangle = 0 \quad \text{при } k \neq \ell, \quad (14-16)$$

поскольку каждое слагаемое суммы (14-10) сворачивается в единицу ровно с одним слагаемым такой же суммы, составленной из двойственных базисных векторов, и сворачивается в нуль со всеми прочими базисными мономами. Изоморфизм (14-14) превращает это спаривание в невырожденное каноническое спаривание между симметрическими степенями $S^n V$ и $S^n V^*$, при котором базисные мономы, составленные из векторов *любых* двойственных друг базисов в V и в V^* спариваются по правилу

$$\langle x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, e_1^{m_1} \dots e_n^{m_n} \rangle = \begin{cases} m_1! \dots m_n! / n! & \text{если } (k_1, \dots, k_n) = (m_1, \dots, m_n) \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (14-17)$$

Аналогичным образом, ограничение полной свёртки на подпространства $\text{Alt}^n V$ и $\text{Alt}^n V^*$ над полем характеристики нуль задаёт между ними невырожденное спаривание, при котором стандартные базисные знакопеременные тензоры (14-11) сворачиваются по правилу

$$\langle \langle x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_n} \rangle, \langle e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_n} \rangle \rangle = \begin{cases} n! & \text{если } (i_1, \dots, i_n) = (j_1, \dots, j_n) \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (14-18)$$

и посредством изоморфизма (14-15) это спаривание превращается в невырожденное спаривание между внешними степенями $\Lambda^n V$ и $\Lambda^n V^*$, при котором базисные мономы, составленные из векторов *любых* двойственных друг базисов в V и в V^* спариваются по правилу

$$\langle x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_n}, e_{m_1} \wedge \dots \wedge e_{m_n} \rangle = \begin{cases} 1/n! & \text{если } (i_1, \dots, i_n) = (j_1, \dots, j_n) \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (14-19)$$

где оба набора индексов строго возрастают: $i_1 < \dots < i_n$ и $j_1 < \dots < j_n$.

14.3.3. Проекторы. Линейные отображения

$$\text{sym}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} g : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}, \quad t \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} g(t), \quad (14-20)$$

$$\text{alt}_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) g : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}, \quad t \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) g(t), \quad (14-21)$$

называются *симметризацией* и *альтернированием* тензоров.

УПРАЖНЕНИЕ 14.13. Убедитесь, что оба они перестановочны с действием группы S_n , т. е.

$$\text{sym}_n \circ g = g \circ \text{sym}_n \quad \text{и} \quad \text{alt}_n \circ g = g \circ \text{alt}_n \quad \text{для всех } g \in S_n.$$

⁰См. н° 14.1 на стр. 223.

Из упражнения вытекает, что симметризация перестановочна с альтернированием. Очевидно также, что симметризация тождественно действует на симметричные тензоры и аннулирует знакопеременные, а альтернирование тождественно действует на знакопеременные тензоры и аннулирует симметричные. Мы заключаем, что сумма $\text{Sym}^n \oplus \text{Alt}^n \subset V^{\otimes n}$ прямая, и оператор sym_n проектирует⁰ $V^{\otimes n}$ на подпространство $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ вдоль подпространства $\ker \text{sym}_n$, содержащего $\text{Alt}^n V$, а оператор alt_n проектирует⁰ $V^{\otimes n}$ на подпространство $\text{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$ вдоль подпространства $\ker \text{alt}_n$, содержащего $\text{Sym}^n V$. В частности,

$$\text{sym}_n^2 = \text{sym}_n, \quad \text{alt}_n^2 = \text{alt}_n \quad \text{и} \quad \text{sym}_n \text{alt}_n = \text{alt}_n \text{sym}_n = 0. \quad (14-22)$$

ПРИМЕР 14.6 (РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРНОГО КВАДРАТА)

Поскольку для d -мерного векторного пространства V

$$\dim \text{Sym}^2 V + \dim \text{Alt}^2 V = \frac{d(d+1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2} = d^2 = \dim V^{\otimes 2},$$

мы заключаем, что $V^{\otimes 2} = \text{Sym}^2 V \oplus \text{Alt}^2 V$. Это согласуется с известным из курса линейной алгебры⁰ фактом, что каждая билинейная форма $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, которая по сл. 14.1 на стр. 223 представляет собою тензор $\beta \in V^{*\otimes 2}$, однозначно раскладывается в сумму $\beta = \beta_+ + \beta_-$ симметричной и кососимметричной форм

$$\beta_+(u, w) = \frac{\beta(u, w) + \beta(w, u)}{2} \in \text{Sym}^2 V^* \quad \text{и} \quad \beta_-(u, w) = \frac{\beta(u, w) - \beta(w, u)}{2} \in \text{Alt}^2 V^*.$$

В частности, $\ker \text{sym}_2 = \text{Alt}^2 V$ и $\ker \text{alt}_2 = \text{Sym}^2 V$.

ПРИМЕР 14.7 (РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРНОГО КУБА)

В условиях предыдущего примера при $\dim V = d \geq 2$

$$\dim \text{Sym}^3 V + \dim \text{Alt}^3 V = \frac{d(d+1)(d+2)}{6} + \frac{d(d-1)(d-2)}{6} = \frac{d^3 + 2d}{3} < d^3 = \dim V^{\otimes 3}.$$

Поэтому $\text{Sym}^3 V \oplus \text{Alt}^3 V \neq V^{\otimes 3}$. Из соотношений (14-22) вытекает, что оператор

$$\pi_\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \text{Id} - \text{sym}_3 - \text{alt}_3 = \text{Id} - \frac{1}{3}(\text{Id} + \tau + \tau^2), \quad \text{где} \quad \tau = |1, 2, 3\rangle \in S_3 \text{ — 3-цикл,}$$

тоже является проектором⁰, ибо $\pi_\Delta^2 = (\text{Id} - \text{sym}_3 - \text{alt}_3)^2 = \text{Id} - \text{sym}_3 - \text{alt}_3 = \pi_\Delta$. Его образ

$$\text{im } \pi_\Delta = \{t \in V^{\otimes 3} \mid \pi_\Delta(t) = t\} = \{t \in V^{\otimes 3} \mid t + \tau(t) + \tau^2(t) = 0\}$$

состоит из тензоров, которые аннулируются усреднением по 3-циклу. Если интерпретировать тензоры $t \in V^{\otimes 3}$ как трилинейные формы $t : V^* \times V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{K}$, то $\text{im } \pi_\Delta$ состоит из трилинейных форм, удовлетворяющих тождеству Якоби $t(\xi, \eta, \zeta) + t(\eta, \zeta, \xi) + t(\zeta, \xi, \eta) = 0$. Если обозначить

⁰См. прим. 9.7 на стр. 161.

⁰См. прим. 9.7 на стр. 161.

⁰См. раздел 13.4 на с. 179 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_13.pdf.

⁰См. прим. 9.7 на стр. 161.

