§9. Пространство с оператором

9.1. Классификация пространств с оператором. Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле, V — конечномерное векторное пространство над $\Bbbk$, а $F : V \to V$ — линейный эндоморфизм пространства V. Мы будем называть пару (F, V) *пространством с оператором* или просто *оператором* над $\Bbbk$. Линейное отображение $C : U_1 \to U_2$ между пространствами с операторами (F_1, U_1) и (F_2, U_2) называется *гомоморфизмом*, если $F_2 \circ C = C \circ F_1$. В этом случае говорят, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "C"] & U_2 \\ U_1 \arrow[u, "F_1"] \arrow[r, "C"'] & U_2 \arrow[u, "F_2"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна[1]. Если гомоморфизм C биективен, операторы $F_1 : U_1 \to U_1$ и $F_2 : U_2 \to U_2$ называются *изоморфными* или *подобными*. Поскольку в этом случае $F_2 = CF_1C^{-1}$, то говорят, что оператор F_2 получается из F_1 *сопряжением* посредством изоморфизма C.

Подпространство $U \subset V$ называется *F-инвариантным*, если $F(U) \subset U$. В этом случае пара $(F|_U, U)$ тоже является пространством с оператором и вложение $U \hookrightarrow V$ представляет собою гомоморфизмом пространств с операторами. Оператор, не имеющий инвариантных подпространств, отличных от нуля и всего пространства, называется *неприводимым* или *простым*.

Упражнение 9.1. Покажите, что оператор умножения на класс $[t]$ в факторкольце $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ неприводим.

Оператор $F : V \to V$ называется *разложимым*, если V раскладывается в прямую сумму двух ненулевых F-инвариантных подпространств, и *неразложимым* — в противном случае. Все простые операторы неразложимы.

Упражнение 9.2. Покажите, что оператор умножения на класс $[t]$ в факторкольце $\Bbbk[t]\,/\,(t^n)$ при всех $n > 1$ приводим, но неразложим.

Таким образом, над любым полем $\Bbbk$ имеются неразложимые пространства с оператором любой размерности. Очевидно, что всякое пространство с оператором является прямой суммой неразложимых.

9.1.1. Пространство с оператором как $\Bbbk[t]$-модуль. Задание на пространстве V линейного оператора $F : V \to V$ эквивалентно заданию на V структуры модуля над кольцом многочленов $\Bbbk[t]$. В самом деле, структура $\Bbbk[t]$-модуля включает в себя операцию умножения векторов на переменную t: $v \mapsto tv$, которая является линейным отображением $V \to V$. Если обозначить его буквой F, то умножение векторов на произвольный многочлен $f(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_mt^m$ происходит по правилу $f(t)\,v = a_0v + a_1Fv + \ldots + a_mF^mv = f(F)\,v$, где

$$f(F) = a_0\mathrm{Id}_V + a_1F + \ldots + a_mF^m$$

есть результат вычисления многочлена f на элементе F в $\Bbbk$-алгебре $\mathrm{End}(V)$. Наоборот, каждый линейный оператор $F : V \to V$ задаёт на V структуру $\Bbbk[t]$-модуля, в котором умножение вектора $v \in V$ на многочлен $f(t) \in \Bbbk[t]$ происходит по формуле $f(t)\,v \overset{\text{def}}{=} f(F)\,v$. Мы будем обозначать такой $\Bbbk[t]$-модуль через V_F.

[1] Произвольная диаграмма отображений называется *коммутативной*, если композиции отображений вдоль любых двух путей с общим началом и концом одинаковы.

Гомоморфизм $C : V_F \to W_G$ между $\Bbbk[t]$-модулями, которые задаются линейными операторами $F : V \to V$ и $G : W \to W$, представляет собою $\Bbbk$-линейное отображение $C : V \to W$, перестановочное с умножением векторов на t, т. е. такое что $C \circ F = G \circ C$. Мы заключаем, что гомоморфизмы пространств с операторами — это то же самое, что $\Bbbk[t]$-линейные отображения между задаваемыми этими операторами $\Bbbk[t]$-модулями. В частности, операторы $F : V \to V$ и $G : W \to W$ изоморфны, если и только если изоморфны $\Bbbk[t]$-модули V_F и W_G.

Векторное подпространство $U \subset V$ является $\Bbbk[t]$-подмодулем в модуле V_F, если и только если оператор умножения на t переводит U в себя, т. е. тогда и только тогда, когда это подпространство F-инвариантно. Аналогично, разложимость V в прямую сумму инвариантных подпространств означает разложимость $\Bbbk[t]$-модуля V_F в прямую сумму $\Bbbk[t]$-подмодулей.

Если векторное пространство V конечномерно над $\Bbbk$, то $\Bbbk[t]$-модуль V_F конечно порождён, поскольку любой набор векторов, линейно порождающих V над $\Bbbk$, порождает и модуль V_F над $\Bbbk[t]$. В каноническом разложении конечномерного над $\Bbbk$ модуля V_F в прямую сумму свободного модуля и подмодуля кручения[1] свободное слагаемое отсутствует, так как оно бесконечномерно над $\Bbbk$. Таким образом, из теоремы об элементарных делителях[2] и теоремы об инвариантных множителях[3] мы получаем следующие два эквивалентных друг другу описания пространств с оператором над произвольным полем $\Bbbk$.

Теорема 9.1 (жорданово описание в терминах элементарных делителей)
Любой линейный оператор в конечномерном векторном пространстве над произвольным полем $\Bbbk$ подобен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме факторколец

$$\Bbbk[t]/(p_1^{m_1}(t)) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/(p_k^{m_k}(t)), \tag{9-1}$$

где все многочлены $p_\nu(t) \in \Bbbk[t]$ приведены и неприводимы, и слагаемые могут повторяться. Операторы умножения на класс $[t]$, действующие в суммах

$$\Bbbk[t]/(p_1^{m_1}(t)) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/(p_k^{m_k}(t)) \quad \text{и} \quad \Bbbk[t]/(q_i^{n_1}(t)) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/(q_\ell^{n_\ell}(t))$$

изоморфны, если и только если $k = \ell$ и прямые слагаемые можно переставить так, что $p_\nu = q_\nu$ и $m_\nu = n_\nu$ при всех ν. □

Теорема 9.2 (фробениусово описание в терминах инвариантных множителей)
Любой линейный оператор в конечномерном векторном пространстве над произвольным полем $\Bbbk$ подобен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме факторколец

$$\Bbbk[t]/(f_1) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/(f_r), \tag{9-2}$$

где $r \in \mathbb{N}$, а $f_1, \ldots, f_r \in \Bbbk[t]$ — такие приведённые многочлены, что $f_i \mid f_j$ при $i < j$. Два таких оператора на пространствах $\Bbbk[t]/(f_1) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/(f_r)$ и $\Bbbk[t]/(g_1) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/(g_s)$ подобны, если и только если $r = s$ и $f_i = g_i$ при всех i. □

[1] См. теор. 6.5 на стр. 116.
[2] См. теор. 6.4 на стр. 114.
[3] См. 6-12 на стр. 118.

9.1.2. Элементарные делители и инвариантные множители. Многочлены $f_1, \dots , f_r \in \Bbbk[t]$ из теор. 9.2 называются *инвариантными множителями* оператора $F : V \to V$, а дизъюнктное объединение[1] всех многочленов $p_\nu^{m_\nu}$ из теор. 9.1 называется *набором элементарных делителей* и обозначается через $\mathcal{E}\ell(F)$. Инвариантные множители и элементарные делители связаны китайской теоремой об остатках: $\Bbbk[t]/(f_1) \oplus \dots \oplus \Bbbk[t]/(f_r) \simeq \bigoplus_{p^m \in \mathcal{E}\ell(F)} \Bbbk[t]/(p^m)$ и однозначно определяют друг друга, как это объяснялось в n° 6.3 на стр. 114.

Следствие 9.1
Линейные операторы F и G подобны тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}\ell(F) = \mathcal{E}\ell(G)$. □

Следствие 9.2
Линейный оператор неразложим тогда и только тогда, когда он подобен оператору умножения на класс $[t]$ в факторкольце $\Bbbk[t]/(p^m)$, где $p \in \Bbbk[t]$ неприводим и приведён. Неразложимый оператор неприводим, если и только если $m = 1$. □

Следствие 9.3
Многочлен $f \in \Bbbk[t]$ тогда и только тогда аннулирует оператор $F : V \to V$, когда он делится на все элементарные делители оператора F. Аннулирующий оператор F приведённый многочлен наименьшей степени равен последнему инвариантному множителю f_r из разложения (9-2). □

Упражнение 9.3. Пусть пространство с оператором (F, V) разлагается в прямую сумму F-инвариантных подпространств U_i. Покажите, что $\mathcal{E}\ell(F) = \bigsqcup_i \mathcal{E}\ell(F|_{U_i})$.

9.1.3. Отыскание элементарных делителей. Фиксируем в пространстве V какой-либо базис $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots , v_n)$ над полем $\Bbbk$ и обозначим через $F_{\boldsymbol{v}} \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ матрицу оператора $F : V \to V$ в этом базисе. Напомню[2], что она однозначно определяется тем, что $F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\, F_{\boldsymbol{v}}$ или, подробнее,

$$(F(v_1), \dots , F(v_n)) = (v_1, \dots , v_n)\, F_{\boldsymbol{v}} \,.$$

Так как векторы v_i линейно порождают пространство V над $\Bbbk$, они тем более порождают модуль V_F над $\Bbbk[t]$, и $V_F = \Bbbk[t]^n/R_{\boldsymbol{v}}$, где подмодуль $R_{\boldsymbol{v}} = \ker \pi_{\boldsymbol{v}} \subset \Bbbk[t]^n$ является ядром эпиморфизма[3] $\pi_{\boldsymbol{v}} : \Bbbk[t]^n \to V_F$, переводящего стандартный базисный вектор $e_i \in \Bbbk[t]^n$ в вектор $v_i \in V$, и состоит из всех $\Bbbk[t]$-линейных соотношений между векторами $\boldsymbol{v}$ в V_F. Таким образом, инвариантные множители оператора F суть отличные от единицы инвариантные множители подмодуля $R_{\boldsymbol{v}} \subset \Bbbk[t]^n$.

Лемма 9.1
Если записывать элементы свободного модуля $\Bbbk[t]^n$ в виде координатных столбцов с элементами из $\Bbbk[t]$, то подмодуль соотношений $\ker \pi_{\boldsymbol{v}} \subset \Bbbk[t]^n$ линейно порождается над $\Bbbk[t]$ столбцами матрицы $tE - F_{\boldsymbol{v}}$.

Доказательство. Пусть $F_{\boldsymbol{v}} = \left(f_{ij}\right)$. Тогда j-й столбец матрицы $tE - F_{\boldsymbol{v}}$ выражается через стандартный базис $\boldsymbol{e}$ модуля $\Bbbk[t]^n$ как $te_j - \sum_{i=1}^n e_i f_{ij}$. Применяя к этому вектору гомоморфизм $\pi_{\boldsymbol{v}}$,

[1] Каждый элементарный делитель p^m входит в него ровно столько раз, сколько прямых слагаемых вида $\Bbbk[t]/(p^m)$ имеется в разложении (9-1).

[2] См. n° 5.3.3 на стр. 99.

[3] См. n° 6.2 на стр. 111.

