

### §3. Дроби и ряды

В этом параграфе мы продолжаем обозначать через  $K$  произвольное коммутативное кольцо с единицей, а через  $\mathbb{k}$  — произвольное поле.

**3.1. Кольца частных.** Способ изготовления поля  $\mathbb{Q}$  из кольца  $\mathbb{Z}$  как множества дробей с целым числителем и ненулевым целым знаменателем<sup>1</sup> применим в любом коммутативном кольце  $K$  с единицей. Подмножество  $S \subset K$  называется *мультипликативным*, если  $1 \in S$  и  $st \in S$  для всех  $s, t \in S$ . Например, множество всех целых неотрицательных степеней  $q^k$  любого элемента  $q \in K$  мультипликативно<sup>2</sup>. Множество  $K^\circ \subset K$ , состоящее из всех не делящих нуль ненулевых элементов, тоже мультипликативно. В частности, множество всех ненулевых элементов любого целостного кольца мультипликативно. Каждое мультипликативное подмножество  $S \subset K$  задаёт на множестве упорядоченных пар  $K \times S$  отношение эквивалентности  $\sim_S$ , порождённое<sup>3</sup> отождествлениями  $(a, s) \sim_S (at, st)$  для всех  $t \in S$ . Класс эквивалентности пары  $(a, s)$  по модулю этого отношения называется *дробью* со знаменателем в  $S$  и обозначается  $a/s$ . Множество всех таких дробей обозначается  $KS^{-1}$  или  $K[S^{-1}]$  и называется *кольцом частных* или *локализацией* кольца  $K$  со знаменателями в  $S$ .

ПРИМЕР 3.1

Пусть  $K = \mathbb{Z}/(6)$  и  $S = \{[1], [2], [-2]\}$ . Каждая дробь в  $KS^{-1}$  имеет представление со знаменателем  $[1]$ :  $[a]/[\pm 2] = [a][\mp 2]/[\pm 2][\mp 2] = [\mp a][2]/[1][2] = [\mp a]/[1]$ . В частности,  $[0]/[\pm 2] = [0]/[1]$ . Далее,  $[\pm 2]/[1] = [\pm 2][2]/[1][2] = [\mp 1][2]/[1][2] = [\mp 1]/[1]$ . Наконец,  $[3]/[1] = [3][2]/[1][2] = [0]/[2] = [0]/[1]$ . Тем самым,  $KS^{-1}$  исчерпывается дробями  $[0]/[1]$ ,  $[1]/[1]$  и  $[-1]/[1]$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.1. Убедитесь, что эти три дроби различны.

ЛЕММА 3.1

$a/s = b/t$  в  $KS^{-1}$  если и только если  $atu = bsu$  в  $K$  для некоторого  $u \in S$ .

Доказательство. Положим  $(a, s) \approx (b, t)$ , если  $atu = bsu$  для некоторого  $u \in S$ . Двухшаговая цепочка отождествлений  $(a, s) \sim_S (atu, stu) = (bsu, tsu) \sim_S (b, t)$  показывает, что отношение  $\approx$  содержится в отношении  $\sim_S$ . Остаётся проверить, что отношение  $\approx$  является отношением эквивалентности — тогда оно совпадёт с  $\sim_S$  в силу минимальности последнего. Рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Пусть  $(a, s) \approx (b, t)$  и  $(b, t) \approx (c, r)$ , т. е. существуют такие  $u, w \in S$ , что  $atu = bsu$  и  $brw = ctw$ . Тогда

$$ar(tuw) = (atu)rw = (bsu)rw = (brw)su = (ctw)su = cs(tuw),$$

т. е.  $(a, s) \approx (c, r)$ . □

ЛЕММА 3.2

Операции  $\frac{a}{r} + \frac{b}{s} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{as+br}{rs}$  и  $\frac{a}{r} \cdot \frac{b}{s} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{ab}{rs}$  корректно задают на  $KS^{-1}$  структуру коммутативного кольца с единицей  $1/1$  и нулём  $0/1$ .

<sup>1</sup>См. прим. 0.5 на стр. 12 и прим. 1.2 на стр. 22.

<sup>2</sup>Мы по определению полагаем  $q^0 = 1$ .

<sup>3</sup>Т. е. наименьшее по включению отношение эквивалентности  $R \subset (K \times S) \times (K \times S)$ , содержащее все пары вида  $((a, s), (at, st))$ , где  $t \in S$ , см. н° 0.4.1 на стр. 12.