через $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} a \otimes b - b \otimes a$ коммутатор в ассоциативной алгебре TV , то для любых трёх векторов $u, v, w \in V$ тензор $[u, [v, w]] \in V^{\otimes 3}$ лежит в $\text{im } \pi_\Delta$, ибо

$$\begin{aligned} [u, [v, w]] &= u \otimes v \otimes w - u \otimes w \otimes v - v \otimes w \otimes u + w \otimes v \otimes u \\ \tau[u, [v, w]] &= v \otimes u \otimes w - v \otimes w \otimes u - u \otimes v \otimes w + u \otimes w \otimes v \\ \tau^2[u, [v, w]] &= v \otimes w \otimes u - w \otimes v \otimes u - w \otimes u \otimes v + v \otimes u \otimes w. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.14*. Обозначим через $\text{Lie}^3 V \subset V^{\otimes 3}$ линейную оболочку всевозможных двойных коммутаторов $[u, [v, w]]$, где $u, v, w \in V$. Покажите, что $\text{im } \pi_\Delta = \text{Lie}^3 V \oplus \tau \text{Lie}^3 V$. Так как каждый из проекторов $\text{sym}_3, \pi_\Delta, \text{alt}_3$ аннулирует образы двух других, каждое из подпространств $\text{im } \text{sym}_3, \text{im } \pi_\Delta, \text{im } \text{alt}_3$ пересекает сумму двух других по нулю. В силу равенства $\text{Id} = \text{sym}_3 + \pi_\Delta + \text{alt}_3$ каждый тензор $t \in V^{\otimes 3}$ раскладывается в сумму $t = \text{sym}_3 t + \pi_\Delta t + \text{alt}_3 t$. Мы заключаем, что $V^{\otimes 3} = \text{im } \text{sym}_3 \oplus \text{im } \pi_\Delta \oplus \text{im } \text{alt}_3 = \text{Sym}^3 V \oplus \text{Lie}^3 V \oplus \tau \text{Lie}^3 V \oplus \text{Alt}^3 V$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.15. Докажите тождество Якоби для коммутаторов⁰:

$$[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0.$$

14.4. Поляризация многочленов и частные производные. Всюду в этом разделе мы считаем, что $\text{char } \mathbb{k} = 0$, а векторное пространство V конечномерно. По теор. 14.2 для каждого многочлена $f \in S^n V^*$ существует единственный симметричный тензор $\tilde{f} \in \text{Sym}^n V^*$, который проектируется в f при факторизации $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$. Согласно сл. 14.1 на стр. 223 тензор $\tilde{f}$ задаёт симметричную n -линейную форму $\tilde{f}: V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$, значение которой на наборе векторов $(v_1, \dots, v_n)$ равно полной свёртке тензора $\tilde{f}$ с тензором $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$. В прим. 14.2 на стр. 227 мы видели, что каждый многочлен $f \in S^n V^*$ задаёт полиномиальную функцию $f: V \rightarrow \mathbb{k}$, причём для разложимых многочленов $f = \varphi_1 \dots \varphi_n$ значение $f(v) = \prod_i \varphi_i(v)$. Сравнивая эти две конструкции, мы заключаем, что для любого однородного многочлена f степени n на конечномерном векторном пространстве V над полем характеристики нуль существует единственная такая n -линейная симметричная форма $\tilde{f}: V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$, что для всех $v \in V$

$$f(v) = \tilde{f}(v, \dots, v). \quad (14-23)$$

Эта форма называется *полной поляризацией* многочлена f . Полная поляризация $\tilde{q}: V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ однородной квадратичной формы $q \in S^2 V^*$ известна из курса линейной алгебры⁰:

$$\tilde{q}(u, w) = (q(u + w) - q(u) - q(w)) / 2.$$

Полная поляризация однородного кубического многочлена имеет вид

$$6\tilde{f}(u, v, w) = f(u + v + w) - f(u + v) - f(u + w) - f(v + w) + f(u) + f(v) + f(w).$$

Предложение 14.5 (комбинаторная формула для полной поляризации)

$$n! \tilde{f}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{I \subsetneq \{1, \dots, n\}} (-1)^{\ell(I)} f\left(\sum_{i \notin I} v_i\right), \quad (14-24)$$

где суммирование идёт по всем собственным подмножествам $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$, включая пустое, а $\ell(I)$ означает число элементов в I .

⁰Обратите внимание, что тензоры $[w, [u, v]]$ и $[v, [w, u]]$ отличаются от $\tau[u, [v, w]]$ и $\tau^2[u, [v, w]]$!

⁰См. раздел 14.3 на стр. 186 в http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_14.pdf.

Доказательство. Пусть заданы векторы $u_1, \dots, u_k \in V$, а набор векторов $w_1, \dots, w_n$ состоит из m_i копий каждого из векторов u_i , где $i = 1, \dots, k$, все $m_i \geq 0$ и $m_1 + \dots + m_k = n$. Поскольку значение $\tilde{f}(w_1, \dots, w_n)$ не меняется при перестановках аргументов и зависит только от векторов u_i и кратностей m_i , условимся записывать его как $\tilde{f}(u_1^{m_1}, \dots, u_k^{m_k}) = \tilde{f}(w_1, \dots, w_n)$. В этих обозначениях, для всех $f \in S^n V^*$ и любых $v_1, \dots, v_k \in V$ справедлива мультиномиальная формула⁰

$$f(v_1 + \dots + v_k) = \sum_{m_1, \dots, m_k} \frac{n!}{m_1! \dots m_k!} \tilde{f}(v_1^{m_1}, \dots, v_k^{m_k}), \quad (14-25)$$

где суммирование идёт по всем наборам целых чисел $m_1, \dots, m_k$, в которых $0 \leq m_i \leq n$ при каждом i и $m_1 + \dots + m_k = n$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.16. Убедитесь в этом.

При $k = n$ в правой части (14-25) имеется ровно одно слагаемое, зависящее от всех n аргументов $v_1, \dots, v_n$, а именно, $n! \tilde{f}(v_1, \dots, v_n)$. Для каждого собственного подмножества $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ не зависящие от векторов v_i с $i \in I$ слагаемые из правой части формулы (14-25) входят в неё с тем же самым коэффициентом, что и в разложение (14-25) для $f(\sum_{i \notin I} v_i)$, поскольку последнее получается из разложения для $f(v_1 + \dots + v_n)$ подстановкой $v_i = 0$ для всех $i \in I$. Таким образом, все слагаемые, не содержащие хотя бы один из векторов v_i , могут быть удалены из (14-25) при помощи стандартной процедуры включения-исключения, что и даёт заявленную формулу

$$n! \cdot \tilde{f}(v_1, \dots, v_n) = f\left(\sum_v v_v\right) - \sum_{\{i\}} f\left(\sum_{v \neq i} v_v\right) + \sum_{\{i,j\}} f\left(\sum_{v \neq i,j} v_v\right) - \sum_{\{i,j,k\}} f\left(\sum_{v \neq i,j,k} v_v\right) + \dots \quad \square$$

Предложение 14.6 (принцип Аронгольда)

Над полем характеристики нуль пространство симметрических тензоров $\text{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами $v^{\otimes n} = v \otimes \dots \otimes v$, где $v \in V$, а пространство однородных многочленов $S^n V^*$ — многочленами φ^n , где $\varphi \in V^*$.

Доказательство. Двойственное к $\text{Sym}^n V$ пространство канонически изоморфно пространству симметричных n -линейных форм $V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$. Если такая форма $\tilde{f}$ зануляется на всех наборах $(v, \dots, v)$, то многочлен $f \in S^n V^*$, поляризацией которого она является, задаёт тождественно нулевую функцию $f: V \rightarrow \mathbb{k}$, откуда $f = 0$, а значит и $\tilde{f} = 0$. Тем самым, линейная оболочка тензоров $v^{\otimes n}$ не лежит ни в какой гиперплоскости пространства $\text{Sym}^n V$, что доказывает первое утверждение. Второе следует из первого, поскольку при изоморфизме $\text{Sym}^n V^* \simeq S^n V^*$ тензоры $\varphi^{\otimes n}$ переходят в многочлены φ^n . $\square$

14.4.1. Производная многочлена в направлении вектора. Зафиксируем вектор $v \in V$. Свёртка с этим вектором по первому тензорному сомножителю задаёт линейное отображение⁰

$$i_v: V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes (n-1)}.$$

Применяя его к полной поляризации $\tilde{f}$ многочлена $f \in S^n V^*$ и проектируя результат из $V^{\otimes (n-1)}$ в $S^{n-1} V^*$, получаем линейно зависящее от v линейное отображение $\text{pl}_v: S^n V^* \rightarrow S^{n-1} V^*$, которое называется *поляризацией вдоль v* и включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes n} \supset \text{Sym}^n V^* & \xrightarrow{i_v} & V^{\otimes (n-1)} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ S^n V^* & \xrightarrow{\text{pl}_v} & S^{n-1} V^* \end{array} \quad (14-26)$$

⁰Ср. с прим. 0.2 на стр. 8.