получаем $\pi_v\Big(te_j - \sum_{i=1}^n e_i f_{ij}\Big) = tv_j - \sum_{i=1}^n v_i f_{ij} = Fv_j - \sum_{i=1}^n v_i f_{ij} = 0$. Тем самым все столбцы матрицы $tE - F_v$ лежат в $\ker \pi_v$. Рассмотрим теперь произвольный вектор $h(t) \in \Bbbk[t]^n$ и запишем его в виде многочлена от t с коэффициентами в $\Bbbk^n$ (ср. с n° 8.4.5 на стр. 140):

$$h(t) = t^m h_m + t^{m-1} h_{m-1} + \ldots + th_1 + h_0\,, \text{ где } h_i \in \Bbbk^n\,.$$

Этот многочлен можно поделить слева с остатком на многочлен $tE - F_v$ точно также, как делят «уголком» обычные полиномы с постоянными коэффициентами[1]. В результате получим равенство вида $t^m h_m + \ldots + th_1 + h_0 = (tE - F_v) \cdot (t^{m-1} g_{m-1} + \ldots + tg_1 + g_0) + r$, где $g_i, r \in \Bbbk^n$.

Упражнение 9.4. Убедитесь в этом и проверьте, что остаток от деления $h(t)$ на $tE - A$, где $A \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$, равен $A(\ldots A(Ah_m + h_{m-1}) + \ldots + h_1) + h_0 = A^m h_m + \ldots + Ah_1 + h_0 = h(A)$.

Иными словами, вычитая из любого столбца $h(t) \in \Bbbk[t]^n$ подходящую $\Bbbk[t]$-линейную комбинацию столбцов матрицы $tE - F_v$, можно получить вектор $r \in \Bbbk^n$, т. е. $\Bbbk$-линейную комбинацию $r = \sum \lambda_i e_i$ стандартных базисных векторов $e_i \in \Bbbk[t]^n$. Так как столбцы матрицы $tE - F_v$ лежат в $\ker \pi_v$, мы заключаем, что $\pi_v(h(t)) = \pi_v(r) = \sum \lambda_i v_i$. Если $h \in \ker \pi_v$, то $\sum \lambda_i v_i = 0$, что возможно только когда все $\lambda_i = 0$, ибо векторы $v_i \in V$ линейно независимы над $\Bbbk$. Тем самым $r = 0$ для всех $h \in \ker \pi_v$, т. е. $\ker \pi_v$ содержится в $\Bbbk[t]$-линейной оболочке столбцов матрицы $tE - F_v$. □

Следствие 9.4

Множество $\mathcal{E}\ell(F)$ является дизъюнктным объединением степеней p^m неприводимых приведённых многочленов из разложений инвариантных множителей $f_i(t)$ матрицы $tE - F_v$. Последние равны диагональным элементам $d_{ii}(t)$ нормальной формы Смита[2] матрицы $tE - F_v$ и могут быть вычислены по формулам[3] $f_i(t) = \Delta_i(tE - F_v)/\Delta_{i-1}(tE - F_v)$, где $\Delta_i(tE - F_v)$ означает нод всех $k \times k$ миноров матрицы $tE - F_v$. □

9.1.4. Характеристический многочлен. Произведение всех элементарных делителей линейного оператора $F : V \to V$, по сл. 9.4 равное определителю $\Delta_n = \det(tE - F_v)$, где F_v — матрица оператора F в каком-либо базисе $\boldsymbol{v}$ пространства V, называется *характеристическим многочленом* оператора F и обозначается

$$\chi_F(t) \overset{\text{def}}{=} \det(tE - F_v) = \prod_{p^m \in \mathcal{E}\ell(F)} p^m\,.$$

Из предыдущего вытекает, что характеристический многочлен не зависит от выбора базиса и что подобные операторы имеют одинаковые характеристические многочлены.

Упражнение 9.5. Убедитесь прямым вычислением, что для всех $A \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$, $C \in \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ выполняется равенство $\det(tE - CAC^{-1}) = \det(tE - A)$.

Пример 9.1 (характеристический многочлен разложимого оператора)

Если пространство с оператором (F, V) распадается в прямую сумму пространств с операторами (G, U) и (H, W), то в базисе пространства $V = U \oplus W$, который получен объединением базиса в U и базиса в W, матрица $tE - F$ имеет блочно диагональный вид

$$tE - F = \begin{pmatrix} tE - G & 0 \\ 0 & tE - H \end{pmatrix}.$$

[1] См. n° 2.2 на стр. 40.

[2] См. n° 6.1.1 на стр. 103.

[3] См. прим. 8.3 на стр. 134.

Раскладывая её определитель по первым $\dim U$ столбцам[1], заключаем, что $\chi_F(t) = \chi_G(t)\,\chi_H(t)$. Это вполне согласуется с упр. 9.3 на стр. 145.

Упражнение 9.6. Убедитесь, что для любого приведённого многочлена $f \in \Bbbk[t]$ характеристический многочлен оператора умножения на класс $[t]$ в факторкольце $\Bbbk[t]/(f)$ равен f.

9.1.5. Минимальный многочлен. Для каждого неприводимого приведённого многочлена $p \in \Bbbk[t]$ обозначим через $m_p(F)$ максимальный показатель m, с которым p^m присутствует в наборе $\mathcal{E}\ell(F)$ элементарных делителей оператора F, а для тех неприводимых приведённых многочленов $p \in \Bbbk[x]$, степени которых не представлены в $\mathcal{E}\ell\,F$, положим $m_p(F) = 0$. Таким образом, $m_p(F) = 0$ для всех неприводимых приведённых $p \in \Bbbk[x]$ кроме конечного числа. В этих обозначениях сл. 9.3 на стр. 145 можно переформулировать следующим образом: аннулирующий оператор F приведённый многочлен $\mu_F(t)$ наименьшей возможной степени совпадает с инвариантным множителем оператора F наибольшей степени и равен

$$\mu_F(t) = f_r = \prod_p p^{m_p(F)}\,, \tag{9-3}$$

где произведение берётся по всем приведённым неприводимым $p \in \Bbbk[t]$. Многочлен $\mu_F(t)$ называется *минимальным многочленом* оператора $F : V \to V$. Он порождает ядро гомоморфизма

$$\mathrm{ev}_F : \Bbbk[t] \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)\,, \quad f(t) \mapsto f(F)\,,$$

вычисления многочленов на операторе F и делит в $\Bbbk[t]$ все аннулирующие оператор F многочлены, включая характеристический многочлен $\chi_F(t) = \det(tE - F)$. Согласно сл. 9.4 на стр. 146 инвариантный множитель наибольшей степени оператора F равен отношению $\det(tE - F)$ к нод всех миноров порядка $n-1$ матрицы $tE - F$, где $n = \dim V$. Таким образом, $\chi_F/\mu_F = \Delta_{n-1}(tE - F)$ для любого ненулевого линейного оператора F на n-мерном векторном пространстве.

Пример 9.2 (отыскание минимального многочлена)
Вычисление минимального многочлена оператора $F : V \to V$ по явной детерминантной формуле довольно трудоёмко, и на практике обычно используют следующие соображения. Для каждого вектора $v \in V$ существует такой приведённый многочлен $\mu_{v,F}(t)$ наименьшей степени, что $\mu_{v,F}(F)v = 0$. Чтобы написать его явно, надо найти наименьшее такое $k \in \mathbb{N}$, что вектор $F^k v$ линейно выражается через векторы $v, Fv, \dots, F^{k-1}v$. Если это выражение имеет вид $F^k v = \mu_1 F^{k-1}v + \dots + \mu_{k-1}Fv + \mu_k v$, то $\mu_{v,F}(t) = t^k - \mu_1 t^{k-1} - \dots - \mu_{k-1}t - \mu_k$.

Упражнение 9.7. Убедитесь, что любой аннулирующий оператор F многочлен делится на все многочлены $\mu_{v,F}$, где $v \in V$.

Мы заключаем, что минимальный многочлен μ_F оператора F равен нок многочленов $\mu_{v_i,F}$ каких-нибудь векторов $v = v_1, \dots, v_m$, линейно порождающих пространство V над $\Bbbk$.

Упражнение 9.8. Убедитесь в этом.

Вычислим, к примеру, минимальный многочлен оператора $F : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, заданного в стандартном базисе $e_1, \dots, e_4$ матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

[1] См. формулу (8-16) на стр. 136.

Векторы[1]

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad Fe_1 = \begin{pmatrix} -2\\4\\1\\3 \end{pmatrix}, \quad F^2e_1 = \begin{pmatrix} 4\\0\\3\\-3 \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Чтобы выяснить, выражается ли через них вектор[2]

$$F^3e_1 = \begin{pmatrix} -8\\16\\7\\9 \end{pmatrix},$$

необходимо решить неоднородную систему с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array}\right).$$

Методом Гаусса преобразуем эту матрицу к приведённому ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

и получаем решение $(-4, 4, 1)$, т. е. $F^3e_1 = -4e_1 + 4Fe_1 + F^2e_1$. Таким образом, минимальный многочлен от оператора F, аннулирующий вектор e_1, равен $F^3 - F^2 - 4F + 4E$. Вычисляя

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -8 & -9 & 9 & 9 \\ 16 & 24 & -16 & -16 \\ 7 & 14 & -6 & -7 \\ 9 & 9 & -9 & -8 \end{pmatrix},$$

убеждаемся, что $A^3 - A^2 - 4A + 4E = 0$. Тем самым, $\mu_F = t^3 - t^2 - 4t + 4$.

Упражнение 9.9. Как действует умножение на класс $[t]$ в факторкольце $\Bbbk[t]/(t-\lambda)$ и в прямой сумме конечного множества таких факторколец?

9.1.6. Линейные операторы над алгебраически замкнутым полем. Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то неприводимые приведённые многочлены в $\Bbbk[t]$ исчерпываются линейными двучленами $(t-\lambda)$, где $\lambda \in \Bbbk$. Оператор умножения на класс $[t] = [\lambda]+[t-\lambda]$ в факторкольце $\Bbbk[t]/\big((t-\lambda)^m\big)$ является суммой скалярного оператора $\lambda\,\mathrm{Id} : [g] \mapsto \lambda[g]$, умножающего все векторы на λ, и оператора умножения на класс $[t-\lambda]$, который действует на состоящий из векторов $e_i = \big[(t-\lambda)^{m-i}\big]$, $1 \leqslant i \leqslant m$, базис пространства $\Bbbk[t]/\big((t-\lambda)^m\big)$ по правилу

$$0 \leftarrow\!\shortmid e_1 \leftarrow\!\shortmid e_2 \leftarrow\!\shortmid e_3 \leftarrow\!\shortmid \dots \leftarrow\!\shortmid e_{m-1} \leftarrow\!\shortmid e_m\,. \tag{9-4}$$

[1]Векторы Fe_1 и F^2e_1 суть первые столбцы матриц A и A^2.
[2]Это первый столбец матрицы A^3.

Таким образом, умножение на класс $[t]$ задаётся в базисе $e_1, \dots, e_n$ матрицей

$$J_m(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{9-5}$$

которая называется *жордановой клеткой* размера m с *собственным числом* λ. По теор. 9.1 каждый линейный оператор F над алгебраически замкнутым полем подобен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме факторколец вида $\Bbbk[t]/\big((t-\lambda)^m\big)$, и два таких оператора подобны, если и только если прямые суммы отличаются друг от друга перестановкой слагаемых. На языке матриц сказанное означает, что любая квадратная матрица A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ сопряжена блочно диагональной матрице, по главной диагонали которой располагаются жордановы клетки (9-5), причём эта блочно диагональная матрица однозначно с точностью до перестановки клеток определяется матрицей A. Она называется *жордановой нормальной формой* матрицы A. Две матрицы сопряжены, если и только если у них одинаковые с точностью до перестановки клеток жордановы нормальные формы.