Доказательство. Так как каждое отождествление  $\sim_S$  является цепочкой элементарных отождествлений  $(a, r) \sim_S (au, ru)$ , где  $u \in S$ , достаточно проверить, что результаты операций не меняются при замене  $\frac{a}{r}$  на  $\frac{au}{ru}$ , а  $\frac{b}{s}$  — на  $\frac{bw}{sw}$ , где  $u, w \in S$ , что очевидно:

$$\begin{aligned} \frac{au}{ru} + \frac{bw}{sw} &= \frac{ausw + bwr u}{rusw} = \frac{(as + br) \cdot wu}{rs \cdot wu} = \frac{as + br}{rs} \\ \frac{au}{ru} \cdot \frac{bw}{sw} &= \frac{aubw}{rusw} = \frac{(ab) \cdot wu}{rs \cdot wu} = \frac{ab}{rs}. \end{aligned}$$

Проверку выполнения в  $KS^{-1}$  всех аксиом коммутативного кольца с единицей мы оставляем читателю в качестве упражнения.  $\square$

Следствие 3.1

Кольцо  $KS^{-1}$  нулевое если и только если  $S$  содержит нуль.

Доказательство. Если  $0 \in S$ , то любая дробь  $a/s = (a \cdot 0)/(s \cdot 0) = 0/0 = (0 \cdot 0)/(1 \cdot 0) = 0/1$  эквивалентна нулю. С другой стороны,  $1/1 = 0/1$  только если существует такой  $s \in S$ , что  $1 \cdot 1 \cdot s = 0 \cdot 1 \cdot s = 0$ , откуда  $s = 0 \in S$ .  $\square$

ТЕОРЕМА 3.1

Отображение  $\iota_S : K \rightarrow KS^{-1}$ , переводящее  $a \in K$  в дробь  $a/1 \in KS^{-1}$ , является гомоморфизмом колец с ядром  $\ker \iota_S = \{a \in K \mid \exists s \in S : as = 0\}$ . Образ  $\iota_S(s)$  любого элемента  $s \in S$  обратим в  $KS^{-1}$ . Для любого гомоморфизма  $\varphi : K \rightarrow R$  в целостное кольцо  $R$ , переводящего каждый элемент из  $S$  в обратимый элемент из  $R$ , существует единственный такой гомоморфизм колец  $\varphi_S : KS^{-1} \rightarrow R$ , что  $\varphi = \varphi_S \circ \iota_S$ .

Доказательство. Очевидно, что  $\iota_S$  является гомоморфизмом. Дробь  $\iota_S(a) = a/1$  равна  $0/1$  если и только если найдётся такой  $s \in S$ , что  $a \cdot 1 \cdot s = 0 \cdot 1 \cdot s = 0$ . Обратным к  $\iota_S(s) = s/1$  элементом является дробь  $1/s$ . Остаётся доказать последнее утверждение. Для продолжения гомоморфизма  $\varphi : K \rightarrow R$  до гомоморфизма  $\varphi_S : KS^{-1} \rightarrow R$  нет иного выбора как положить  $\varphi_S(1/s) = 1/\varphi(s)$ , так как в кольце  $R$  должны выполняться равенства  $\varphi_S(1/s) \cdot \varphi_S(s) = \varphi_S(s \cdot (1/s)) = \varphi(1) = 1$ . Следовательно, искомое продолжение обязано задаваться формулой  $\varphi_S(a/s) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(a)/\varphi(s)$ . Она корректна, поскольку при замене  $\frac{a}{s}$  на  $\frac{au}{su}$  с  $u \in S$  имеем  $\varphi_S\left(\frac{au}{su}\right) = \frac{\varphi(au)}{\varphi(su)} = \frac{\varphi(a)\varphi(u)}{\varphi(s)\varphi(u)} = \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)}$ . Бесхитростную проверку того, что построенное отображение  $\varphi_S$  перестановочно со сложением и умножением, мы оставляем читателю.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 3.2. Пусть  $K = \mathbb{Z}/(30)$ , а  $S = \{[2^k]_{30} \mid k = 0, \dots, 4\}$ . Покажите, что  $KS^{-1} \simeq \mathbb{Z}/(15)$ .

ПРИМЕР 3.2 (поле частных целостного кольца)

Если кольцо  $K$  не имеет делителей нуля, его ненулевые элементы образуют мультипликативную систему. Кольцо частных со знаменателями в этой системе является полем. Оно называется *полем частных* целостного кольца  $K$  и обозначается  $Q_K$ . Равенство  $a/b = c/d$  в  $Q_K$  равносильно равенству  $ac = bd$  в  $K$ , а гомоморфизм  $\iota : K \hookrightarrow Q_K$ ,  $a \mapsto a/1$ , инъективен, и любой гомоморфизм  $\varphi : K \rightarrow R$  в целостное кольцо  $R$ , переводящий все ненулевые элементы из  $K$  в обратимые элементы кольца  $R$ , единственным способом продолжается до вложения поля частных  $\tilde{\varphi} : Q_K \hookrightarrow R$ .

ПРИМЕР 3.3 (поле  $\mathbb{Q}$ )

Полем частных целостного кольца  $\mathbb{Z}$  является поле рациональных чисел  $\mathbb{Q} = Q_{\mathbb{Z}}$ , которое канонически вкладывается в любое поле характеристики нуль в качестве простого подполя<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>См. п. 1.5.6 на стр. 33.