⁰См. прим. 14.1 на стр. 224.

Пусть векторы $e_1, \dots, e_d \in V$ и ковекторы $x_1, \dots, x_d \in V^*$ образуют двойственные базисы. Согласно форм. (14-14) на стр. 232 каждый базисный моном $x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d} \in S^n V^*$ поляризуется в симметричный тензор

$$\frac{n!}{m_1! \dots m_d!} x_{[m_1, \dots, m_d]} \in \text{Sym}^n V^*,$$

где $x_{[m_1, \dots, m_d]}$ обозначает сумму всех тензорных мономов, содержащих каждый базисный ко-вектор x_i ровно m_i раз. Свёртка тензора $x_{[m_1, \dots, m_d]}$ с базисным вектором $e_i \in V$ по первому тензорному сомножителю зануляется при $m_i = 0$, а во всех остальных случаях равна

$$x_{[m_1, \dots, m_{i-1}, m_i-1, m_{i+1}, m_d]} \in \text{Sym}^{n-1} V^*.$$

Мы заключаем, что $\text{pl}_{e_i} x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d} = \frac{m_i}{n} x_1^{m_1} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i-1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \dots x_d^{m_d} = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_i} x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$. Напомню, что в анализе частная производная многочлена $f \in S^n V^*$ в направлении вектора

$$v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_d e_d \in V$$

определяется равенством

$$\partial_v f \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \alpha_d \frac{\partial f}{\partial x_d}.$$

Поскольку многочлен $\text{pl}_v f$ билинейно зависит от v и f , для любых $u, w \in V$ и $f \in S^n V^*$ справедливо равенство

$$\text{pl}_u f(w) = \tilde{f}(u, w^{n-1}) = \frac{1}{n} \partial_u f(w). \quad (14-27)$$

Отметим, что поскольку левая часть этой формулы определена инвариантно, правая часть тоже не зависит от выбора двойственных координат в V и V^* .

Применяя n раз формулу (14-27), получаем ещё одно явное выражение полной поляризации $\tilde{f}$ многочлена $f \in S^n V^*$ через этот многочлен:

$$\tilde{f}(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \partial_{v_1} \dots \partial_{v_n} f. \quad (14-28)$$

УПРАЖНЕНИЕ 14.17. Убедитесь, что частные производные коммутируют, т. е. $\partial_u \partial_w = \partial_w \partial_u$ для всех $u, w \in V$, и докажите правило Лейбница: $\partial_v(fg) = g \partial_v(f) + f \partial_v(g)$.

Из формулы (14-27) также вытекает, что для любых $u, w \in V$ и $f \in S^n V^*$ при всех $0 \leq k \leq n$

$$\tilde{f}(u^k, w^{n-k}) = \frac{(n-k)!}{n!} \partial_u^k f(w) = \frac{k!}{n!} \partial_w^{n-k} f(u), \quad (14-29)$$

где $\partial_v^\ell = \partial_v \dots \partial_v$ означает ℓ -кратную производную в направлении v .

ПРИМЕР 14.8 (РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕЙЛОРА)

Для любых двух векторов $u, w \in V$ и многочлена $f \in S^n V^*$ справедлива формула бинома⁰

$$f(u+w) = \tilde{f}((u+w), \dots, (u+w)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \tilde{f}(u^k, w^{n-k}).$$

Соотношения (14-29) позволяют переписать это равенство как разложение Тейлора

$$f(u+w) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \partial_w^k f(u) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \partial_u^{n-k} f(w). \quad (14-30)$$

справедливое для всех $f \in S^n V^*$ и симметричное по u, w в силу соотношений (14-29).

⁰См. формулу (14-25) на стр. 236.

14.4.2. Линейный носитель многочлена. Линейный носитель⁰ $\text{supp } \tilde{f} \subset V^*$ полной поляризации $\tilde{f}$ многочлена $f \in S^n V^*$ называется *линейным носителем многочлена f* . Он равен пересечению всех таких подпространств⁰ $U \subset V^*$, что $\omega \in \Lambda^n U$, и является, тем самым, наименьшим из этих подпространств, как по включению, так и по размерности.

УПРАЖНЕНИЕ 14.18. Убедитесь, что многочлен f корректно задаёт полиномиальную функцию на $V / \text{Ann}(\text{supp } f)$ по правилу $f([v]) = f(v)$.

Согласно теор. 14.1 на стр. 225, подпространство $\text{supp } f \subset V^*$ является образом полной свёртки $c_f : V^{\otimes(n-1)} \rightarrow V^*$ с тензором $\tilde{f}$ по первым⁰ $n - 1$ его тензорным сомножителям, т. е. $\binom{n+d-2}{d-1}$ линейными формами

$$\tilde{f}(e_1^{m_1}, \dots, e_d^{m_d}) \in V^*, \quad \text{где } m_1 + \dots + m_d = n - 1. \quad (14-31)$$

Если записать многочлен f в виде

$$f = \sum_{v_1 \dots v_d} \frac{n!}{v_1! \dots v_d!} a_{v_1 \dots v_d} x_1^{v_1} \dots x_d^{v_d}, \quad (14-32)$$

то его полная поляризация, согласно форм. (14-14) на стр. 232, будет иметь вид

$$\tilde{f} = \sum_{v_1 \dots v_d} a_{v_1 \dots v_d} x_{[v_1 \dots v_d]},$$

где $x_{[v_1 \dots v_d]} \in \text{Sym}^n V^*$ — сумма всех тензорных мономов, содержащих v_i сомножителей x_i для всех $i = 1, \dots, d$, а линейные формы (14-31) — вид

$$\tilde{f}(e_1^{m_1}, \dots, e_d^{m_d}) = \sum_{i=1}^d a_{m_1 \dots m_{i-1} (m_i+1) m_{i+1} \dots m_d} x_i. \quad (14-33)$$

Предложение 14.7 (многочлены с одномерным носителем)

Однородный многочлен (14-32) над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль тогда и только тогда является n -той степенью линейной формы, когда $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$ -матрица из коэффициентов линейных форм (14-33) имеет ранг 1. В этом случае есть ровно n линейных форм φ , удовлетворяющих уравнению $\varphi^n = f$, все они пропорциональны формам (14-33) и получаются друг из друга умножением на корни n -той степени из единицы в поле $\mathbb{K}$.

Доказательство. Равенство $f = \varphi^n$ означает, что $\text{supp } f$ одномерен и порождён формой φ . В этом случае все формы (14-33) пропорциональны форме φ , и уравнение $t^n = f$ имеет в целостном кольце $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_d]$ ровно n корней вида $\zeta \cdot \varphi$, где ζ пробегает множество корней из единицы в поле $\mathbb{K}$. Наоборот, если все формы (14-33) пропорциональны, и $\psi \neq 0$ — одна из них, то $\text{supp } f = \mathbb{K} \cdot \psi$ и $f = \lambda \psi^n$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{K}$, а $\varphi = \sqrt[n]{\lambda} \cdot \psi$. $\square$

⁰См. п. 14.1.2 на стр. 224.

⁰Обратите внимание, что линейный носитель многочлена на пространстве V является векторным подпространством в V^* , а не в V .

⁰Из-за симметричности тензора $\tilde{f}$ свёртка не зависит от выбора последовательности из $n - 1$ индексов, по которым она производится.