Объединение всех жордановых клеток оператора $F : V \to V$ с заданным собственным числом $\lambda \in \Bbbk$ представляет собою матрицу, описывающую действие оператора F на подмодуле $(t-\lambda)$-кручения, который обозначается $K_\lambda \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \exists\, m \in \mathbb{N} : (\lambda \operatorname{Id} - F)^m v = 0\}$ и называется *корневым подпространством* оператора F, отвечающим собственному числу λ. Как $\Bbbk[t]$-модуль он изоморфен прямой сумме $\Bbbk[t]/((t-l)^{m_1}) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/((t-l)^{m_\ell})$, в которой собраны все элементарные делители оператора F вида $(t-\lambda)^m$. Упорядоченный по нестрогому убыванию $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_\ell$ набор показателей $(m_1, \dots, m_\ell)$ называется *цикловым типом* корневого подпространства K_λ. Его удобно изображать диаграммой Юнга из строк длины $m_1, \dots, m_\ell$. Эти показатели в точности равны размерам жордановых клеток с оператора F с собственным числом λ. Наибольший из них m_1 равен кратности корня $t = \lambda$ в минимальном многочлене $\mu_F(t)$ оператора F и и обозначается m_λ. Сумма $m_1 + \ldots + m_\ell$ всех показателей равна кратности того же корня $t = \lambda$ в характеристическом многочлене $\chi_F(t)$. Обратите внимание, что характеристический и минимальный многочлены имеют одинаковый набор корней. Он называется *спектром* оператора F и обозначается $\operatorname{Spec} F$, а сами корни $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ называются *собственными числами* или *собственными значениями* оператора F.

По лем. 6.3 на стр. 117 высота $\Bbbk$-го столбца диаграммы $(m_1, \dots, m_\ell)$ равна размерности векторного пространства $\ker(F - \lambda E)^k / \ker(F - \lambda E)^{k-1}$ над полем $\Bbbk[t]/(t-\lambda) \simeq \Bbbk$, т. е. разности $\dim\ker(F-\lambda E)^k - \dim\ker(F-\lambda E)^{k-1}$. Таким образом, для отыскания жордановой нормальной формы оператора F над алгебраически замкнутым полем достаточно взять какой-нибудь аннулирующий оператор F многочлен[1] $f \in \Bbbk[t]$, разложить его на линейные множители:

$$f(t) = \prod_\lambda (t-\lambda)^{m(\lambda)}$$

и для каждого корня λ многочлена f вычислить размерности $d_k = \dim\ker(F-\lambda E)^k$ для всех таких $k \geqslant 1$, что $d_k > d_{k-1}$, где мы полагаем $d_0 = 0$. При наступлении равенства[2] $d_{k+1} = d_k$,

[1] Например, характеристический многочлен $\chi_F(t) = \det(tE - F)$.

[2] А оно заведомо наступит при некотором $k \leqslant m(\lambda)$.

вычисление прекращается. Размеры $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_\ell$ жордановых клеток оператора F с собственным числом λ равны длинам строк диаграммы Юнга, k-тый столбец которой имеет длину $d_k - d_{k-1}$.

Пример 9.3 (отыскание жордановой нормальной формы)
Найдём жордановы нормальные формы матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ -9 & -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & 7 & 1 \\ -6 & -5 & -8 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -9 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя след, сумму главных 2×2-миноров, сумму главных 3×3-миноров и определитель каждой из матриц, находим характеристические многочлены, после чего раскладываем их на линейные множители:

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= t^4 + t^3 - 7t^2 - 13t - 6 = (x+1)^2(x+2)(x-3)\,, \\ \chi_B(t) &= t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 4t + 4 = (x+1)^2(x-2)^2\,, \\ \chi_C(t) &= t^4 + 5t^3 + 6t^2 - 4t - 8 = (t-1)(t+2)^3\,. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица A имеет два одномерных корневых подпространства с собственными числами -2 и 3 и двумерное корневое подпространство с собственным числом -1, цикловой типа которого (2) или $(1,1)$. Первому случаю отвечает $\dim\ker(A+E) = 1$, или $\operatorname{rk}(A+E) = 3$, а второму — $\dim\ker(A+E) = 2$, или $\operatorname{rk}(A+E) = 2$. Так как левый верхний угловой 3×3 минор матрицы $A + E$ равен

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -9 & 0 & 8 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 8 - 3 - 9 = -4\,,$$

мы заключаем, что имеет место первое, т. е. у A одна жорданова клетка размера 2×2 с собственным числом -1, и жорданова нормальная форма матрицы A такова:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица B имеет два двумерных корневых подпространства с собственными числами $\lambda = -1, 2$. Их цикловые типы, как и выше, определяются размерностями ядер матриц

$$(B+E) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 & 1 \\ 6 & 5 & 7 & 1 \\ -6 & -5 & -7 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (B-2E) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 1 \\ -6 & -5 & -10 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку первая матрица имеет ранг 2, а вторая — 3, мы заключаем, что B имеет две клетки 1×1 с собственным числом -1 и одну клетку 2×2 с собственным числом 2, т. е. жорданова нормальная форма матрицы B такова:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица C имеет одну жорданову клетку 1×1 с собственным числом 1 и трёхмерное корневое подпространство с собственным числом -2, цикловой тип которого может быть (3), или (2, 1), или (1, 1, 1). Эти случаи тоже отличаются друг от друга размерностью ядра оператора $C + 2E$, которая равна для них соответственно 1, 2, или 3. Так как ранг матрицы

$$C + 2E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \\ -6 & 3 & 1 & -1 \\ -9 & 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

равен 3, мы заключаем, что имеет место первый случай, и жорданова нормальная форма матрицы C такова:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.1.7. Нормальные формы матриц над незамкнутыми полями. Так как матрица умножения на t в факторкольце $k[x]/(f)$, где $f = t^m + a_1 t^{m-1} + \ldots + a_m$, имеет в базисе из классов многочленов $t^{m-1}, \ldots, t, 1$ вид

$$F(f) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & & & \\ -a_2 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{d-1} & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_d & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9-6}$$

из теор. 9.2 на стр. 144 вытекает, что каждая матрица над произвольным полем $\Bbbk$ подобна единственной блочно диагональной матрице, составленной из блоков $F(f_1), \ldots, F(f_r)$ вида (9-6), где $f_i \mid f_j$ при $i < j$. Такая блочно диагональная матрица называется *фробениусовой нормальной формой*. Обратите внимание, что последний многочлен f_r в нормальной форме Фробениуса равен минимальному многочлену μ_F оператора F.

Аналогом жордановой клетки (9-5) над произвольным полем $\Bbbk$ является матрица умножения на класс $[t]$ в факторкольце $\Bbbk[t]/(p^m)$, где $p = t^d + a_1 t^{d-1} + \ldots + a_d \in \Bbbk[t]$ — неприводимый приведённый многочлен, записанная в базисе

$$p^{m-1}t^{d-1}, \ldots, p^{m-1}t, p^{m-1},\ p^{m-2}t^{d-1}, \ldots, p^{m-2}t, p^{m-2},\ \ldots, \ldots, \ldots,\ t^{d-1}, \ldots, t, 1\,, \tag{9-7}$$

который состоит из m последовательных фрагментов вида $p^k t^{m-1}, \ldots, p^k t, p^k$ длины d, получающихся из самого правого фрагмента $t^{d-1}, \ldots, t, 1$ умножением на p^k, где $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Упражнение 9.10. Убедитесь, что классы многочленов (9-7) действительно образуют базис в $\Bbbk[t]/(p^m)$.

Так как умножение на t переводит класс $p^k t^\ell$ в классы многочленов

$$
\begin{aligned}
p^k t^{\ell+1}&, \text{ при } 0 \leqslant \ell \leqslant d-2,\\
p^{k+1} - a_1 p^k t^{d-1} + \ldots + a_d p^k&, \text{ при } \ell = d-1,\ k \leqslant m-2,\\
-a_1 p^{m-1} t^{d-1} + \ldots + a_d p^{m-1}&, \text{ при } \ell = d-1,\ k = m-1,
\end{aligned}
$$

эта матрица имеет вид

$$
J_m(p) \overset{\text{def}}{=}
\begin{pmatrix}
-a_1 & 1 & & & & & & & & & & & \\
-a_2 & 0 & 1 & & & & & & & & & & \\
\vdots & 0 & \ddots & 1 & & & & & & & & & \\
-a_d & \vdots & \ddots & 0 & 1 & & & & & & & & \\
 & 0 & \ddots & 0 & -a_1 & 1 & & & & & & & \\
 & & \ddots & \vdots & -a_2 & 0 & \ddots & & & & & & \\
 & & & 0 & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & & & -a_d & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & & & & \\
 & & & & & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 & & & \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & 0 & -a_1 & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \vdots & -a_2 & 0 & \ddots & \\
 & & & & & & & & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\
 & & & & & & & & & -a_d & 0 & \ldots & 0
\end{pmatrix}
\tag{9-8}
$$

где расположенная над главной диагональ заполнена единицами, а на главной диагонали и $d-1$ диагоналях под нею стоят последовательности вида

$$
-a_i, \underbrace{0, \ldots, 0}_{d-1}, -a_i, \underbrace{0, \ldots, 0}_{d-1}, \ \ldots\ , -a_i\ \underbrace{0, \ldots, 0}_{d-i}\ ,
$$

где $i = 1, \ldots, d$, а все остальные клетки матрицы нулевые.

Упражнение 9.11. Убедитесь, что при $d = 1$ и $p = t - \lambda$ матрица (9-8) превращается в жорданову клетку (9-5).

Из теор. 9.1 на стр. 144 вытекает, что каждая матрица над произвольным полем $\Bbbk$ подобна блочно диагональной матрице, состоящей из обобщённых жордановых клеток (9-8), и две такие матрицы подобны, если и только если они получаются друг из друга перестановкой клеток.

Например, умножение на t в вещественном векторном пространстве

$$
V = \mathbb{R}[t]/\big((t^2+1)^2\big) \oplus \mathbb{R}[t]/\big((t+1)^2\big) \oplus \mathbb{R}[t]/(t+1)
$$

имеет над полем $\mathbb{R}$ жорданову нормальную форму из трёх клеток размеров 4, 2, 1:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}
$$

а его фробениусова нормальна форма получается из разложения $V = \mathbb{R}[t]/(f_1) \oplus \mathbb{R}[t]/(f_2)$, где $f_1 = t + 1$, $f_2 = (t^2 + 1)^2(t + 1)^2 = t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1$, и содержит две клетки:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{9-9}$$

Умножение на t в аналогичном комплексном векторном пространстве

$$W = \mathbb{C}[t]/\big((t^2+1)^2\big) \oplus \mathbb{C}[t]/\big((t+1)^2\big) \oplus \mathbb{C}[t]/(t+1) \simeq$$
$$\simeq \mathbb{C}[t]/\big((t-i)^2\big) \oplus \mathbb{C}[t]/\big((t+i)^2\big) \oplus \mathbb{C}[t]/\big((t+1)^2\big) \oplus \mathbb{C}[t]/(t+1)$$

имеет над полем $\mathbb{C}$ жорданову нормальную форму из 4-х клеток размеров 2, 2, 2, 1:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

а его фробениусова нормальная форма совпадает с (9-9).