ПРИМЕР 3.4 (поле рядов Лорана)

Поле частных кольца формальных степенных рядов  $\mathbb{k}[[x]]$  с коэффициентами в произвольном поле  $\mathbb{k}$  обозначается  $\mathbb{k}(x) \stackrel{\text{def}}{=} Q_{\mathbb{k}[[x]]}$ . Так как любой ряд с ненулевым свободным членом обратим<sup>1</sup> в  $\mathbb{k}[[x]]$ , каждая дробь  $p(x)/q(x) \in \mathbb{k}(x)$  однозначно представляется в виде  $x^m h(x)$ , где  $h \in \mathbb{k}[[x]]$  имеет ненулевой свободный член, а показатель  $m \in \mathbb{Z}$  равен разности показателей младших членов рядов  $p$  и  $q$ . Иначе говоря, поле  $\mathbb{k}(x)$  состоит из формальных степенных рядов вида  $f(x) = \sum_{k \geq m(f)} a_k x^k$ , в которых допускается конечное число мономов отрицательной степени. Такие ряды называются *рядами Лорана*, а поле  $\mathbb{k}(x)$  — *полем рядов Лорана*. Номер  $m(f) \in \mathbb{Z}$  самого левого ненулевого коэффициента ряда Лорана  $f$  называется *порядком ряда  $f$* .

**3.2. Рациональные функции.** Поле частных кольца  $\mathbb{k}[x]$  обозначается через  $\mathbb{k}(x)$  и называется *полем рациональных функций* от  $x$ . Его элементами являются дроби вида  $p(x)/q(x)$  с  $p, q \in \mathbb{k}[x]$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1

Если  $g = g_1 \dots g_m$ , где  $g_i \in \mathbb{k}[x]$  и  $\text{НОД}(g_i, g_j) = 1$  при  $i \neq j$ , то при любом  $f \in \mathbb{k}[x]$  дробь  $f/g$  единственным образом представляется в виде суммы

$$\frac{f}{g} = h + \frac{f_1}{g_1} + \dots + \frac{f_m}{g_m}, \quad (3-1)$$

где  $h \in \mathbb{k}[x]$  и  $\deg f_i < \deg g_i$  при всех  $i$ .

Доказательство. Деля  $f$  на  $g$  с остатком<sup>2</sup>, заключаем, что  $f/g = h + r/g$ , где  $h$  — неполное частное, а остаток  $r$  имеет степень  $\deg r < \deg g$ . Если  $g = g_1 g_2$  и  $\text{НОД}(g_1, g_2) = 1$ , то  $[g_2]_{g_1}$  обратим в  $\mathbb{k}[x]/(g_1)$ . Представим  $[r]_{g_1}/[g_2]_{g_1} = [f_1]_{g_1}$  многочленом  $f_1$  степени  $\deg f_1 < \deg g_1$ . Тогда  $r = f_1 \cdot g_2 + f_2 \cdot g_1$  для некоторого  $f_2 \in \mathbb{k}[x]$ . Сравнивая степени, заключаем, что  $\deg f_2 < \deg g_2$ . Таким образом,  $r/g = f_1/g_1 + f_2/g_2$  и к каждой из этих дробей применимо то же рассуждение, если её знаменатель является произведением взаимно простых многочленов. Это доказывает существование разложения (3-1). Для доказательства его единственности, умножим обе части разложения (3-1) на  $g$ . Получим равенство вида  $f = hg + f_1 G_1 + \dots + f_m G_m$ , где через  $G_i = g/g_i$  обозначено произведение всех многочленов  $g_j$ , кроме  $i$ -го. Так как  $\deg(f_1 G_1 + \dots + f_m G_m) < \deg g$ , многочлен  $h$  является неполным частным, а  $r = f_1 G_1 + \dots + f_m G_m$  — остатком от деления  $f$  на  $g$ . Каждый  $f_i$  является тем единственным многочленом степени  $< \deg g_i$ , класс которого в  $\mathbb{k}[x]/(g_i)$  равен  $[f]_{g_i}/[G_i]_{g_i}$ . Таким образом, все ингредиенты формулы (3-1) однозначно определяются многочленами  $f$  и  $g_1, \dots, g_n$ .  $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2

Любую дробь вида  $f/g^m$ , в которой  $\deg f < \deg g^m = m \deg g$ , можно единственным образом представить в виде суммы

$$\frac{f}{g^m} = \frac{f_1}{g} + \frac{f_2}{g^2} + \dots + \frac{f_m}{g^m}, \quad (3-2)$$

где  $\deg f_i < \deg g$  при всех  $i$ .

Доказательство. Представление (3-2) равносильно записи  $f$  в виде

$$f = f_1 g^{m-1} + f_2 g^{m-2} + \dots + f_{m-1} g + f_m, \quad (3-3)$$

<sup>1</sup>См. прим. 2.2 на стр. 38.