ПРИМЕР 14.9 (бинарные формы ранга 1)

Однородный многочлен степени n от двух переменных $f(x_0, x_1) = \sum_k a_k \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^k x_1^{n-k}$ представляется в виде $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n = \sum_k \alpha_0^k \alpha_1^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^k x_1^{n-k}$ если и только если отношение $a_{k+1} : a_k = \alpha_0 : \alpha_1$ не зависит от k , что означает пропорциональность стролбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} = 1, \quad (14-34)$$

и выражается квадратичными соотношениями $a_i a_{j-1} = a_{i-1} a_j$, где $1 \leq i < j \leq n$, на коэффициенты многочлена f . Это согласуется с [предл. 14.7](#): столбцы матрицы (14-34) суть коэффициенты n линейных форм $\tilde{f}(e_0^{i-1}, e_1^{n-i}) = a_i x_0 + a_{i-1} x_1$ из формулы (14-33).

14.5. Грассмановы производные и соотношения Плюккера. Согласно [теор. 14.2](#), над полем нулевой характеристики проекция $\text{Alt}^n V \rightarrow \Lambda^n V$ знакопеременных тензоров на фактор тензорной алгебры по соотношениям антикоммутирования является изоморфизмом. Обратный к нему изоморфизм $\Lambda^n V \simeq \text{Alt}^n V$ называется *полной поляризацией* грассмановых многочленов. Он сопоставляет однородному грассманову многочлену $\omega \in \Lambda^n V$ единственный знакопеременный тензор $\tilde{\omega} \in \text{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$, лежащий в классе $\omega \in V^{\otimes n} / (J_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n})$.

14.5.1. Грассмановы частные производные. Как и для обычных многочленов⁰, каждый ковектор $\xi \in V^*$ задаёт линейное отображение $\text{pl}_\xi : \Lambda^n V \rightarrow \Lambda^{n-1} V$ поляризации вдоль ξ , которое переводит грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^n V$ в проекцию на $\Lambda^{n-1} V$ результата свёртки полной поляризации $\tilde{\omega}$ многочлена ω с ковектором ξ по первому тензорному сомножителю и включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes n} \supset \text{Alt}^n V & \xrightarrow{i_\xi} & V^{\otimes(n-1)} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ \Lambda^n V & \xrightarrow{\text{pl}_\xi} & \Lambda^{n-1} V. \end{array}$$

Определим *грассманову производную* от ω в направлении ковектора $\xi \in V^*$ формулой

$$\partial_\xi \omega \stackrel{\text{def}}{=} n \text{pl}_\xi \omega.$$

Так как тензор $\tilde{\omega}$ кососимметричен, для любых $\xi, \eta, \psi_1, \dots, \psi_{n-2} \in V^*$

$$i_\xi i_\eta \tilde{\omega}(\psi_1, \dots, \psi_{n-2}) = \omega(\xi, \eta, \psi_1, \dots, \psi_{n-2}) = -\omega(\eta, \xi, \psi_1, \dots, \psi_{n-2}) = -i_\eta i_\xi \tilde{\omega}(\psi_1, \dots, \psi_{n-2}),$$

т. е. грассмановы поляризации и грассмановы частные производные антикоммутируют:

$$\text{pl}_\xi \text{pl}_\eta = -\text{pl}_\eta \text{pl}_\xi \quad \text{и} \quad \partial_\xi \partial_\eta = -\partial_\eta \partial_\xi,$$

в частности $\partial_\xi^2 = 0$ для любого $\xi \in V^*$, что согласуется с тем, что грассмановы многочлены линейны по каждой переменной. Как и в коммутативном случае⁰, выполняется равенство

$$\tilde{\omega}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{n!} \partial_{\xi_1} \dots \partial_{\xi_n} \omega. \quad (14-35)$$

⁰Ср. с [п° 14.4.1](#) на стр. 236

⁰Ср. с [14-28](#) на стр. 237

Если ковекторы $x_i \in V^*$ и векторы $e_i \in V$ образуют двойственные друг другу базисы пространств V и V^* , то в силу билинейной зависимости $\text{pl}_\xi \omega$ от ξ и ω , гассманова производная в направлении ковектора $\xi = \sum_i \alpha_i x_i$ может быть записана как $\partial_\xi = \sum_i \alpha_i \partial_{x_i}$. При этом ненулевой вклад в $\partial_{x_i} \omega$ будет лишь от входящих в ω мономов $e_J = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_n} \subset J \ni i$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.19. Убедитесь, что $\partial_{x_{i_1}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ для любой⁰ последовательности попарно разных индексов $i_1, \dots, i_n$.

Таким образом, дифференцирование гассманова монома в направлении базисного ковектора, двойственного к первой слева переменной в мономе, ведёт себя как обычная частная производная $\partial / \partial_{e_{i_1}}$ по этой переменной. В силу антикоммутативности гассмановых переменных, дифференцирование по k -той слева переменной монома ведёт себя как $(-1)^{k-1} \partial / \partial_{e_{i_k}}$:

$$\begin{aligned} \partial_{x_{i_k}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} &= \partial_{x_{i_k}} (-1)^{k-1} e_{i_k} \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_n}. \end{aligned}$$

Иначе говоря, гассмановы производные удовлетворяют *гассманову правилу Лейбница*: для любых однородных гассмановых многочленов $\omega, \tau \in \Lambda V$ и любого ковектора $\xi \in V^*$

$$\partial_\xi(\omega \wedge \tau) = \partial_\xi(\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \partial_\xi(\tau). \quad (14-36)$$

14.5.2. Линейный носитель гассманова многочлена. Как и в коммутативном случае, *линейный носитель* $\text{supp } \omega \subset V$ однородного гассманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V$ определяется как линейный носитель⁰ $\text{supp}(\tilde{\omega})$ его полной поляризации $\tilde{\omega} \in \text{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$. Он равен пересечению всех таких подпространств $U \subset V$, что $\omega \in \Lambda^n U$, и является, тем самым, наименьшим из этих подпространств, как по включению, так и по размерности. Полной поляризацией гассманова многочлена

$$\omega = \sum_I a_I e_I = \sum_{i_1 < \dots < i_n} a_{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}, \quad (14-37)$$

где $I = (i_1, \dots, i_n)$ пробегает возрастающие последовательности из n индексов, является тензор⁰

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{n!} \sum_I a_I \langle e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} \rangle = \sum_{i_1, \dots, i_n} \tilde{a}_{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}, \quad (14-38)$$

где справа суммирование идёт уже по всем последовательностям из n не повторяющихся индексов, а коэффициенты $\tilde{a}_{i_1 \dots i_n}$ кососимметричны по $i_1, \dots, i_n$ и $\tilde{a}_{i_1 \dots i_n} = a_{i_1 \dots i_n} / n!$ когда индексы строго возрастают. По [теор. 14.1](#) на стр. 225, подпространство $\text{supp}(\tilde{\omega}) \subset V$ является образом полной свёртки $c_{\tilde{\omega}} : V^{\otimes(n-1)} \rightarrow V$ с тензором $\tilde{\omega} \in V^{\otimes n}$ по первым $n-1$ тензорным сомножителям⁰ и линейно порождается векторами

$$w_J = c_{\tilde{\omega}}(x_{j_1} \otimes \dots \otimes x_{j_{n-1}}) = \sum_{i \notin J} \tilde{a}_{j_1 \dots j_{n-1} i} e_i, \quad (14-39)$$

где $J = (j_1, \dots, j_{n-1})$ пробегает возрастающие последовательности из $n-1$ индексов.

⁰ Не обязательно возрастающей.

⁰ См. п. 14.1.2 на стр. 224.

⁰ См. формулу (14-15) на стр. 232.

⁰ В силу знакопеременности тензора $\tilde{\omega}$ выбор последовательности из $n-1$ сворачиваемых сомножителей может привести лишь к смене знака у результата.