В общем случае объединение всех жордановых клеток (9-8), отвечающих данному неприводимому приведённому многочлену $p \in \Bbbk[t]$, описывает действие оператора $F : V \to V$ на подмодуле $p(F)$-кручения

$$K_p \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \exists\, m \in \mathbb{N} : \ p(F)^m v = 0\} \simeq \Bbbk[t]/(p^{m_1}) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/(p^{m_\ell})$$

(в правой части собраны все элементарные делители оператора F вида p^m). Упорядоченный по нестрогому убыванию $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_\ell$ набор показателей $(m_1, \ldots, m_\ell)$ называется *цикловым типом* подпространства K_p. Наибольший из них m_1 равен степени, в которой p входит в разложение минимального многочлена $\mu_F(t)$ на неприводимые множители в кольце $\Bbbk[t]$ и обозначается m_p. Сумма $m_1 + \ldots + m_\ell$ всех показателей равна степени, в которой p входит в разложение характеристического многочлена $\chi_F(t)$. По лем. 6.3 на стр. 117 высота $\Bbbk$-го столбца диаграммы Юнга $(m_1, \ldots, m_\ell)$ равна размерности векторного пространства $\ker p(F)^k \,/\, \ker p(F)^{k-1}$ над полем $\Bbbk[t]/(p)$, которое в свою очередь является векторным пространством размерности $\deg p$ над полем $\Bbbk$. Поэтому высота k-того столбца диаграммы $(m_1, \ldots, m_\ell)$ равна отношению

$$(\dim_{\Bbbk} \ker p(F)^k - \dim_{\Bbbk} \ker p(F)^{k-1}) / \deg p\,.$$

Пример 9.4

Выясним, подобны ли друг другу над полем $\mathbb{F}_5$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обе матрицы имеют один и тот же характеристический многочлен

$$\det(tE - A) = \det(tE - B) = t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1 = (t^2 + t + 1)^2 ,$$

где $p(t) = t^2 + t + 1 \in \mathbb{F}_5[t]$ неприводим над $\mathbb{F}_5$. Поэтому всё пространство $\mathbb{F}_5^4$ является модулем p-кручения и имеет цикловой тип (2) или $(1, 1)$. В первом случае многочлен p не аннулирует матрицу, а во втором — аннулирует. Так как

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

и тем самым $p(A) = A^2 + A + E \neq 0$, а $p(B) = B^2 + B + E = 0$, мы заключаем, что матрицы не подобны. Отметим, что из проделанных вычислений вытекает, что жорданова и фробениусова нормальные формы матрицы A имеют соответственно вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а жорданова нормальная форма матрицы B совпадает с фробениусовой и имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.2. Специальные классы операторов. В этом разделе мы подробно остановимся на свойствах нескольких специальных классов операторов, играющих важную роль в различных задачах из разных областей математики.

9.2.1. Нильпотентные операторы. Линейный оператор $F : V \to V$ называется *нильпотентным*, если $F^m = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Так как нильпотентный оператор аннулируется многочленом t^m, все его элементарные делители являются степенями t. В частности, минимальный многочлен тоже является степенью t и, будучи делителем характеристического многочлена, имеет степень не выше $\dim V$. Поэтому в определении нильпотентного оператора можно без ограничения общности считать, что $m \leqslant \dim V$. По теор. 9.1 нильпотентный оператор изоморфен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме факторколец вида

$$\Bbbk[t]/(t^{\nu_1}) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/(t^{\nu_k}), \tag{9-10}$$

и два таких оператора изоморфны друг другу, если и только если выписанные в порядке нестрогого убывания наборы показателей $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_k$ у них одинаковы. Таким образом, нильпотентные операторы над произвольным полем $\Bbbk$ взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга ν. Диаграмма $\nu(F)$, характеризующая нильпотентный оператор F, называется его *цикловым типом*.

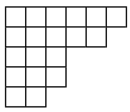
Умножение на t действует на состоящий из векторов $e_i = [t^{m-i}]$ базис в $\Bbbk[t]/(t^m)$ так[1]:

$$0 \leftarrowtail e_1 \leftarrowtail e_2 \leftarrowtail e_3 \leftarrowtail \ \dots \ \leftarrowtail e_{m-1} \leftarrowtail e_m$$

и имеет в этом базисе матрицу

$$J_m(0) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая называется *нильпотентной жордановой клеткой* размера m. Тем самым, для нильпотентного оператора F циклового типа $\nu(F)$ в пространстве V имеется базис, векторы которого размещаются по клеткам диаграммы $\nu(F)$ так, что F переводит каждый из них в левый соседний, а все векторы самого левого столбца — в нуль:



$$\leftrightsquigarrow \qquad \begin{array}{l} 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \\ 0 \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \end{array} \tag{9-11}$$

Базис такого вида называется *циклическим* или *жордановым* базисом нильпотентного оператора F, а наборы базисных векторов, стоящие по строкам диаграммы, называются *жордановыми цепочками*. Так как сумма длин первых m столбцов диаграммы $\nu(F)$ равна $\dim\ker F^m$, длина m-того столбца диаграммы $\nu(F)$ равна $\dim\ker F^m - \dim\ker F^{m-1}$.

9.2.2. Полупростые операторы. Прямая сумма простых[2] пространств с операторами называется *полупростым* или *вполне приводимым* пространством с оператором.

Предложение 9.1

Следующие свойства оператора $F : V \to V$ эквивалентны друг другу:

1) V является прямой суммой неприводимых F-инвариантных подпространств

2) V линейно порождается неприводимыми F-инвариантными подпространствами

3) для каждого ненулевого F-инвариантного подпространства $U \subsetneq V$ существует такое F-инвариантное подпространство $W \subset V$, что $V = U \oplus W$

4) оператор F подобен умножению на класс $[t]$ в прямой сумме факторколец

$$\Bbbk[t]/(p_1) \oplus \Bbbk[t]/(p_2) \oplus \dots \oplus \Bbbk[t]/(p_r),$$

где $p_i \in \Bbbk[t]$ приведены и неприводимы[3] (но не обязательно различны).

[1] См. формулу (9-4) на стр. 148.

[2] В другой терминологии — неприводимых, см. начало n° 9.1 на стр. 143.

[3] Иными словами, в прямой сумме (9-1) из теор. 9.1 все показатели степеней $m_i = 1$.

Доказательство. Импликация (1) ⇒ (2) очевидна. Импликация (2) ⇒ (3) вытекает из лем. 7.1 на стр. 126. Для лучшего понимания происходящего повторим её доказательство в нашем нынешнем контексте. Для каждого неприводимого F-инвариантного подпространства $L \subset V$ пересечение $L \cap U$, будучи F-инвариантным подпространством в L, либо нулевое, либо совпадает с L. Если все неприводимые инвариантные подпространства $L \subset V$ лежат в U, то $U = V$ в силу (2), и доказывать нечего. Если есть ненулевое неприводимое F-инвариантное подпространство $L_1 \subset V$ с $L_1 \cap U = 0$, заменим U на $U \oplus L_1$ и повторим рассуждение. Поскольку размерность подпространства U на каждом таком шагу строго увеличивается, через конечное число шагов получится равенство $U \oplus L_1 \oplus \ldots \oplus L_k = V$, и можно взять $W = L_1 \oplus \ldots \oplus L_k$.

Чтобы доказать импликацию (3) ⇒ (4), покажем сначала, что если свойство (3) выполнено для пространства V, то оно выполнено и для каждого F-инвариантного подпространства $H \subset V$. Рассмотрим любое инвариантное подпространство $U \subset H$ и отыщем в V такие инвариантные подпространства Q и R, что $V = H \oplus Q = U \oplus Q \oplus R$. Рассмотрим проекцию $\pi : V \twoheadrightarrow H$ с ядром Q и положим $W = \pi(R)$.

Упражнение 9.12. Проверьте, что $H = U \oplus W$.

Итак, если свойство (3) выполнено для прямой суммы факторколец (9-1) из теор. 9.1, то оно выполнено и для каждого слагаемого этой суммы. Однако по сл. 9.2 пространство $\Bbbk[t]/(p^m)$ при $m > 1$ приводимо, но неразложимо.

Импликация (4) ⇒ (1) также немедленно вытекает из сл. 9.2. □

Следствие 9.5 (из доказательства предл. 9.1)
Ограничение полупростого оператора на инвариантное подпространство также является полупростым оператором. □

9.2.3. Циклические векторы. Вектор $v \in V$ называется *циклическим вектором* линейного оператора $F : V \to V$, если его F-орбита v, Fv, F^2v, F^3v,, … линейно порождает пространство V над полем $\Bbbk$. Иначе можно сказать, что вектор v порождает модуль V_F над $\Bbbk[t]$.

Предложение 9.2
Следующие свойства оператора $F : V \to V$ эквивалентны друг другу:

1) F обладает циклическим вектором

2) F подобен умножению на класс $[t]$ в факторкольце $\Bbbk[t]/(f)$, где $f \in \Bbbk[t]$

3) простые основания всех элементарных делителей оператора F попарно различны

4) минимальный многочлен оператора F совпадает с характеристическим.

Доказательство. Условия (2), (3), (4) очевидно эквивалентны и означают, что оператор F подобен умножению на $[t]$ в прямой сумме факторколец $\Bbbk[t]/(p_1^{m_1}) \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]/(p_r^{m_r})$, где все неприводимые приведённые многочлены $p_1, \ldots, p_r$ попарно различны. Импликация (2) ⇒ (1) тоже очевидна: $\Bbbk[t]$-модуль $\Bbbk[t]/(f)$ порождается над $\Bbbk[t]$ классом [1]. Наоборот, если модуль V_F порождается над $\Bbbk[t]$ одним вектором v, то $V_F \simeq \Bbbk[t]/\ker\pi$, где эпиморфизм $\pi : \Bbbk[t] \twoheadrightarrow V_F$ переводит $h(t)$ в $h(F)\,v$. Поскольку $\Bbbk[t]$ — область главных идеалов, $\ker\pi = (f)$ для некоторого $f \in \Bbbk[t]$, откуда $V \simeq \Bbbk[t]/(f)$. □

9.2.4. Собственные подпространства и собственные числа. Максимальное по включению ненулевое подпространство в V, на котором оператор $F : V \to V$ действует как умножение на скаляр $\lambda \in \Bbbk$, называется *собственным подпространством* оператора F с *собственным числом* или *собственным значением* λ и обозначается $V_\lambda \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \operatorname{Id}_V - F)$. Ненулевые векторы $v \in V_\lambda$ называются *собственными векторами* оператора F с собственным числом[1] λ.

Предложение 9.3
Любой набор собственных векторов с попарно различными собственными числами линейно независим.