<sup>2</sup>См. п. 2.2 на стр. 40.

аналогичном записи целого числа  $f$  в  $g$ -ичной позиционной системе исчисления:  $f_m$  является остатком от деления  $f$  на  $g$ ,  $f_{m-1}$  — остатком от деления частного  $(f - f_m)/g$  на  $g$ ,  $f_{m-2}$  — остатком от деления частного  $(\frac{f-f_m}{g} - f_{m-1})/g$  на  $g$  и т. д.  $\square$

**3.2.1. Разложение на простейшие дроби.** Из предыдущих двух предложений вытекает, что каждая дробь  $f/g \in \mathbb{k}(x)$  допускает *единственное* представление в виде суммы неполного частного от деления  $f$  на  $g$  и дробей вида  $p/q^m$ , где  $q$  пробегает неприводимые делители знаменателя  $g$ , показатель  $m$  меняется от 1 до кратности вхождения  $q$  в разложение  $g$  на неприводимые множители, и в каждой из таких дробей  $\deg p < \deg q$ . Такое представление называется *разложением  $f/g$  на простейшие дроби* и бывает полезно в практических вычислениях с рациональными функциями.

ПРИМЕР 3.5

Вычислим 2022-ю производную, а также первообразную<sup>1</sup> от  $1/(1+x^2)$ . Разложим эту дробь в поле  $\mathbb{C}(x)$  на простейшие:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{\alpha}{1+ix} + \frac{\beta}{1-ix}, \quad \text{где } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Подставляя  $x = \pm i$  в равенство  $1 = \alpha(1-ix) + \beta(1+ix)$ , находим  $\alpha = \beta = 1/2$ , т. е.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix} \right).$$

Теперь дифференцируем каждое слагаемое:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dx} \right)^{2022} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{2022!}{2} \left( \frac{(-i)^{2022}}{(1+ix)^{2023}} + \frac{i^{2022}}{(1-ix)^{2023}} \right) = \\ &= -2022! \cdot \frac{1(1-ix)^{2023} + (1+ix)^{2023}}{(1+x^2)^{2023}} = 2022! \cdot \sum_{\nu=0}^{1011} \binom{2023}{2\nu} \cdot \frac{(-1)^{\nu+1} x^{2\nu}}{(1+x^2)^{2023}}, \end{aligned}$$

и интегрируем каждое слагаемое:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+ix} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1-ix} = \frac{\ln(1+ix) - \ln(1-ix)}{2i} = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+ix}{1-ix} = \operatorname{arctg} x.$$

Подчеркнём, что все проделанные вычисления корректно определены в кольце  $\mathbb{C}[[x]]$ , а все написанные равенства суть равенства между элементами этого кольца<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Т. е. такой ряд  $f$  без свободного члена, что  $f'(x) = 1/(1+x^2)$ . Подробнее см. в н° 3.3 на стр. 60.

<sup>2</sup>В частности, последнее равенство вытекает из определения тангенса:

$$\operatorname{tg} t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{it} - e^{-it}}{e^{it} + e^{-it}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2it} - 1}{e^{2it} + 1} \in \mathbb{C}[[t]].$$

Полагая  $\operatorname{tg} t = x$ , получаем  $e^{2it} = \frac{1+ix}{1-ix}$ . Про экспоненту и логарифм мы ещё подробно поговорим в н° 3.3 на стр. 60 ниже.

**3.2.2. Разложение рациональной функции в степенной ряд.** По теор. 3.1 на стр. 55 существует единственное вложение  $\mathbb{k}(x) \hookrightarrow \mathbb{k}(\!(x)\!)$ , переводящее каждый многочлен в себя. Иначе говоря, каждую рациональную функцию можно разложить в ряд Лорана. Если основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто<sup>1</sup>, такое разложение описывается довольно явными формулами. Пусть  $\deg f < \deg g$  и знаменатель дроби  $f/g$  имеет вид:

$$g(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \prod (1 - \alpha_i x)^{m_i}, \quad (3-4)$$

где все числа  $\alpha_i \in \mathbb{k}$  попарно различны.

УПРАЖНЕНИЕ 3.3. Убедитесь, что числа  $\alpha_i$  из разложения (3-4) суть корни многочлена

$$t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_{n-1}t + a_n = \prod (t - \alpha_i)^{m_i}.$$

По предл. 3.1 и предл. 3.2 функция  $f/g$  является суммой простейших дробей

$$\frac{\beta_{ij}}{(1 - \alpha_i x)^{k_{ij}}}, \quad (3-5)$$

где при каждом  $i$  показатели  $k_{ij}$  лежат в пределах  $1 \leq k_{ij} \leq m_i$ , а  $\beta_{ij} \in \mathbb{k}$ .