Предложение 14.8 (Грассмановы многочлены с минимальным ненулевым носителем)

Следующие три условия на грассманов многочлен (14-37) эквивалентны:

- 1) $\dim \operatorname{supp} \omega \leq n$ 2) $\omega = u_1 \wedge \dots \wedge u_n$, где $u_1, \dots, u_n \in V$ 3) $\forall u \in \operatorname{supp} \omega \ u \wedge \omega = 0$
- 4) для любых двух наборов I, J возрастающих индексов $i_1 < \dots < i_{m+1}$ и $j_1 < \dots < j_{m-1}$, таких, что $I \not\supset J$, выполнены соотношения Плюккера

$$\sum_{v=1}^{m+1} (-1)^{v-1} \tilde{a}_{j_1 \dots j_{m-1} i_v} a_{i_1 \dots \hat{i}_v \dots i_{m+1}} = 0, \quad (14-40)$$

где «крышка» в $a_{i_1 \dots \hat{i}_v \dots i_{m+1}}$ означает, что индекс i_v следует пропустить.

Доказательство. Условия (1), (2) и (3) очевидно эквивалентны и означают, что ω лежит в старшей внешней степени $\Lambda^{\dim \operatorname{supp} \omega}$ своей линейной оболочки $\operatorname{supp} \omega$.

Упражнение 14.20. Пусть $\omega \in \Lambda V$ и $\dim V = d$. Убедитесь, что $v \wedge \omega = 0$ для всех $v \in V$ если и только если $\omega \in \Lambda^d V$.

Соотношение (14-40) констатирует обнуление коэффициента при $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}$ в произведении $w_J \wedge \omega$ для линейно порождающих $\operatorname{supp} \omega$ векторов w_J из формулы (14-39). $\square$

Пример 14.10 (продолжение прим. 8.5 на стр. 137 и предл. 14.4 на стр. 230)

Для четырёхмерного пространства V с базисом $e_1, \dots, e_4$ и $\omega = \sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j$ соотношение Плюккера для наборов индексов $I = (2, 3, 4)$ и $J = (1)$ имеет вид⁰ $-a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23} = 0$, и любой другой выбор непересекающихся наборов (i_1, i_2, i_3) и (j) приводит к тому же самому с точностью до общего знака соотношению. Если $j \in \{i_1, i_2, i_3\}$, скажем $I = (1, 2, 3)$, $J = (1)$, то получается тривиальное соотношение $a_{12}a_{13} - a_{13}a_{12} = 0$.

Пример 14.11

Если $V = \mathbb{k}^5$ с базисом $e_1, \dots, e_5$, то по предл. 14.4 на стр. 230 разложимость грассмановой квадратичной формы $\omega = \sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 V$ равносильна равенству $\omega \wedge \omega = 0$. Поскольку $\omega \wedge \omega$ лежит в пятимерном пространстве $\Lambda^4 \mathbb{k}^5$, это равенство эквивалентно пяти квадратичным соотношениям на коэффициенты a_{ij} формы ω . Эти пять соотношений совпадают с пятью соотношениями Плюккера, возникающими из пяти пар непересекающихся наборов индексов $I = (i_1, i_2, i_3)$ и $J = (j)$, объединения которых $I \sqcup J$ пробегают пять различных четырёхэлементных подмножеств в $\{1, \dots, 5\}$. При фиксированном $I \sqcup J$ четыре различных разбиения этого множества на непересекающиеся поднаборы из одного и трёх элементов дают, как и в предыдущем прим. 14.10, одинаковые с точностью до общего знака соотношения вида

$$\tilde{a}_{i_1 j} a_{i_2 i_3} - \tilde{a}_{i_2 j} a_{i_1 i_3} + \tilde{a}_{i_3 j} a_{i_1 i_2} = 0.$$

При $j = i_1 \in \{i_1, i_2, i_3\}$ получается тривиальное соотношение $a_{i_1 i_2} a_{i_1 i_3} - a_{i_1 i_3} a_{i_1 i_2} = 0$.

14.6. Грассманианы. Множество всех m -мерных векторных подпространств d -мерного векторного пространства V называется *грассманианом* $\operatorname{Gr}(m, d)$ или $\operatorname{Gr}(m, V)$, если важно подчеркнуть природу пространства V . С проективной точки зрения грассманиан $\operatorname{Gr}(m, d)$ есть множество $(m-1)$ -мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}_{d-1}$. Грассманианы являются естественными обобщениями проективных пространств: двойственные пространства

$$\mathbb{P}_n = \operatorname{Gr}(1, n+1) \quad \text{и} \quad \mathbb{P}_n^\times = \operatorname{Gr}(n, n+1)$$

⁰Ср. с прим. 8.5 на стр. 137 и упр. 14.11 на стр. 231.

служат простейшими примерами грассманианов. Двойственность $U \leftrightarrow \text{App } U$ между m -мерными и $(d - m)$ -мерными подпространствами двойственных векторных пространств V и V^* задаёт каноническое отождествление $\text{Gr}(m, V) = \text{Gr}(d - m, V^*)$.

14.6.1. Плюккерово вложение. Грассманиан $\text{Gr}(m, V)$ вкладывается в $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ отображением Плюккера

$$p_m : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V), \quad (14-41)$$

которое переводит m -мерное векторное подпространство $U \subset V$ в одномерное векторное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$. Если векторы $u_1, \dots, u_m$ образуют базис в U , то $p_m(U) = u_1 \wedge \dots \wedge u_m$. Выбор другого базиса $w_1, \dots, w_m$ из векторов $w_i = \sum_j a_{ij} u_j$ заменяет $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$ на пропорциональный разложимый грассманов многочлен $w_1 \wedge \dots \wedge w_m = \det(a_{ij}) u_1 \wedge \dots \wedge u_m$.

Предложение 14.9

Отображение Плюккера (14-41) инъективно, а его образ является алгебраическим многообразием, задаваемым квадратичными соотношениями Плюккера из предл. 14.8.

Доказательство. Образ отображения (14-41) состоит из всех разложимых грассмановых многочленов степени m и описывается в предл. 14.8 на стр. 241. Покажем, что отображение Плюккера инъективно. Пусть $U \neq W$ и $\dim U \cap W = r < m$. Тогда в V есть базис из таких векторов

$$e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_s, v_1, \dots, v_t,$$

где $s = m - r$, что векторы $e_1, \dots, e_r$ образуют базис в $U \cap W$, а наборы векторов

$$e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_s \quad \text{и} \quad e_1, \dots, e_r, w_1, \dots, w_s$$

являются базисами в U и в W . Отображение Плюккера сопоставляет им разные базисные мономы $e_1 \wedge \dots \wedge e_r \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_s$ и $e_1 \wedge \dots \wedge e_r \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_s$ пространства $\Lambda^m V$. $\square$

14.6.2. Многообразие Сегре как сечение грассманиана. Рассмотрим прямую сумму

$$W = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$$

конечномерных векторных пространств V_i . Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности целых чисел $m_1, \dots, m_n$, где $0 \leq m_i \leq \dim V_i$ и $m_1 + \dots + m_n = k$, обозначим через $W_{m_1 \dots m_n} \subset \Lambda^k W$ линейную оболочку всех разложимых грассмановых многочленов $w_1 \wedge \dots \wedge w_k$, у которых ровно m_i сомножителей w_v лежит в V_i при всех $i = 1, \dots, n$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.21. Покажите, что правило $\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_n \mapsto \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$ корректно задаёт линейный изоморфизм $\Lambda^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n \simeq W_{m_1 \dots m_n}$, и что

$$\Lambda^k W = \bigoplus_{m_1, \dots, m_n} W_{m_1 \dots m_n} \simeq \bigoplus_{m_1, \dots, m_n} \Lambda^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n. \quad (14-42)$$

Тензорное произведение $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ канонически изоморфно слагаемому $W_{1 \dots 1} \subset \Lambda^n W$ из разложения (14-42). Изоморфизм переводит каждый разложимый тензор $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ в грассманов моном $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$. Мы заключаем, что многообразие Сегре из п° 13.1.2 на стр. 215 представляет собою пересечение $\text{Gr}(n, W) \cap \mathbb{P}(W_{1 \dots 1})$ и является алгебраическим многообразием в $\mathbb{P}(\Lambda^n W)$, задаваемым квадратичными соотношениями Плюккера из предл. 14.8 и линейными уравнениями, описывающими векторное подпространство $W_{1 \dots 1} \subset \Lambda^n W$.