Доказательство. Пусть собственные векторы $v_1, \dots, v_m$ имеют попарно разные собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и линейно зависимы. Рассмотрим линейное соотношение между ними, в котором задействовано минимально возможное число векторов. Пусть это будут векторы $e_1, \dots, e_k$. Тогда $k \geqslant 2$ и $e_k = x_1 e_1 + \ldots + x_{k-1} e_{k-1}$, где все $x_i \in \Bbbk$ отличны от нуля. При этом $\lambda_k e_k = F(e_k) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i \lambda_i e_i$. Вычитая из этого равенства предыдущее, умноженное на λ_k, получаем более короткую зависимость $x_1(\lambda_1 - \lambda_k)e_1 + \ldots + x_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)e_{k-1} = 0$ с ненулевыми коэффициентами. □

Следствие 9.6
Сумма ненулевых собственных подпространств с попарно разными собственными числами является прямой. □

9.2.5. Спектр. Множество собственных чисел линейного оператора $F : V \to V$, т. е. всех таких $\lambda \in \Bbbk$, что $V_\lambda = \ker(\lambda \operatorname{Id}_V - F) \neq 0$, называется *спектром*[2] оператора F и обозначается

$$\operatorname{Spec} F = \{\lambda \in \Bbbk \mid \ker(\lambda \operatorname{Id}_V - F) \neq 0\} = \{\lambda \in \Bbbk \mid \det(tE - F) = 0\},$$

или $\operatorname{Spec}_\Bbbk F$, если важно явно указать основное поле. Так как $\ker(\lambda \operatorname{Id}_V - F) \neq 0$, если и только если $\det(tE - F) = 0$, спектр представляет собою множество корней характеристического многочлена $\chi_F(t) = \det(tE - F)$ в поле $\Bbbk$. Над алгебраически замкнутым полем спектр любого оператора не пуст и совпадает с множеством собственных чисел жордановых клеток оператора F, о котором шла речь в n° 9.1.6 на стр. 148 выше. Над произвольным полем количество различных собственных чисел в спектре не превосходит $\deg \chi_F = \dim V$, что согласуется со сл. 9.6, согласно которому

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} \dim V_\lambda \leqslant \dim V. \tag{9-12}$$

Упражнение 9.13. Покажите, что $\operatorname{Spec} F$ содержится в множестве корней любого многочлена, аннулирующего F.

Если известен спектр F, отыскание собственных подпространств сводится к решению систем линейных однородных уравнений $(\lambda \operatorname{Id}_V - F)\, v = 0$, которые гарантированно имеют ненулевые решения при $\lambda \in \operatorname{Spec} F$.

Следствие 9.7
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любой оператор обладает хотя бы одним ненулевым собственным подпространством. □

[1] Или собственным значением.
[2] Ср. с n° 9.1.6 на стр. 148.

Упражнение 9.14. Покажите, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ оператор F нильпотентен, если и только если $\operatorname{Spec} F = \{0\}$, и приведите пример оператора, для которого неравенство (9-12) строгое.

9.2.6. Диагонализуемые операторы. Оператор $F : V \to V$ называется *диагонализуемым*, если в V имеется базис, в котором F записывается диагональной матрицей. Такой базис состоит из собственных векторов оператора F, а элементы диагональной матрицы суть собственные числа F, причём каждое собственное число $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ встречается на диагонали ровно столько раз, какова кратность корня $t = \lambda$ в характеристическом многочлене $\chi_F(t)$ и какова размерность собственного подпространства V_λ. Иначе можно сказать, что диагонализуемый оператор F подобен оператору умножения на класс $[t]$ в прямой сумме факторколец[1] $\Bbbk[t]/(t-\lambda) \simeq \Bbbk$, где λ пробегает $\operatorname{Spec} F$, и каждое такое прямое слагаемое представлено в сумме ровно $\dim V_\lambda$ раз.

Предложение 9.4
Следующие свойства линейного оператора $F : V \to V$ эквивалентны:

1) F диагонализуем

2) пространство V линейно порождается собственными векторами оператора F

3) все элементарные делители F имеют вид $(t-\lambda)$, $\lambda \in \Bbbk$

4) характеристический многочлен $\chi_F(t) = \det(tE - F)$ полностью раскладывается в $\Bbbk[t]$ на линейные множители, и кратность каждого его корня λ равна размерности собственного подпространства V_λ

5) оператор F можно аннулировать многочленом, который раскладывается в $\Bbbk[t]$ в произведение попарно различных линейных множителей.

Доказательство. Эквивалентность свойств (3) и (5) очевидна. Эквивалентность свойств (1), (2), (3) и импликация (1) $\Rightarrow$ (4) были установлены перед формулировкой предл. 9.4. Из (4) вытекает, что $\sum \dim V_\lambda = \deg \chi_F = \dim V$. Поэтому прямая по сл. 9.6 сумма всех различных собственных подпространств V_λ совпадает с V, что даёт импликацию (4) $\Rightarrow$ (1). □

Следствие 9.8
Если оператор $F : V \to V$ диагонализуем, то его ограничение на любое инвариантное подпространство тоже диагонализуемо на этом подпространстве.

Доказательство. Это вытекает из свойства (5) предл. 9.4. □

Упражнение 9.15. Убедитесь, что над алгебраически замкнутым полем диагонализуемость равносильна полупростоте.

[1] Ср. с упр. 9.9 на стр. 148.

9.2.7. Что стоит за аннулирующим многочленом? Если известно разложение на простые множители того или иного многочлена, аннулирующего линейный оператор[1] $F : V \to V$, то это, во-первых, оставляет лишь конечное число возможностей для набора элементарных делителей $\mathcal{E}\ell(F)$ оператора F, а во-вторых, позволяет явно строить F-инвариантные подпространства в V и/или раскладывать V в прямую сумму таких подпространств в терминах действия F непосредственно на пространстве V.

Пример 9.5 (инвариантные подпространства вещественного оператора)
Покажем, что над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ любой конечномерный линейный оператор F обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством. Пусть $\chi_F = q_1 \dots q_m$, где $q_i \in \mathbb{R}[t]$ — неприводимые приведённые линейные или квадратичные многочлены, не обязательно различные. Применим нулевой оператор $0 = \chi_F(F) = q_1(F) \circ q_2(F) \circ \dots \circ q_m(F)$ к какому-нибудь ненулевому вектору $v \in V$. При некотором $i \geqslant 0$ получится такой ненулевой вектор $w = q_{i+1}(F) \circ \dots \circ q_m(F)\, v$, что $q_i(F)\, w = 0$. Если $q_i(t) = t - \lambda$ линеен, то $F(w) = \lambda w$ и вектор w порождает одномерное F-инвариантное подпространство. Если $q_i(t) = t^2 - \alpha t - \beta$ квадратичен, то $F(Fw) = \alpha F(w) + \beta w$ лежит в линейной оболочке векторов w и Fw, которая тем самым является F-инвариантным подпространством размерности не больше 2.

Пример 9.6 (инволюции)
Линейный оператор $\sigma : V \to V$ называется *инволюцией*, если он удовлетворяет соотношению $\sigma^2 = \mathrm{Id}_V$, т. е. аннулируется многочленом $t^2 - 1$. Тождественная инволюция $\sigma = \mathrm{Id}_V$ называется *тривиальной*. Так как $t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$ является произведением различных линейных множителей, все инволюции диагонализуемы, причём спектр любой инволюции исчерпывается числами ± 1. Таким образом, любое пространство V с инволюцией $\sigma \neq \pm\mathrm{Id}_V$ распадается в прямую сумму $V = V_+ \oplus V_-$ собственных подпространств $V_+ = \ker(\sigma - \mathrm{Id}_V) = \mathrm{im}(\sigma + \mathrm{Id}_V)$ и $V_- = \ker(\sigma + \mathrm{Id}_V) = \mathrm{im}(\sigma - \mathrm{Id}_V)$ с собственными числами ± 1, и любой вектор $v \in V$ однозначно записывается как $v = v_+ + v_-$, где $v_\pm \in V_\pm$ находятся по формулам $v_+ = (v + Fv)/2$, $v_- = (v - Fv)/2$.

Теорема 9.3 (теорема о разложении)
Пусть линейный оператор $F : V \to V$ на произвольном[2] векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ аннулируется произведением $q = q_1 \dots q_r$ попарно взаимно простых многочленов $q_i \in \Bbbk[t]$. Положим $Q_j = q/q_j$. Тогда $\ker q_j(F) = \mathrm{im}\, Q_j(F)$ при всех j, эти подпространства F-инвариантны, и V является прямой суммой тех из них, что отличны от нуля.

Доказательство. Так как $q(F) = q_i(F) \circ Q_j(F) = 0$, имеем включение $\mathrm{im}\, Q_i(F) \subset \ker q_i(F)$. Поэтому достаточно показать, что V линейно порождается образами операторов $Q_i(F)$, а сумма ядер $\ker q_i(F)$ прямая[3], т. е. $\ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j(F) = 0$ для всех i. Первое вытекает из того, что $\dots(Q_1, \dots, Q_r) = 1$, а значит, существуют такие $h_1, \dots, h_r \in \Bbbk[t]$, что $1 = \sum Q_j(t) h_j(t)$. Подставляя в это равенство $t = F$ и применяя обе части к произвольному вектору $v \in V$, получаем разложение $v = Ev = \sum Q_j(F) h_j(F) v \in \sum \mathrm{im}\, Q_j(F)$. Второе вытекает из взаимной простоты q_i и Q_i, в силу которой существуют такие $g, h \in \Bbbk[t]$, что $1 = g(t) \cdot q_i(t) + h(t) \cdot Q_i(t)$. Подставим сюда $t = F$ и применим обе части полученного равенства $E = g(F)\, q_i(F) + h(F) \circ Q_i(F)$ к произвольному вектору $v \in \ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j$. Так как $\ker q_j(F) \subset \ker Q_i(F)$ при всех $j \neq i$, получим $v = Ev = g(F)\, q_i(F)\, v + h(F)\, Q_i(F)\, v = 0$, что и требовалось. □

[1] Например, характеристического многочлена $\chi_F(t) = \det(tE - F)$.

[2] Возможно даже бесконечномерном.

[3] См. предл. 5.2 на стр. 85.

Пример 9.7 (проекторы)
Линейный оператор $\pi : V \to V$ называется *идемпотентом* или *проектором*, если он аннулируется многочленом $t^2 - t = t(t-1)$, т. е. удовлетворяет соотношению $\pi^2 = \pi$. По теор. 9.3 образ любого идемпотента $\pi : V \to V$ совпадает с подпространством его неподвижных векторов: $\operatorname{im}\pi = \ker(\pi - \mathrm{Id}_V) = \{v \mid \pi(v) = v\}$, и всё пространство распадается в прямую сумму $V = \ker\pi \oplus \operatorname{im}\pi$. Тем самым, оператор π проектирует V на $\operatorname{im}\pi$ вдоль $\ker\pi$. Отметим, что оператор $\mathrm{Id}_V - \pi$ тоже является идемпотентом и проектирует V на $\ker\pi$ вдоль $\operatorname{im}\pi$. Таким образом, задание прямого разложения $V = U \oplus W$ равносильно заданию пары идемпотентных эндоморфизмов $\pi_1 = \pi_1^2$ и $\pi_2 = \pi_2^2$ пространства V, связанных соотношениями $\pi_1 + \pi_2 = 1$ и $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1 = 0$.

Упражнение 9.16. Выведите из этих соотношений, что $\ker\pi_1 = \operatorname{im}\pi_2$ и $\operatorname{im}\pi_1 = \ker\pi_2$.

9.3. Функции от операторов. Всюду в этом разделе мы предполагаем, что линейный оператор $F : V \to V$ действует на конечномерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, которое мы будем обозначать через $\mathbb{K}$, и аннулируется многочленом

$$\alpha(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \dots (t - \lambda_r)^{m_r}\,, \text{ где } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j\,, \tag{9-13}$$

который полностью разлагается на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$. Последнее означает, что минимальный и характеристический многочлены оператора F тоже полностью разлагался на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$, и в практических вычислениях в качестве $\alpha(t)$ обычно берётся характеристический многочлен $\chi_F(t)$ оператора F. Однако, чем меньше степень многочлена $\alpha(t)$, тем проще будут все предстоящие нам вычисления.