Если все кратности  $m_i = 1$ , то разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{f(x)}{(1 - \alpha_1 x) \dots (1 - \alpha_n x)} = \frac{\beta_1}{1 - \alpha_1 x} + \dots + \frac{\beta_n}{1 - \alpha_n x}.$$

Чтобы найти  $\beta_i$ , умножим обе части на общий знаменатель и подставим  $x = \alpha_i^{-1}$ . Получим

$$\beta_i = \frac{f(\alpha_i^{-1})}{\prod_{v \neq i} (1 - (\alpha_v / \alpha_i))} = \frac{\alpha_i^{n-1} f(\alpha_i^{-1})}{\prod_{v \neq i} (\alpha_i - \alpha_v)}. \quad (3-6)$$

Мы заключаем, что когда все  $m_i = 1$ , дробь  $f/g$  является суммой  $n = \deg g$  геометрических прогрессий:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum (\beta_1 \alpha_1^k + \beta_2 \alpha_2^k + \dots + \beta_n \alpha_n^k) \cdot x^k, \quad (3-7)$$

где  $\beta_i$  находятся по формулам (3-6).

Простейшая дробь (3-5) с показателем  $k_{ij} = m > 1$  раскладывается в ряд при помощи формулы Ньютона для бинома с отрицательным показателем

$$\frac{1}{(1 - x)^m} = \sum_{k \geq 0} \frac{(k + m - 1) \dots (k + 2)(k + 1)}{(m - 1)!} \cdot x^k = \sum_{k \geq 0} \binom{k + m - 1}{m - 1} \cdot x^k, \quad (3-8)$$

которая получается  $(m - 1)$ -кратным дифференцированием обеих частей разложения геометрической прогрессии  $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

УПРАЖНЕНИЕ 3.4. Убедитесь, что  $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (1 - x)^{-1} = n! / (1 - x)^{n+1}$ .

Таким образом, разложение простейшей дроби (3-5) имеет вид

$$\frac{\beta}{(1 - \alpha_i x)^m} = \beta \sum_{k \geq 0} \alpha_i^k \binom{k + m - 1}{m - 1} \cdot x^k. \quad (3-9)$$

<sup>1</sup>Т. е. каждый многочлен из  $\mathbb{k}[x]$  полностью раскладывается в  $\mathbb{k}[x]$  на линейные множители.

**3.2.3. Решение линейных рекуррентных уравнений.** Предыдущие вычисления можно использовать для отыскания «формулы  $k$ -того члена» последовательности  $z_k$ , заданной *линейным рекуррентным уравнением  $n$ -того порядка*:

$$z_k + a_1 z_{k-1} + a_2 z_{k-2} + \dots + a_n z_{k-n} = 0, \quad (3-10)$$

где коэффициенты  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  — заданные числа. При  $k \geq n$  уравнению (3-10) удовлетворяют коэффициенты  $z_k$  любого степенного ряда вида

$$z_0 + z_1 x + z_2 x^2 + \dots = \frac{b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}}{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}.$$

Если в числителе правой части подобрать коэффициенты  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$  так, чтобы первые  $n$  коэффициентов  $z_0, \dots, z_{n-1}$  разложения полученной дроби в степенной ряд совпали с первыми  $n$  членами последовательности (3-10), то формулы (3-6) и (3-9) дадут явные выражения элементов последовательности  $z_k$  через  $k$ .

Пример 3.6 (числа Фибоначчи)

Найдём явное выражение через  $k$  для элементов последовательности  $z_k$ , в которой

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 1 \quad \text{и} \quad z_k = z_{k-1} + z_{k-2} \quad \text{при} \quad k \geq 2.$$

Рекуррентное уравнение  $z_k - z_{k-1} - z_{k-2} = 0$  описывает коэффициенты ряда

$$x + z_2 x^2 + z_3 x^3 + \dots = \frac{b_0 + b_1 x}{1 - x - x^2},$$

у которого  $z_0 = 0$  и  $z_1 = 1$ . Умножая обе части на знаменатель и сравнивая коэффициенты при  $x^0$  и  $x^1$ , заключаем, что  $b_0 = 0$ , а  $b_1 = 1$ . Таким образом,

$$z(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{\beta_+}{1 - \alpha_+ x} + \frac{\beta_-}{1 - \alpha_- x},$$

где  $\alpha_{\pm} = (1 \pm \sqrt{5})/2$  суть корни многочлена  $t^2 - t - 1$ , а  $\beta_+ = -\beta_- = 1/(\alpha_+ - \alpha_-) = 1/\sqrt{5}$  по формуле (3-6). Разложение  $z(x)$  в ряд имеет вид

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{1 - \alpha_+ x} - \frac{1}{1 - \alpha_- x} \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha_+^k - \alpha_-^k}{\sqrt{5}} \cdot x^k,$$

т. е.

$$z_k = \frac{(1 + \sqrt{5})^k - (1 - \sqrt{5})^k}{2^k \sqrt{5}}.$$

Предложение 3.3

Если последовательность чисел  $z_k \in \mathbb{C}$  удовлетворяет при  $k \geq n$  рекуррентному уравнению

$$z_k + a_1 z_{k-1} + a_2 z_{k-2} + \dots + a_n z_{k-n} = 0 \quad (3-11)$$

с постоянными коэффициентами  $a_i \in \mathbb{C}$ , то  $z_k = \alpha_1^k \varphi_1(k) + \dots + \alpha_r^k \varphi_r(k)$ , где  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  — это все различные корни многочлена<sup>1</sup>

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n, \quad (3-12)$$

а  $\varphi_i(x) \in \mathbb{C}[x]$  и  $\deg \varphi_i$  строго меньше кратности соответствующего корня  $\alpha_i$ .