14.6.3. Однородные координаты на грассманиане обобщают однородные координаты на проективном пространстве. Если зафиксировать в V базис $e_1, \dots, e_d$, то m -мерное подпространство $U \subset V$ можно задавать матрицей X_u размера $d \times m$, по строкам которой записаны координаты векторов $u_1, \dots, u_m$ какого-нибудь базиса u в U . Разумеется, такое представление не единственно: другому базису w в U , составленному из векторов $w_1, \dots, w_m$, отвечает другая матрица $X_w = C_{wu} X_u$, получающаяся из X_u умножением слева на невырожденную квадратную $m \times m$ -матрицу перехода, которая определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = C_{wu} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

Мы заключаем, что грассманиан $\text{Gr}(m, d) = \text{GL}_m(\mathbb{k}) \backslash \text{Mat}_{m \times d}^\circ(\mathbb{k})$ является множеством орбит левого действия группы $\text{GL}_m(\mathbb{k})$ на множестве $\text{Mat}_{m \times d}^\circ(\mathbb{k})$ матриц размера $m \times d$ и ранга m . При $m = 1$ это описание превращается в описание проективного пространства $\mathbb{P}_{d-1}$ как множества ненулевых координатных строк длины d с точностью до умножения на ненулевые константы. Таким образом, матрица X_u с точностью до умножения слева на обратимые матрицы является прямым аналогом однородных координат.

14.6.4. Плюккеровы координаты. Плюккерovo вложение $p_m : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ сопоставляет m -мерному подпространству $U \subset V$ с базисом $u_1, \dots, u_m$ одномерное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$ с базисом $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$. Если зафиксировать в V базис $e_1, \dots, e_d$, а в $\Lambda^m V$ — базис из грассмановых мономов $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$, то I -й однородной координатой разложимого грассманова многочлена $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$ относительно базиса из мономов e_I будет I -й минор $\det X_I$ порядка m , где $X_I \subset X$ — подматрица, образованная столбцами с номерами $i_1, \dots, i_m$.

УПРАЖНЕНИЕ 14.22. Убедитесь в этом.

При умножении матрицы X слева на обратимую матрицу $C \in \text{GL}_m$ все $(m \times m)$ -миноры $\det X_I$ матрицы X умножаются на ненулевую константу $\det C$. Рассматриваемый с точностью до пропорциональности набор миноров $\det X_I$ называется *плюккеровыми координатами* задаваемой матрицей X точки грассманиана $\text{Gr}(m, d)$. Таким образом, плюккеровы координаты суть ограничения однородных координат в $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ на образ грассманиана при плюккеровом вложении $p_m : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$.

14.6.5. Стандартное аффинное покрытие и аффинные координаты. Аналогом i -й стандартной аффинной карты U_i проективного пространства⁰ $\mathbb{P}_n = \text{Gr}(1, n)$ на произвольном грассманиане $\text{Gr}(m, d)$ является множество U_I всех $m \times d$ матриц X с ненулевым минором $\det X_I$. В $\text{GL}_m(\mathbb{k})$ -орбите каждой такой матрицы X есть единственный представитель, имеющий в столбцах I единичную матрицу размера $m \times m$. Обозначим его $T^{(I)} \stackrel{\text{def}}{=} X_I^{-1} X$. Стоящие вне столбцов с номерами из I матричные элементы $t_{\mu\nu}^{(I)}$ матрицы $T^{(I)}$ называются *локальными аффинными координатами* точки $X \in \text{Gr}(m, d)$ в стандартной карте U_I , и всего их имеется $m(d - m)$. Плюккерovo вложение $p_m : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ биективно отображает карту $U_I \subset \text{Gr}(m, V)$ на пересечение образа $p_m(\text{Gr}(m, V))$ со стандартной аффинной картой $U_I \subset \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ на проективном пространстве.

⁰Она состоит из всех точек $(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n$ с $x_i \neq 0$. Каждая такая точка p однозначно представляется вектором, у которого $x_i = 1$, и остальные n координат этого вектора берутся в качестве локальных аффинных координат точки p в карте U_i , см. пример 16.4 на стр. 207 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2122/lec_16.pdf.

На геометрическом языке карта $U_I \subset \text{Gr}(m, V)$ состоит из всех подпространств $U \subset V$, которые изоморфно отображаются на I -е координатное подпространство $E_I \subset V$, натянутое на базисные векторы $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$, при проекции $\pi_I : V \rightarrow E_I$ вдоль дополнительного координатного подпространства $E_J \subset V$, натянутого на базисные векторы e_j с $j \notin I$. Подпространство $U \subset V$ лежит в стандартной карте U_I если и только если $U \cap E_J = 0$, и в каждом таком подпространстве U имеется единственный базис $u_1, \dots, u_m$, который проектируется в стандартный базис $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$ пространства E_I . Матрица $T^{(I)}$ составлена из координат этих векторов u_i .

14.6.6. Аффинная окрестность точки. Более общим образом, для любого $(d - m)$ -мерного векторного подпространства $W \subset V$ множество $U_W = \{U \in \text{Gr}(m, V) \mid U \cap W = 0\}$ является аффинным пространством над векторным пространством $\text{Hom}(V/W, W)$. В самом деле, любые два дополнительные к W подпространства U_1, U_2 изоморфно проектируются на V/W при факторизации $\pi_W : V \rightarrow V/W$. Поэтому у каждого класса $[v] = [v_1] = [v_2] \in V/W$ имеются единственные представители $v_1 \in U_1$ и $v_2 \in U_2$. Обозначая через $\overline{U_1 U_2} : V/W \rightarrow W$ линейное отображение, переводящее класс $[v] \in V/W$ в разность $v_2 - v_1 \in W$ этих представителей, мы сопоставляем каждой паре точек $U_1, U_2 \in U_W$ вектор $\overline{U_1 U_2} \in \text{Hom}(V/W, W)$. Очевидно, что $\overline{U_1 U_2} + \overline{U_2 U_3} = \overline{U_1 U_3}$ для всех $U_1, U_2, U_3 \in U_W$. Если зафиксировать любое «начальное» подпространство $U \in U_W$ и отождествить его с V/W при помощи изоморфизма $\pi_W|_U : U \xrightarrow{\sim} V/W$, а $\text{Hom}(V/W, W)$ отождествить с $\text{Hom}(U, W)$, то отображение векторизации с центром в U , переводящее каждую точку $U_1 \in U_W$ в её радиус вектор $\overline{U U_1} \in \text{Hom}(U, W)$, будет сопоставлять каждому дополнительному к W подпространству $U_1 \subset U \oplus W$ линейное отображение $U \rightarrow W$, графиком которого является подпространство U_1 . Очевидно, что такое сопоставление биективно. Поскольку $W \simeq V/U$, можно сказать, что каждая точка $U \in \text{Gr}(m, V)$ обладает аффинной окрестностью, получающейся «откладыванием» от U всевозможных векторов из пространства $\text{Hom}(U, V/U)$. Если зафиксировать какое-нибудь дополнительное к U подпространство W и представлять классы из V/U векторами из W , то результатом «откладывания» от U отображения $\tau : U \rightarrow W$ будет график $\Gamma_\tau = \{(u, \tau(u)) \in U \oplus W \mid u \in U\}$ отображения τ , представляющий собою дополнительное к W подпространство в $V = U \oplus W$.