Сделанные нами предположения на оператор F равносильны тому, что $\mathcal{E}\ell(F)$ исчерпывается степенями линейных двучленов $(t-\lambda)^m$, $\lambda \in \operatorname{Spec} F$. В этой ситуации $\mathbb{K}[t]$-модуль V_F является прямой суммой $V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} K_\lambda$ *корневых подпространств*[1]

$$K_\lambda \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \exists\, m \in \mathbb{N} : (\lambda\,\mathrm{Id} - F)^m v = 0\} = \ker(\lambda\,\mathrm{Id} - F)^{m_\lambda}\,, \tag{9-14}$$

биективно соответствующих собственным числам $\lambda \in \operatorname{Spec} F$. Показатель m_λ в правой части формулы (9-14) равен кратности корня $t = \lambda$ минимального многочлена $\mu_F(t)$ оператора[2] F. Множество корней $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ многочлена (9-13) содержит $\operatorname{Spec}(F)$ и для каждого $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ показатель m_λ не больше кратности корня $t = \lambda$ многочлена (9-13).

Упражнение 9.17. Не прибегая к теор. 9.1 на стр. 144, выведите существование *корневого разложения* $V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} K_\lambda$ из тождества Гамильтона – Кэли и теор. 9.3 на стр. 159.

9.3.1. Гомоморфизм вычисления. Алгебра $\mathcal{A}$, состоящая из функций $U \to \mathbb{K}$, заданных на каком-нибудь подмножестве $U \subset \mathbb{K}$, содержащем все корни многочлена (9-13), называется *алгебраически вычислимой* на операторе F, если $\mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$ и для каждого корня λ кратности k многочлена (9-13) все функции $f \in \mathcal{A}$ определены в точке $\lambda \in \mathbb{K}$ вместе с первыми $k-1$ производными $f^{(\nu)} = \frac{d^\nu f}{dt^\nu}$ и допускают тейлоровское разложение вида

$$f(t) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(t-\lambda) + \dots + \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!}(t-\lambda)^{k-1} + g_\lambda(t)\cdot(t-\lambda)^k\,, \tag{9-15}$$

[1] Т. е. подмодулей $(t-\lambda)$-кручения, см. n° 9.1.6 на стр. 148.
[2] Т. е. максимальному из показателей степеней элементарных делителей вида $(t-\lambda)^m$ оператора F.

где функция $g_\lambda(t)$ тоже лежит в алгебре $\mathcal{A}$.

Например, алгебра $\mathcal{A}$ всех функций, определённых в ε-окрестности каждого собственного числа $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ и представимых в ней суммой абсолютно сходящегося степенного ряда от $(t-\lambda)$, алгебраически вычислима на операторе F. Подалгебра в $\mathcal{A}$, состоящая из всех аналитических функций[1] $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, алгебраически вычислима на всех операторах $F \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$, характеристические многочлены которых полностью разлагаются на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$.

Теорема 9.4
В сделанных выше предположениях каждая алгебраически вычислимая на операторе $F: V \to V$ алгебра функций $\mathcal{A}$ допускает единственный такой гомоморфизм $\mathbb{K}$-алгебр $\operatorname{ev}_F: \mathcal{A} \to \operatorname{End} V$, что $\operatorname{ev}_F(p) = p(F)$ для всех многочленов $p \in \mathbb{K}[t] \subset \mathcal{A}$.

Доказательство теор. 9.4. Пусть оператор F аннулируется многочленом (9-13), и пусть искомый гомоморфизм $\operatorname{ev}_F: \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ существует. Пространство V является прямой суммой F-инвариантных корневых подпространств $K_\lambda = \ker(F - \lambda\mathrm{Id})^{m_\lambda}$. Согласно формуле (9-15) оператор

$$f(F) = f(\lambda)\cdot E + f'(\lambda)\cdot(F-\lambda E) + \ldots + \frac{f^{(m_\lambda-1)}(\lambda)}{(m_\lambda-1)!}(F-\lambda E)^{m_\lambda-1} + g_\lambda(F)(F-\lambda E)^{m_\lambda} \qquad (9\text{-}16)$$

действует на каждом подпространстве K_λ точно так же, как результат подстановки оператора F в многочлен $j_\lambda^{m_\lambda-1}f(t) \overset{\text{def}}{=} f(\lambda) + f'(\lambda)\cdot(t-\lambda) + \ldots + f^{(m_\lambda-1)}(\lambda)\cdot(t-\lambda)^{m_\lambda-1}/(m_\lambda-1)!$. Класс этого многочлена в факторкольце $\mathbb{K}[t]/\big((t-\lambda)^{m_\lambda}\big)$ называется $(m_\lambda-1)$-*струёй* функции $f \in \mathcal{A}$ в точке $\lambda \in \mathbb{K}$. По китайской теореме об остатках существует единственный такой многочлен $p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$ степени, строго меньшей $\deg \alpha(t)$, что $p_{f(F)}(t) \equiv j_\lambda^{m_\lambda-1}f(t) \pmod{\alpha(t)}$ сразу для всех корней λ многочлена α. Поскольку операторы $p_{f(F)}(F)$ и $f(F)$ одинаково действуют на каждом подпространстве K_λ, имеется равенство $f(F) = p_{f(F)}(F)$. Таким образом, гомоморфизм вычисления единствен. Остаётся убедиться, что отображение $f \mapsto p_{f(F)}(F)$ действительно является гомоморфизмом $\mathbb{K}$-алгебр. Проверим сначала, что отображение

$$\begin{aligned} J: \mathcal{A} &\to \frac{\mathbb{K}[t]}{\big((t-\lambda_1)^{m_1}\big)} \times \ldots \times \frac{\mathbb{K}[t]}{\big((t-\lambda_r)^{m_r}\big)} \simeq \frac{\mathbb{K}[t]}{(\alpha)}, \\ f &\mapsto \left(j_{\lambda_1}^{m_1-1}f, \ldots, j_{\lambda_s}^{m_r-1}f\right), \end{aligned} \qquad (9\text{-}17)$$

сопоставляющее функции $f \in \mathcal{A}$ набор её струй[2] во всех корнях многочлена α, является гомоморфизмом $\mathbb{K}$-алгебр, т. е. $\mathbb{K}$-линейно и удовлетворяет равенству $J(fg) = J(f)J(g)$. Первое очевидно, второе достаточно установить для каждой струи j_λ^{m-1} отдельно. Используя правило Лейбница: $(fg)^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu} f^{(\nu)}g^{(k-\nu)}$, получаем следующие равенства по модулю $(t-\lambda)^m$:

$$j_\lambda^{m-1}(fg) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-\lambda)^k}{k!}\sum_{\nu+\mu=k}\frac{k!}{\nu!\mu!}f^{(\nu)}(\lambda)g^{(\mu)}(\lambda) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\nu+\mu=k}\frac{f^{(\nu)}(\lambda)}{\nu!}(t-\lambda)^\nu \cdot \frac{g^{(\mu)}(\lambda)}{\mu!}(t-\lambda)^\mu \equiv j_\lambda^{m-1}(f)j_\lambda^{m-1}(g).$$

[1] Т. е. функций, задаваемых сходящимися всюду в $\mathbb{K}$ степенными рядами.

[2] Мы рассматриваем этот набор как элемент прямого произведения соответствующих колец вычетов, которое по китайской теореме об остатках изоморфно факторкольцу $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$.

Отображение $f \mapsto p_{f(F)}(F)$ является композицией гомоморфизма (9-17) с гомоморфизмом вычисления многочленов $\mathrm{ev}_F : \mathbb{K}[t] \to \mathrm{End}\, V$, $p \mapsto p(F)$, который корректно пропускается через фактор $\mathbb{K}[t]/(\alpha)$, так как $\alpha(F) = 0$. □

Определение 9.1 (гомоморфизм вычисления)
Гомоморфизм $\mathrm{ev}_F : \mathcal{A} \to \mathrm{End}\, V$ из теор. 9.4 называется *вычислением* функций $f \in \mathcal{A}$ на операторе F. Линейный оператор $\mathrm{ev}_F(f) : V \to V$, в который переходит функция $f \in \mathcal{A}$ при гомоморфизме вычисления, обозначается $f(F)$ и называется *функцией f от оператора F*.

Замечание 9.1. (как относиться к функциям от операторов) Из теор. 9.4 вытекает, что если характеристический многочлен линейного оператора $F : V \to V$ полностью разлагается на линейные множители в $\mathbb{K}[t]$, то на пространстве V определены такие линейные операторы, как e^F или $\sin F$, а если $F \in \mathrm{GL}(V)$, то и такие задаваемые аналитическими вне нуля функциями операторы, как $\ln F$ или $\sqrt{F}$, причём алгебраические свойства всех этих операторов точно такие же, как у числовых функций e^t, $\sin t$, $\ln t$ и $\sqrt{t}$. В частности, все эти функции от оператора F коммутируют друг с другом и с F, а также удовлетворяют соотношениям вроде $\ln F^2 = 2 \ln F$ и $\sqrt{F}\sqrt{F} = F$. Таким образом, функции от операторов можно использовать для отыскания операторов с предписанными свойствами, например, удовлетворяющих заданному алгебраическому или дифференциальному уравнению, в частности, для извлечения корней из невырожденных операторов.

Предложение 9.5
В условиях теор. 9.4 на стр. 161 для любой функции f из алгебраически вычислимой на операторе F алгебры функций $\mathcal{A}$ спектр оператора $f(F)$ состоит из чисел $f(\lambda)$, где $\lambda \in \mathrm{Spec}\, F$. Если $f'(\lambda) \neq 0$, то элементарные делители $(t-\lambda)^m \in \mathcal{E}\ell(F)$ биективно соответствуют элементарным делителям $\big(t - f(\lambda)\big)^m \in \mathcal{E}\ell\big(f(F)\big)$. Если $f'(\lambda) = 0$, то каждому элементарному делителю $(t-\lambda)^m$ с $m > 1$ из $\mathcal{E}\ell(F)$ в множестве $\mathcal{E}\ell\big(f(F)\big)$ соответствует объединение нескольких элементарных делителей вида $\big(t - f(\lambda)\big)^{\ell_i}$ с $\ell_i \in \mathbb{N}$ и $\sum_i \ell_i = m$.

Доказательство. Реализуем F как оператор умножения на класс $[t]$ в прямой сумме факторколец $V = \mathbb{K}[t]/\big((t-\lambda_1)^{s_1}\big) \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[t]/\big((t-\lambda_r)^{s_r}\big)$. Как мы видели в доказательстве теор. 9.4 ограничение оператора $f(F)$ на корневое подпространство K_λ раскладывается в сумму скалярного оператора $f(\lambda)\,E$ и нильпотентного оператора $N = f'(\lambda)\cdot\eta + \frac{1}{2} f''(\lambda)\cdot\eta^2 + \ldots$, где $\eta : K_\lambda \to K_\lambda$ обозначает оператор умножения на класс $[t-\lambda]$. На каждом слагаемом $\mathbb{K}[t]/\big((t-\lambda)^m\big)$ оператор η имеет ровно одну жорданову цепочку максимальной длины m. Если $f'(\lambda) \neq 0$, то

$$N^{m-1} = f'(\lambda)^{m-1} \cdot \eta^{m-1} \neq 0\,.$$

Поэтому N тоже имеет ровно одну жорданову цепочку длины m. При $f'(\lambda) = 0$ и $m > 1$ равенство $N^k = 0$ наступит при $k < m$. Поэтому цикловой тип ограничения оператора N на каждое слагаемое вида $\mathbb{K}[t]/\big((t-\lambda)^m\big)$ состоит из нескольких цепочек суммарной длины m. □

Упражнение 9.18. Покажите, что матрица $J_n^{-1}(\lambda)$, обратная к жордановой клетке размера $n \times n$ с собственным числом λ, подобна матрице $J_n(\lambda^{-1})$.