<sup>1</sup>Он называется *характеристическим многочленом* рекуррентного уравнения (3-10).

Доказательство. Ряд  $\sum z_k x^k \in \mathbb{C}[[x]]$ , коэффициенты которого решают уравнение (3-11), является суммой дробей вида  $\beta(1 - \alpha x)^{-m}$ , где  $\alpha$  пробегает различные корни многочлена (3-12), показатель  $m$  лежит в пределах от 1 до кратности соответствующего корня  $\alpha$ , и для каждой пары  $\alpha, m$  комплексное число  $\beta = \beta(\alpha, m)$  однозначно вычисляется по  $\alpha, m$  и первым  $n$  коэффициентам последовательности  $z_k$ . Согласно формуле (3-9) коэффициент при  $x^k$  у разложения дроби  $(1 - \alpha x)^{-m}$  в степенной ряд имеет вид  $\alpha^k \varphi(k)$ , где  $\varphi(k) = \binom{k+m-1}{m-1}$  является многочленом степени  $m - 1$  от  $k$ .  $\square$

**3.3. Логарифм и экспонента.** Всюду в этом разделе мы рассматриваем ряды с коэффициентами в поле  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char } \mathbb{k} = 0$ . В этом случае для любого ряда  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$  существует единственный ряд без свободного члена, производная от которого равна  $f(x)$ . Он называется *первообразной* или *интегралом* от  $f$  и обозначается

$$\int f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots = \sum_{k \geq 1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k. \quad (3-13)$$

Первообразный ряд от знакпеременной геометрической прогрессии называется *логарифмом* и обозначается

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dx}{1+x} = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \dots) dx = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k. \end{aligned} \quad (3-14)$$

Единственный ряд со свободным членом 1, совпадающий со своей производной, называется *экспонентой* и обозначается

$$e^x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 0} x^k / k! = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots \quad (3-15)$$

**3.3.1. Логарифмирование и экспоненцирование.** Обозначим через  $N = (x) \subset \mathbb{k}[[x]]$  аддитивную абелеву группу всех рядов без свободного члена, а через  $U = 1 + N \subset \mathbb{k}[[x]]$  — мультипликативную абелеву группу всех рядов с единичным свободным членом. Подстановка в аргумент логарифма вместо  $1 + x$  произвольного ряда  $u(x) \in U$  означает подстановку в логарифмический ряд (3-14) вместо переменной  $x$  ряда  $u(x) - 1$  без свободного члена и тем самым является алгебраической операцией<sup>1</sup>. Мы получаем отображение *логарифмирования*

$$\ln : U \rightarrow N, \quad u \mapsto \ln u. \quad (3-16)$$

УПРАЖНЕНИЕ 3.5. Убедитесь, что  $\frac{d}{dx} \ln u = u' / u$  и  $\ln(1/u) = -\ln u$  для всех  $u \in U$ .

Подстановка в экспоненту (3-15) вместо  $x$  любого ряда  $\tau(x) \in N$  даёт ряд  $e^{\tau(x)}$  со свободным членом 1. Мы получаем *экспоненциальное отображение*

$$\exp : N \rightarrow U, \quad \tau \mapsto e^\tau. \quad (3-17)$$

ЛЕММА 3.3

Для рядов  $u, w \in U$  равенства  $u = w$ ,  $u' = w'$ ,  $\ln(u) = \ln(w)$  и  $u' / u = w' / w$  попарно эквивалентны друг другу.

<sup>1</sup>См. п° 2.1.1 на стр. 37.

Доказательство. Первое равенство влечёт за собой все остальные. Поскольку ряды с равными свободными членами совпадают если и только если совпадают их производные, первые два равенства и последние два равенства равносильны друг другу. Остаётся показать, что из последнего равенства следует первое. Но последнее равенство утверждает, что  $u'/u - w'/w = (u'w - w'u)/uw = (w/u) \cdot (u/w)' = 0$  откуда  $(u/w)' = 0$ , т. е.  $u/w = \text{const} = 1$ .  $\square$

### ТЕОРЕМА 3.2

Экспоненциальное и логарифмическое отображения (3-17) и (3-16) являются взаимно обратными изоморфизмами абелевых групп, т. е. для любых рядов  $u, u_1, u_2$  из  $U$  и  $\tau, \tau_1, \tau_2$  из  $N$  выполняются тождества  $\ln e^\tau = \tau$ ,  $e^{\ln u} = u$ ,  $\ln(u_1 u_2) = \ln(u_1) + \ln(u_2)$ ,  $e^{\tau_1 + \tau_2} = e^{\tau_1} e^{\tau_2}$ .