14.6.7. Квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5$ и прямые в $\mathbb{P}_3$. Первым отличным от проективного пространства грассманианом является $\text{Gr}(2, 4)$, точками которого служат двумерные векторные подпространства U в $V = \mathbb{K}^4$ или, что то же самое, проективные прямые $\ell = \mathbb{P}(U)$ в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$. Грассманиан $\text{Gr}(2, 4)$ вкладывается в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ отображением Плюккера

$$p : \text{Gr}(2, 4) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V), \quad U \mapsto \Lambda^2 U, \quad (14-43)$$

которое переводит прямую $(ab) \subset \mathbb{P}_3$, являющуюся проективизацией двумерного векторного подпространства $U \subset V$ с базисом a, b , в одномерное подпространство $\Lambda^2 U \subset \Lambda^2 V$, порождённое грассмановым произведением $a \wedge b$. Согласно [предл. 14.4](#) на стр. 230, разложимость грассмановой квадратичной формы $\omega \in \Lambda^2 V$ на два линейных множителя равносильна тому, что $\omega \wedge \omega = 0$. Это соотношение задаёт в пространстве $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ *квадрику Плюккера*

$$P = V(q) = \{\omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0\}, \quad (14-44)$$

Симметричная билинейная форма $\tilde{q} : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \rightarrow \mathbb{K}$, которая является поляризацией уравнения этой квадрики, однозначно с точностью до пропорциональности определяется тем, что для всех $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2 V$ в одномерном векторном пространстве $\Lambda^4 V$ выполняется равенство

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad (14-45)$$

где e_1, e_2, e_3, e_4 — произвольный базис в V .

УПРАЖНЕНИЕ 14.23. Убедитесь, что задаваемая равенством (14-45) форма $\tilde{q}$ билинейна, симметрична, невырождена и при выборе другого базиса в V умножается на ненулевую константу. Напишите её матрицу Грама в стандартном базисе из мономов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$.

В координатах x_{ij} относительно стандартного базиса $e_{ij} = e_i \wedge e_j$, равенство $\omega \wedge \omega = 0$ для формы $\omega = \sum_{ij} x_{ij} e_{ij}$ имеет вид⁰ $x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0$, а отображение (14-43) переводит прямую (ab) , порождённую векторами a, b , строки координат которых в базисе $e_1, \dots, e_4$ составляют 2×4 матрицу $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, в грассманову квадратичную форму $a \wedge b$ с координатами $x_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$.

ЛЕММА 14.1

Две прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$ пересекаются если и только если их плюккеровы образы ортогональны относительно квадратичной формы (14-45).

Доказательство. Если $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$, то в V существует такой базис e_1, e_2, e_3, e_4 , что $\ell_1 = (e_1 e_2)$, а $\ell_2 = (e_3 e_4)$. Тогда $p(\ell_1) \wedge p(\ell_2) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. Если ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке a , то $\ell_1 = (ab)$, а $\ell_2 = (ac)$ для некоторых $b, c \in V$, и $p(\ell_1) \wedge p(\ell_2) = a \wedge b \wedge a \wedge c = 0$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 14.5

$P \cap T_p P = \{p(\ell') \mid \ell' \cap \ell \neq \emptyset\}$ для любой точки $p = p(\ell) \in P$.

ПРИМЕР 14.12 (связки и пучки прямых в $\mathbb{P}_3$)

Множество прямых в $\mathbb{P}_3$ называется *связкой*, если его плюккеров образ является двумерной плоскостью. Каждая такая плоскость $\pi \subset P$ линейно порождается тройкой неколлинеарных точек $a_i = p(\ell_i)$, $i = 1, 2, 3$. При этом $\pi = T_{a_1} P \cap T_{a_2} P \cap T_{a_3} P \subset P$. По лем. 14.1 и сл. 14.5 соответствующая связка прямых состоит из всех прямых, пересекающих каждую из трёх попарно пересекающихся прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 в $\mathbb{P}_3$. Три прямые в $\mathbb{P}_3$ попарно пересекаются ровно в двух случаях: когда они лежат в одной плоскости или когда они проходят через одну точку. Таким образом, есть два геометрически разных типа связок прямых на $\mathbb{P}_3$:

α -плоскость $\pi_\alpha(c) \subset P$, состоящая из всех прямых, проходящих через данную точку $c \in \mathbb{P}_3$

β -плоскость $\pi_\beta(\Pi) \subset P$, состоящая из всех прямых, лежащих в данной плоскости $\Pi \subset \mathbb{P}_3$.

Эти два семейства плоскостей на квадрике P таковы, что любые две плоскости одного типа пересекаются по точке: $\pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) = p(\Pi_1 \cap \Pi_2)$, $\pi_\alpha(c_1) \cap \pi_\alpha(c_2) = p((c_1 c_2))$, а две плоскости $\pi_\beta(\Pi)$, $\pi_\alpha(c)$ разных типов не пересекаются при $c \notin \Pi$, а при $c \in \Pi$ пересекаются по прямой

$$\lambda(c, \Pi) = \{p(\ell) \in P \mid c \in \ell \subset \Pi\}, \quad (14-46)$$

которая является плюккеровым образом пучка прямых, лежащих в плоскости Π и проходящих через точку $c \in \Pi$. Покажем, что все лежащие на квадрике P прямые имеют вид (14-46). Для этого рассмотрим конус $C = P \cap T_a P$ с вершиной в точке $a \in P$, образованный всеми проходящими через a прямыми, лежащими на P , и зафиксируем любое не проходящее через a трёхмерное

⁰См. прим. 14.10 на стр. 241.

проективное подпространство $H \subset T_a P$, см. рис. 14◊1. Пересечение $G = C \cap H$ является гладкой 1-планарной квадрикой в H , и любая проходящая через a прямая на P имеет вид $(ab) = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$ для некоторой точки $b \in G$ и плоскостей π_α, π_β натянутых на точку p и пару проходящих через b прямолинейных образующих квадрики G .

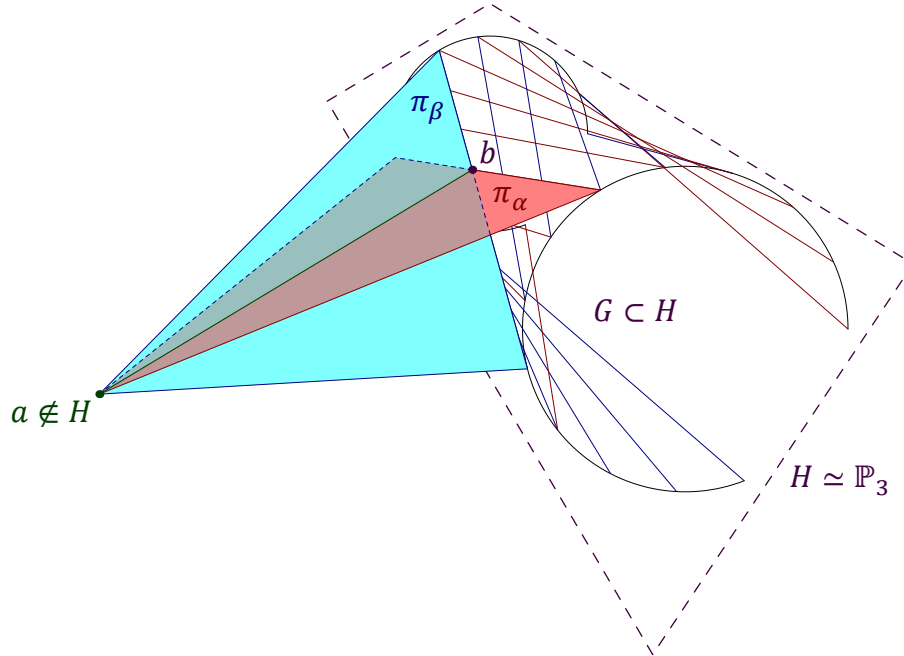


Рис. 14◊1. Конус $C = P \cap T_p P$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 14.1. Выберем базис E в $U \cap W$, дополним его множествами E' и E'' до базисов в U и W соответственно, и зафиксируем в V базис вида $E \sqcup E' \sqcup E'' \sqcup E'''$. Пространство $U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ состоит из линейных комбинаций тензорных мономов, составленных из базисных векторов, лежащих в E , и стало быть, совпадает с $(U \cap W)^{\otimes n}$.