9.3.2. Интерполяционный многочлен. Многочлен $p_{f(F)}(t) \in \mathbb{K}[t]$, принимающий на операторе F то же самое значение, что и функция $f \in \mathcal{A}$, называется *интерполяционным многочленом* для вычисления $f(F)$. Он однозначно определяется тем, что его степень строго меньше степени аннулирующего оператор f многочлена α и в каждом корне кратности m многочлена α сам многочлен $p_{f(F)}$ и первые его $m-1$ производные принимают те же значения, что функция f и её первые $m-1$ производные. Таким образом, при $\deg \alpha = d$ отыскание коэффициентов интерполяционного многочлена $p_{f(F)}$ сводится к решению системы из d линейных уравнений на d неизвестных.

Лемма 9.2 (об интерполяции с кратными узлами[1])
Для любых различных чисел $a_1, \dots, a_n$ из любого поля $\Bbbk$ и произвольно заданного для каждого a_i набора из m_i значений $b_{i,0}, b_{i,1}, \dots, b_{i,m_i-1} \in \Bbbk$ существует единственный такой многочлен $g \in \Bbbk[x]$ степени строго меньше $m = m_1 + \dots + m_n$, что при каждом $i = 1, \dots, n$ сам этот многочлен и первые его $m_i - 1$ производные принимают в точке a_i заданные значения

$$g(a_i) = b_{i,0},\ g'(a_i) = b_{i,1},\ \dots\ ,\ g^{(m_i-1)}(a_i) = b_{i,m_i-1}\,,$$

где $g^{(k)}(x) = d^k g(x)/dx^k$ означает k-тую производную многочлена g.

Доказательство. Введём на m парах чисел (i,j), где $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j < m_j$, какой-нибудь линейный порядок и рассмотрим отображение $F\colon\ \Bbbk[x]_{<m} \to \Bbbk^m$, переводящее каждый многочлен g степени меньше m в набор значений[2] $g^{(j)}(a_i)$, записанных в одну строку в выбранном на парах (i,j) порядке.

Упражнение 9.19. Убедитесь, что отображение F линейно.

Если $g \in \ker F$, то по предл. 2.6 на стр. 45 каждое число $a_i \in \Bbbk$ является как минимум m_i-кратным корнем многочлена g, т. е. g делится на $\prod_i (x - a_i)_i^m$, откуда $g = 0$, ибо степень произведения равна $m > \deg g$. Мы заключаем, что $\ker F = 0$. Поскольку $\dim \Bbbk[x]_{<m} = \dim \Bbbk^m$, отображение F биективно. □

Пример 9.8 (степенная функция и рекуррентные уравнения, ср. с прим. 3.6 на стр. 59)
Задача отыскания n-того члена a_n числовой последовательности $z\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$, $n \mapsto z_n$, решающей рекуррентное уравнение $z_n = \alpha_1 z_{n-1} + \alpha_2 z_{n-2} + \dots + \alpha_m z_{n-m}$ с начальным условием $(z_0, \dots, z_{n-1}) = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, сводится вычислению n-той степени *матрицы сдвига*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_m \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

смещающей каждый фрагмент из m последовательных элементов на один шаг вправо:

$$(z_{k+1},\, z_{k+2},\, \dots\, ,\, z_{k+m}) \cdot S = (z_{k+2},\, z_{k+3},\, \dots\, ,\, z_{k+m+1})\,.$$

[1]Это утверждение обобщает прим. 2.5 на стр. 43.
[2]Где для единообразия обозначений мы полагаем $g^{(0)} \overset{\text{def}}{=} g$.

Искомый элемент a_n при этом равен первой координате вектора

$$(a_n,\, a_{n+1},\, \dots\,,\, a_{n+m-1}) = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \cdot S^n\,.$$

Матрица $S^n = p_{S^n}(S)$ является результатом подстановки матрицы S в интерполяционный многочлен $p_{S^n}(t) \in \mathbb{K}[t]$ для вычисления на матрице S *степенной функции* $f(t) = t^n$. Обратите внимание, что $\deg p_{S^n} < m$, и коэффициенты многочлена p_{S^n} находятся решением системы из m линейных уравнений на m неизвестных.

Например, для *уравнения Фибоначчи* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ матрица сдвига имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Интерполяционный многочлен для вычисления степенной функции t^n на этой матрице линеен. Записывая его в виде $p_{S^n}(t) = at + b$ с неопределёнными коэффициентами a и b, получаем

$$S^n = a\,S + b\,E = \begin{pmatrix} b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}.$$

Таким образом, n-тое *число Фибоначчи*, решающее уравнение Фибоначчи с начальным условием $(a_0, a_1) = (0, 1)$, равно первой координате вектора $\left(a_n, a_{n+1}\right) = (0, 1) \cdot S^n = (a, a+b)$. Матрица S аннулируется своим характеристическим многочленом

$$\chi_S(t) = t^2 - t\ \operatorname{tr} S + \det S = t^2 - t - 1 = (t - \lambda_+)(t - \lambda_-)$$

с однократными корнями $\lambda_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Функция t^n принимает на них значения $\lambda_\pm^n$. Коэффициенты a и b находятся из системы

$$\begin{cases} a\,\lambda_+ + b = \lambda_+^n \\ a\,\lambda_- + b = \lambda_-^n\,, \end{cases}$$

и по правилу Крамера $a = \left(\lambda_+^n - \lambda_-^n\right) / \left(\lambda_+ - \lambda_-\right)$. Тем самым,

$$a_n = a = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \cdot \sqrt{5}}\,,$$

что согласуется с прим. 3.6 на стр. 59.

Пример 9.9 (квадратный корень из оператора)
Покажем, что если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$, то из любого биективного линейного оператора F на конечномерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ можно извлечь квадратный корень, являющийся многочленом от оператора F. В прим. 3.8 на стр. 63 мы видели, что при всех целых $k \geqslant 0$ биномиальный коэффициент $\binom{2k}{k}$ нацело делится на $(k+1)$, и если $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$, то корректно определён биномиальный степенной ряд[1]

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k\geqslant 0} \binom{1/2}{k} x^k = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1}} \binom{2k-2}{k-1} \frac{x^k}{k}\,. \tag{9-18}$$

[1] См. формулу (3-19) на стр. 63.

Упражнение 9.20. Убедитесь в том, что квадрат многочлена, равного сумме первых $n+1$ членов этого ряда, равен $1+x$ в $\Bbbk[x]/(x^{n+1})$.

Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, характеристический многочлен $\chi_F(t)$ оператора F разлагается на взаимно простые множители $(t-\lambda)^{m_\lambda}$, где $\lambda \in \operatorname{Spec}(F)$, и пространство V является прямой суммой F-инвариантных корневых подпространств $K_\lambda = \ker(F-\lambda\mathrm{Id})^{m_\lambda}$. Так как F биективен, все числа λ в этом разложении отличны от нуля. Для каждого $\lambda \in \operatorname{Spec}(F)$ обозначим через $p_\lambda(t) \in \Bbbk[t]$ сумму первых m_λ членов формального разложения Тэйлора функции $\sqrt{t}$ в точке λ, которое получается из (9-18) заменой переменных:

$$\sqrt{t} = \sqrt{\lambda + (t-\lambda)} = \sqrt{\lambda}\cdot\left(1+(t-\lambda)/\lambda\right)^{1/2} = \lambda^{1/2} + \frac{t-\lambda}{2\lambda^{1/2}} - \frac{(t-\lambda)^2}{8\lambda^{3/2}} + \frac{(t-\lambda)^3}{16\lambda^{5/2}} - \dots\,.$$

Тогда $p_\lambda^2(t) \equiv t \bmod (t-\lambda)^{m_\lambda}$ в силу упр. 9.20. По китайской теореме об остатках существует многочлен $p(t)$, сравнимый с $p_\lambda(t)$ по модулю $(t-\lambda)^{m_\lambda}$ сразу для всех $\lambda \in \operatorname{Spec}(F)$. Он имеет $p^2(t) \equiv t \bmod (t-\lambda)^{m_\lambda}$ для всех $\lambda \in \operatorname{Spec}(F)$. Поскольку квадрат оператора $p(F)$ действует на каждом корневом подпространстве K_λ точно также, как F, мы заключаем, что $p^2(F) = F$.

Замечание 9.2. (аналитически определённые функции от оператора) Гомоморфизм вычисления значений многочленов на матрице $F \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ можно продолжать на бóльшие алгебры функций $\mathcal{C} \supset \mathbb{C}[z]$ средствами анализа: наделим пространства $\mathcal{C}$ и $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ той или иной топологией, представим функцию $f \in \mathcal{C}$ в виде предела $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ какой-нибудь последовательности многочленов f_k и положим матрицу $f(F)$ равной пределу последовательности матриц $f_k(F) \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$. Разумеется, при этом необходимо проверять, что предел $\lim_{k\to\infty} f_k(F)$ существует и зависит только от функции f, а не от выбора сходящейся к f последовательности многочленов, и отдельно следует убедиться в том, что полученное таким образом отображение $\mathrm{ev}_F : \mathcal{C} \to \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$, $f \mapsto f(F)$, является гомоморфизмом алгебр[1]. Но если это так, и если переход к пределу в пространстве матриц перестановочен со сложением и умножением на константы[2], то как бы ни определялась сходимость в пространстве функций и какой бы ни была сходящаяся к функции f последовательность многочленов f_k, последовательность матриц $f_k(F)$ будет лежать в конечномерном векторном пространстве, порождённом над $\mathbb{C}$ степенями F^m с $0 \leqslant m < n$, т. е. её предел *a priori* будет многочленом от F степени, строго меньшей n, а значит, может быть вычислен при помощи подходящего интерполяционного многочлена. Если матрицы F и G подобны, т. е. $G = CFC^{-1}$ для некоторой матрицы $C \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$, то аналитически определённые функции от этих матриц тоже будут подобны: так как равенство $f_k(G) = Cf_k(F)C^{-1}$ справедливо для всех многочленов, приближающих функцию f, оно выполняется и для предельной функции в силу непрерывности линейного отображения $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$, $X \mapsto CXC^{-1}$.

9.4. Перестановочные операторы и разложение Жордана. Если линейные операторы F и G на векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ коммутируют друг с другом, то ядро

[1] Иначе не вполне понятно, зачем оно нужно. В качестве упражнения по анализу читателю настоятельно рекомендуется попробовать самостоятельно реализовать намеченную программу, используя на пространстве функций топологию, в которой сходимость последовательности функций означает равномерную сходимость в каждом круге в $\mathbb{C}$, а на пространстве $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ — стандартную топологию пространства $\mathbb{C}^{n^2}$, где сходимость определяется покоординатно.

[2] Т. е. $\lim\limits_{k\to\infty}(\lambda F_k + \mu G_k) = \lambda \lim\limits_{k\to\infty} F_k + \mu \lim\limits_{k\to\infty} G_k$. Это означает, в частности, что все $\mathbb{C}$-линейные отображения $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ непрерывны.

и образ любого многочлена от оператора F переводятся оператором G в себя:

$$\begin{aligned} f(F)\,v = 0 \quad &\Rightarrow \quad f(F)\,Gv = Gf(F)\,v = 0 \\ v = f(F)\,w \quad &\Rightarrow \quad Gv = Gf(F)\,w = f(F)\,Gw\,. \end{aligned}$$

В частности, все собственные подпространства $V_\lambda = \ker(F - \lambda E)$ инвариантны относительно любого перестановочного с F оператора G.