Доказательство. Равенство  $\ln e^\tau = \tau$  проверяется сравнением производных от обеих частей:

$$(\ln e^\tau)' = \frac{(e^\tau)'}{e^\tau} = \frac{e^\tau \tau'}{e^\tau} = \tau',$$

а равенство  $e^{\ln u} = u$  — сравнением логарифмических производных:

$$\frac{(e^{\ln u})'}{e^{\ln u}} = \frac{e^{\ln u} (\ln u)'}{e^{\ln u}} = \frac{u'}{u}.$$

Тем самым, экспоненцирование и логарифмирование являются взаимно обратными биекциями. Ряды  $\ln(u_1 u_2)$  и  $\ln u_1 + \ln u_2$  совпадают, поскольку имеют нулевые свободные члены и равные производные:

$$(\ln(u_1 u_2))' = \frac{(u_1 u_2)'}{u_1 u_2} = \frac{u_1' u_2 + u_1 u_2'}{u_1 u_2} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} = (\ln u_1 + \ln u_2)'$$

Поэтому логарифмирование — гомоморфизм, а значит, и обратное к нему экспоненцирование — тоже.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 3.6. Докажите в  $\mathbb{k}[[x, y]]$  равенство  $e^{x+y} = e^x e^y$  непосредственным сравнением коэффициентов этих двух рядов.

**3.3.2. Степенная функция и бином.** В этом разделе мы продолжаем считать, что поле  $\mathbb{k}$  имеет характеристику нуль. Для любого числа  $\alpha \in \mathbb{k}$  определим *биномиальный ряд* с показателем  $\alpha$  формулой

$$(1+x)^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} e^{\alpha \ln(1+x)}.$$

Подставляя вместо  $1+x$  произвольные ряды  $u \in U$ , мы для любого числа  $\alpha \in \mathbb{k}$  получаем алгебраическую операцию *возведения в  $\alpha$ -тую степень*  $U \rightarrow U$ ,  $u \mapsto u^\alpha$ , обладающую всеми интуитивно ожидаемыми от степенной функции свойствами. В частности, для любых рядов  $u, v \in U$  и чисел  $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} u^\alpha \cdot u^\beta &= e^{\alpha \ln u} e^{\beta \ln u} = e^{\alpha \ln u + \beta \ln u} = e^{(\alpha+\beta) \ln u} = u^{\alpha+\beta} \\ (u^\alpha)^\beta &= e^{\beta \ln(u^\alpha)} = e^{\beta \ln(e^{\alpha \ln u})} = e^{\alpha \beta \ln u} = u^{\alpha \beta} \\ (uv)^\alpha &= e^{\alpha \ln(uv)} = e^{\alpha (\ln u + \ln v)} = e^{\alpha \ln u + \alpha \ln v} = e^{\alpha \ln u} \cdot e^{\alpha \ln v} = u^\alpha v^\alpha. \end{aligned}$$

Например, для любого ряда  $u$  с единичным свободным членом ряд  $u^{1/n}$  представляет собою  $\sqrt[n]{u}$  в том смысле, что  $(u^{1/n})^n = u$ . Чтобы явно найти коэффициенты  $a_i$  биномиального ряда

$$(1+x)^\alpha = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

рассмотрим его логарифмическую производную

$$\frac{((1+x)^\alpha)'}{(1+x)^\alpha} = \frac{d}{dx} \ln(1+x)^\alpha = \alpha \frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{\alpha}{1+x}.$$

Умножая левую и правую части на  $(1+x)^{\alpha+1}$ , получаем равенство

$$(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots) \cdot (1+x) = \alpha \cdot (1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots).$$

Сравнивая коэффициенты при  $x^{k-1}$  в правой и левой части, приходим к рекуррентному соотношению  $ka_k + (k-1)a_{k-1} = \alpha a_{k-1}$ , из которого

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\alpha - (k-1)}{k} \cdot a_{k-1} = \frac{(\alpha - (k-1))(\alpha - (k-2))}{k(k-1)} \cdot a_{k-2} = \dots \\ &= \frac{(\alpha - (k-1))(\alpha - (k-2)) \dots (\alpha - 1)\alpha}{k!}. \end{aligned}$$

Стоящая в правой части дробь имеет в числителе и знаменателе по  $k$  множителей, представляющих собою последовательно уменьшающиеся на единицу числа: в знаменателе — от  $k$  до 1, в числителе — от  $\alpha$  до  $(\alpha - k + 1)$ . Эта дробь называется *биномиальным коэффициентом* и обозначается

$$\binom{\alpha}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (3-18)$$

Таким образом, для любого  $\alpha \in \mathbb{k}$  справедлива *формула Ньютона*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots$$