Упр. 14.2. Это делается дословно также, как в [предл. 13.2](#) на стр. 213.

Упр. 14.3. Каждое линейное отображение $f: V \rightarrow C$ в коммутативную $\mathbb{K}$ -алгебру C однозначно поднимается по универсальному свойству тензорной алгебры до гомоморфизма алгебр $\tilde{f}: TV \rightarrow C$ по формуле $\tilde{f}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = f(v_1) \dots f(v_n)$. Так как в коммутативной алгебре $f(u)f(w) = f(w)f(u)$ для всех $u, w \in V$, гомоморфизм $\tilde{f}$ аннулирует все разности $u \otimes w - w \otimes u$ и пропускается через факторизацию $TV \twoheadrightarrow T/I_{\text{com}} \simeq SV$. Это доказывает выполнение универсального свойства. То, что SV и ι однозначно им определяются, устанавливается дословно так же, как в [предл. 13.2](#) на стр. 213.

Упр. 14.4. Для любого отображения множеств $\sigma: E \rightarrow C$ единственное отображение $\mathbb{K}[E] \rightarrow C$, совпадающее с σ на E , является подстановкой в многочлены от переменных $e \in E$ значений $e = \sigma(e) \in C$.

Упр. 14.5. Число целых неотрицательных решений $(m_1, \dots, m_d)$ уравнения $m_1 + m_2 + \dots + m_d = n$, равное $\binom{n+d-1}{d-1} = \binom{n+d-1}{n}$.

Упр. 14.6. Дословно те же аргументы, что и для тензорного умножения, см. [предл. 13.2](#) на стр. 213.

Упр. 14.7. Равенство

$$\begin{aligned} (\dots \otimes (u+w) \otimes (u+w) \otimes \dots) &= (\dots \otimes u \otimes u \otimes \dots) + (\dots \otimes w \otimes w \otimes \dots) + \\ &+ (\dots \otimes u \otimes w \otimes \dots) + (\dots \otimes w \otimes u \otimes \dots) \end{aligned}$$

показывает, что все суммы (14-7) лежат в $\mathcal{I}_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n}$. При $u = w = v$ сумма (14-7) превращается в $2(\dots \otimes v \otimes v \otimes \dots)$. Наконец, по модулю сумм (14-7)

$$\dots v \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_\ell \otimes v \otimes \dots \equiv (-1)^\ell (\dots v \otimes v \otimes u_1 \otimes \dots \otimes u_\ell \dots).$$

Упр. 14.8. Это аналогично [упр. 14.7](#).

Упр. 14.9. Дословно те же аргументы, что и для тензорного умножения, см. [предл. 13.2](#) на стр. 213.

Упр. 14.12. Стабилизатор каждого слагаемого состоит из $\prod_{e \in E} m(e)!$ перестановок одинаковых базисных векторов между собою.

Упр. 14.13. Так как сопряжение $\text{Ad}_g: S_n \rightarrow S_n, h \mapsto ghg^{-1}$, является биекцией и $\text{sgn}(ghg^{-1}) = \text{sgn}(g)$, мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \text{sym}_n \circ g &= \left(\frac{1}{n!} \sum_{h \in S_n} h \right) g = \left(\frac{1}{n!} \sum_{h \in S_n} ghg^{-1} \right) g = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{h \in S_n} gh = g \left(\frac{1}{n!} \sum_{h \in S_n} h \right) = g \circ \text{sym}_n, \\ \text{alt}_n \circ g &= \left(\frac{1}{n!} \sum_{h \in S_n} \text{sgn}(h) h \right) g = \left(\frac{1}{n!} \sum_{h \in S_n} \text{sgn}(h) ghg^{-1} \right) g = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{h \in S_n} \text{sgn}(h) gh = g \left(\frac{1}{n!} \sum_{h \in S_n} \text{sgn}(h) h \right) = g \circ \text{alt}_n. \end{aligned}$$

Упр. 14.14. Выберем в V базис $e_1, \dots, e_d$. Покажите, что $(d^3 - d)/3$ коммутаторов $[[e_i, e_j], e_k]$, где $i < j$ и $i \leq k$, составляют базис векторного подпространства $\text{Lie}^3 V \subset V^{\otimes 3}$. Затем убедитесь в том, что линейная оболочка S_3 -орбиты каждого коммутатора $c = [u, [v, w]]$ является двумерным векторным пространством, на котором S_3 действует как группа треугольника с вершинами в $c, \tau c, \tau^2 c$, и у этого действия нет S_3 -инвариантных одномерных подпространств. Отсюда вытекает, что линейные оболочки S_3 -орбит двух коммутаторов c_1 и c_2 либо совпадают, либо имеют нулевое пересечение. Выведите из этого, что сумма S_3 -орбит базисных коммутаторов $[[e_i, e_j], e_k]$ прямая и совпадает с $\text{Lie}^3 V \oplus \tau \text{Lie}^3 V$. Так как последняя сумма содержится в $\text{im } \pi_\Delta$ и $\dim \text{im } \pi_\Delta = d^3 - \dim \text{Sym}^3 V - \dim \text{Alt}^3 V = 2(d^3 - d)/3$, это включение является равенством.

Упр. 14.15. Для каждого $v \in V$ отображение $\text{ad}_v : TV \rightarrow TV, x \mapsto [v, x] = v \otimes x - x \otimes v$ действует на тензорные произведения по правилу Лейбница:

$$\begin{aligned} \text{ad}_v(x \otimes y) &= v \otimes x \otimes y - x \otimes y \otimes v = \\ &= v \otimes x \otimes y - x \otimes v \otimes y + x \otimes v \otimes y - x \otimes y \otimes v = \text{ad}_v(x) \otimes y + x \otimes \text{ad}_v(y). \end{aligned}$$

Поэтому и на коммутаторы оно тоже действует по правилу Лейбница:

$$\begin{aligned} \text{ad}_v([x, y]) &= \text{ad}_v(x \otimes y - y \otimes x) = \text{ad}_v(x \otimes y) - \text{ad}_v(y \otimes x) = \\ &= \text{ad}_v(x) \otimes y + x \otimes \text{ad}_v(y) - \text{ad}_v(y) \otimes x - y \otimes \text{ad}_v(x) = [\text{ad}_v(x), y] + [x, \text{ad}_v(y)]. \end{aligned}$$

В силу знакопеременности коммутаторов, это равенство переписывается как

$$[v, [x, y]] = [[v, x], y] + [x, [v, y]] = -[y, [v, x]] - [x, [y, v]],$$

а это и есть тождество Якоби $[v, [x, y]] + [y, [v, x]] + [x, [y, v]] = 0$.

Упр. 14.16. Переговорите рассуждения из [прим. 0.2](#) на стр. 8.

Упр. 14.17. Первое вытекает из равенств $\text{pl}_u \text{pl}_w f(v) = \tilde{f}(u, w, v^{n-1}) = \text{pl}_w \text{pl}_u f(v)$. Вторая формула трилинейна по v, f, g , и её достаточно проверить для $v = e_i, f = x_1^{m_1!} \dots x_d^{m_d!}, g = x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$.

Упр. 14.20. Выберем в V базис $e_1, \dots, e_n$. Если в разложении ω по базисным мономам есть моном, не содержащий вектора e_i , то $e_i \omega \neq 0$.

Упр. 14.23. Билинейность и невырожденность очевидны, симметричность вытекает из того, что однородные грассмановы многочлены степени два коммутируют друг с другом. Ненулевые элементы матрицы Грама исчерпываются $q_{12,34} = q_{14,23} = 1, q_{13,24} = -1$ и симметричными им.