Предложение 9.6
В конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любое множество коммутирующих друг с другом операторов обладает общим для всех операторов собственным вектором. Над произвольным полем $\Bbbk$ любое множество коммутирующих друг с другом диагонализуемых операторов на V можно одновременно диагонализовать в некотором общем для всех операторов базисе.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если все операторы скалярны (что так при $\dim V = 1$), то доказывать нечего — подойдут, соответственно, любой ненулевой вектор и любой базис. Если среди операторов есть хоть один нескалярный оператор F, то над замкнутым полем у него есть собственное подпространство строго меньшей размерности, чем V, а в диагонализуемом случае V является прямой суммой таких собственных подпространств. Каждое собственное подпространство оператора F инвариантно для всех операторов, причём если операторы диагонализуемы на всём пространстве, то их ограничения на собственные подпространства оператора F тоже диагонализуемы по сл. 9.8. Применяя к собственному подпространству (соответственно ко всем собственным подпространствам) оператора F предположение индукции, получаем требуемое. □

Пример 9.10 (конечные группы операторов)
Если m линейных операторов на конечномерном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \nmid m$ образуют группу G, то каждый из этих операторов аннулируется многочленом $t^m - 1$, который раскладывается в произведение m попарно различных линейных множителей[1]. Поэтому каждый оператор в группе G диагонализуем. Все операторы из группы G одновременно диагонализуются в одном общем базисе, если и только если группа G абелева.

Теорема 9.5 (разложение Жордана)
Для каждого оператора F на конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ существует единственная пара таких операторов F_d и F_n, что F_n нильпотентен, F_d диагонализуем, $F_dF_n = F_nF_d$ и $F = F_d + F_n$. Эти единственные операторы F_d и F_n являются многочленами без свободных членов от оператора F.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Spec} F = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. В силу алгебраической замкнутости поля $\Bbbk$, характеристический многочлен $\chi_F(t) = \prod_{\lambda\in\operatorname{Spec}F}(t-\lambda)^{m_\lambda}$ полностью разлагается на линейные множители, и пространство $V = \bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Spec}F} K_\lambda$ является прямой суммой корневых подпространств $K_\lambda = \ker(F - \lambda\,\mathrm{Id})^{m_\lambda}$. В качестве диагонализуемого оператора F_d можно взять оператор, действующий на каждом корневом подпространстве K_λ умножением на λ, а в качестве нильпотентного

[1] Поскольку производная mt^{m-1} многочлена $t^m - 1$ отлична от нуля и взаимно проста с ним.

оператора F_n — разность $F_n = F - F_d$, которая действует на каждом корневом подпространстве K_λ нильпотентным оператором $F - \lambda\,\mathrm{Id}$.

Покажем, что оба эти оператора являются многочленами без свободного члена от F. Для этого достаточно представить в таком виде оператор F_d. Для каждого ненулевого $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ обозначим через $g_\lambda \in \Bbbk[x]$ многочлен, представляющий класс λ/t в $\Bbbk[x]/\big((t-\lambda)^{m_\lambda}\big)$, а для $\lambda = 0$ положим $g_\lambda(t) = 0$. По китайской теореме об остатках существует многочлен $g \in \Bbbk[x]$, сравнимый с g_λ по модулю $(t-\lambda)^{m_\lambda}$ сразу для всех $\lambda \in \operatorname{Spec} F$. Многочлен tg_λ не имеет свободного члена, и его класс в $\Bbbk[x]/\big((t-\lambda)^{m_\lambda}\big)$ равен классу λ для всех $\lambda \in \operatorname{Spec} F$. Поэтому оператор $g(F)$ действует на каждом корневом подпространстве K_λ как умножение на λ, т. е. совпадает с F_d.

Будучи многочленами от F, операторы F_d и $F_n = F - F_d$ перестановочны между собою и с F. Это доказывает существование операторов F_d и F_n с требуемыми свойствами, включающими в себя и последнее утверждение предложения. Докажем их единственность.

Пусть есть ещё одно разложение $F = F_d' + F_n'$, в котором F_d' диагонализуем, F_n' нильпотентен и $F_d'F_n' = F_n'F_d'$. Из последнего равенства вытекает, что F_d' и F_n' перестановочны с любым многочленом от $F = F_d' + F_n'$, в частности, с построенными выше F_d и F_n. Поэтому каждое собственное подпространство V_λ оператора F_d переводится оператором F_d' в себя[1], причём F_d' диагонализуем[2] на каждом V_λ. Если бы оператор F_d' имел на V_λ собственный вектор с собственным значением $\mu \neq \lambda$, то этот вектор был бы собственным для оператора $F_n - F_n' = F_d - F_d'$ с собственным значением $\lambda - \mu \neq 0$, что невозможно, так как оператор $F_n - F_n'$ нильпотентен.

Упражнение 9.21. Докажите, что разность двух перестановочных нильпотентных операторов нильпотентна.

Следовательно, оператор F_d' действует на каждом собственном подпространстве V_λ оператора F_d как умножение на λ, откуда $F_d' = F_d$. Тогда и $F_n' = F - F_d' = F - F_d = F_n$. □

Определение 9.2
Операторы F_d и F_n из теор. 9.5 называются, соответственно, *диагонализуемой* и *нильпотентной* составляющими оператора F.

Замечание 9.3. Поскольку операторы F_d и F_n являются многочленами от F, каждое F-инвариантное подпространство $U \subset V$ является инвариантным для F_d и F_n.

---

[1] См. n° 9.4 на стр. 165.
[2] См. сл. 9.8 на стр. 158.

Упр. 9.1. Если отождествить $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ с полем $\mathbb{C}$, отправив классы $[1]$ и $[t]$ в 1 и i соответственно, умножение на класс $[t]$ превратится в умножение на i, т. е. в поворот на угол $\pi/2$, который не переводит никакое одномерное векторное подпространство в себя.

Упр. 9.2. Пусть $\Bbbk[t]/\big(t^n\big) = U \oplus W$, где U и W переводятся в себя умножением на $[t]$. Оба этих подпространства не могут целиком содержаться в образе оператора умножения на $[t]$, так как иначе их сумма тоже бы в нём содержалась. Поэтому в одном из них, пусть это будет U, имеется класс $[g]$ многочлена g с ненулевым свободным членом. Тогда классы $[t^{n-1}g], \dots, [tg], [g] \in U$ выражаются через базис $[1], [t], \dots, [t^{n-1}]$ пространства $\Bbbk[t]/(t^n)$ при помощи верхнетреугольной матрицы, на диагонаи которой всюду стоит ненулевой свободный член многочлена g. Следовательно, эти классы тоже образуют базис в $\Bbbk[t]/(t^n)$, и значит, содержащее их подпространство U совпадает со всем пространством $\Bbbk[t]/(t^n)$.

Упр. 9.3. Разложите каждое пространство $(F|_{U_i}, U_i)$ по форм. (9-1) на стр. 144. В силу единственности такого разложения прямая сумма полученных разложений является разложением исходного пространства (F, V).

Упр. 9.4. Коэффициенты $g_i \in \Bbbk^n$ неполного частного $g(t)$ от деления $h(t)$ на $tE - A$ вычисляются рекурсивно по формулам $g_{m-1} = h_m$, $g_{i-1} = h_i + Ag_i$ при $i \leqslant m-1$. Остаток $r = h(t) - (tE - A)\,g(t) \in \Bbbk^n$ не зависит от t. Подставляя $t = A$, что законно, ибо A коммутирует[1], заключаем, что $r = h(A)$.

Упр. 9.5. $\det(tE - C^{-1}AC) = \det(tC^{-1}EC - C^{-1}AC) = \det\big(C^{-1}(tE-A)C\big) = \det C^{-1} \cdot \det(tE-A) \cdot \det C = \det(tE - A)$.

Упр. 9.6. Пусть $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$. Напишите матрицу F оператора умножения на класс $[t]$ в факторкольце $\Bbbk[x]/(f)$ в базисе $[t^{n-1}], [t^{n-2}], \dots, [t], [1]$ и разложите $\det(tE - F)$ по первому столбцу.

Упр. 9.7. Пусть $f(t) = \mu_{v,F}(t)g(t) + r(t)$, где либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg \mu_{v,F}$. Если $f(F) = 0$, то $r(F)v = 0$, что невозможно для ненулевого r с $\deg r < \deg \mu_{v,F}$ по определению многочлена $\mu_{v,F}$. Поэтому $r = 0$.

Упр. 9.8. Если оператор $q(F)$ аннулирует все векторы из какого-нибудь линейного порождающего V множества, то он аннулирует любой вектор из V.

Упр. 9.12. Так как любой вектор $h \in H$ представляется в V как $h = u + q + r$ с $u \in U$, $q \in Q$, $r \in R$, в U выполняется равенство $h = \pi(h) = \pi(u) + \pi(r)$, в котором $\pi(u) = u \in U$ и $\pi(r) \in W$, т. е. $U + W = H$. Если $u \in U \cap W$, то $u = \pi(r)$ для некоторого $r \in R$, и $\pi(u-r) = \pi(u) - \pi(r) = u - u = 0$, откуда $u - r \in \ker \pi = Q$, что возможно только при $u = r = 0$. Поэтому $U \cap W = 0$.

Упр. 9.13. Если $\lambda \in \operatorname{Spec} F$ и $g(\lambda) \neq 0$, то $g(F)$ действует на ненулевом собственном подпространстве V_λ умножением на ненулевое число $g(\lambda)$. Тем самым, $g(F) \neq 0$.

Упр. 9.14. Над алгебраически замкнутым полем всякий многочлен имеющий только один корень 0 равен t^m. Поэтому $\chi_F(t) = t^m$ и по теореме Гамильтона – Кэли $F^m = 0$.

Упр. 9.17. Разложение характеристического многочлена оператора F в виде произведения степеней попарно разных линейных форм $\chi_F(t) = \prod\limits_{\lambda \in \operatorname{Spec} F} (t-\lambda)^{N_\lambda}$ удовлетворяет условиям теор. 9.3 с $q_i = (t-\lambda)^{N_\lambda}$, а корневые подпространства $K_\lambda = \ker(\lambda \operatorname{Id} - F)^{N_\lambda}$.

[1] См. упр. 8.13 на стр. 140.

Упр. 9.18. Над полем $\mathbb{C}$ можно применить предл. 9.5. Над произвольным полем $\Bbbk$ оператор F с матрицей $J_n(\lambda)$ имеет вид $\lambda\mathrm{Id} + N$, где $N^n = 0$, но $N^{n-1} \neq 0$. Обратный оператор

$$F^{-1} = (\lambda\mathrm{Id} + N)^{-1} = \lambda^{-1}(\mathrm{Id} + N/\lambda)^{-1} = \lambda^{-1} - \lambda^{-2}N + \lambda^{-3}N^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\lambda^{-n}N^{n-1}$$

имеет вид $\lambda^{-1}\mathrm{Id} + M$, где оператор $M = -\lambda^{-2}N(1 - \lambda^{-1}N + \ldots)$ тоже имеет $M^n = 0$, а $M^{n-1} = \lambda^{2(1-n)}N^{n-1} \neq 0$. Таким образом, ЖНФ оператора F^{-1} это одна клетка $J_n\left(\lambda^{-1}\right)$.

Упр. 9.20. В $\Bbbk[\![x]\!]$ квадрат ряда $\sqrt{1+x}$ равен $1 + x$, а коэффициенты при x^k для $0 \leqslant k \leqslant n$ у квадрата ряда $\sqrt{1+x}$ такие же, как и у квадрата многочлена из условия.

Упр. 9.21. Если $a^n = 0$, $b^m = 0$ и $ab = ba$, то $(a-b)^{m+n-1} = 0$ по формуле Ньютона.