**ПРИМЕР 3.7** (БИНОМ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ)

Если  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , то при  $k > n$  в числителе дроби (3-18) появится нулевой сомножитель. Поэтому разложение бинома в этом случае конечно и имеет вид

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k,$$

знакомый нам из форм. (0-8) на стр. 8. При  $\alpha = -m$ , где  $m \in \mathbb{N}$ , мы получаем разложение из форм. (3-8) на стр. 58

$$(1+x)^{-m} = 1 - mx + \frac{m(m+1)}{2} x^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{6} x^3 + \dots = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{k+m-1}{k} \cdot x^k.$$

При  $\alpha = 1/n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , формула Ньютона разворачивает в степенной ряд радикал

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1+x} &= 1 + \frac{1}{n} x + \frac{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1\right)}{2} x^2 + \frac{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1\right) \left(\frac{1}{n} - 2\right)}{6} x^3 + \dots = \\ &= 1 + \frac{x}{n} - \frac{n-1}{2} \cdot \frac{x^2}{n^2} + \frac{(n-1)(2n-1)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{n^3} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{x^4}{n^4} + \dots \end{aligned}$$

Например, при  $n = 2$  и  $k \geq 1$  в качестве коэффициента при  $x^k$  получается дробь

$$(-1)^{k-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{2^k k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k} \cdot \frac{1}{4^{k-1}} \cdot \binom{2k-2}{k-1},$$

т. е.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} \cdot \binom{2k-2}{k-1} \cdot \frac{x^k}{4^{k-1}}. \quad (3-19)$$

Пример 3.8 (числа Каталана)

Воспользуемся разложением (3-19) для получения явной формулы для чисел Каталана, часто возникающих в комбинаторных задачах. Вычислим произведение  $n + 1$  чисел

$$a_0 a_1 \dots a_n, \quad (3-20)$$

делая за один шаг ровно одно из  $n$  умножений и заключая перемножаемые числа в скобки. В результате мы расставим  $n$  пар скобок в выражении (3-20). Количество различных расстановок скобок, возникающих таким образом, называется  $n$ -ым числом Каталана  $c_n$ . При  $n = 1$  есть лишь одна расстановка скобок  $(a_0 a_1)$ , при  $n = 2$  — две  $(a_0(a_1 a_2))$  и  $((a_0 a_1)a_2)$ , при  $n = 3$  — пять:  $(a_0(a_1(a_2 a_3)))$ ,  $(a_0((a_1 a_2)a_3))$ ,  $((a_0 a_1)(a_2 a_3))$ ,  $((a_0(a_1 a_2))a_3)$ ,  $((a_0 a_1)a_2)a_3$ . Множество всевозможных расстановок скобок в произведении (3-20) распадается в дизъюнктное объединение  $n$  подмножеств, в которых конфигурации наружных скобок имеют вид

$$(a_0(a_1 \dots a_n)), ((a_0 a_1)(a_2 \dots a_n)), \dots, ((a_0 \dots a_{n-2})(a_{n-1} a_n)), ((a_0 \dots a_{n-1})a_n)$$

и которые состоят, соответственно, из  $c_{n-1}$ ,  $c_1 c_{n-2}$ ,  $c_2 c_{n-3}$ ,  $\dots$ ,  $c_{n-2} c_1$ ,  $c_{n-1} c_0$  элементов. Если дополнить последовательность чисел Каталана числом  $c_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ , то получится соотношение

$$c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \dots + c_{n-2} c_1 + c_{n-1} c_0,$$

означающее, что ряд Каталана  $c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 0} c_k x^k = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots \in \mathbb{Z}[[x]]$  удовлетворяет уравнению  $c(x)^2 = (c(x) - 1)/x$ , т. е. является лежащим в кольце  $\mathbb{Z}[[x]]$  корнем квадратного трёхчлена  $xt^2 - t - 1 = 0$  от переменной  $t$ . В поле рядов Лорана  $\mathbb{Q}(x) \supset \mathbb{Z}[[x]]$  корни находятся по стандартной школьной формуле  $t = (1 \pm \sqrt{1 - 4x})/2x$ . Так как  $1 + \sqrt{1 - 4x}$  не делится на  $2x$  в  $\mathbb{Z}[[x]]$ , корень  $(1 + \sqrt{1 - 4x})/(2x) \notin \mathbb{Z}[[x]]$ . Тем самым,  $c(x) = (1 - \sqrt{1 - 4x})/(2x)$ , откуда по формуле (3-19)

$$c_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}.$$

Отметим, что даже не сразу понятно, что это число — целое.

**3.4. Действие  $\mathbb{Q}[[d/dt]]$  на  $\mathbb{Q}[t]$ .** Рассмотрим кольцо формальных степенных рядов  $\mathbb{Q}[[x]]$  от переменной  $x$  и кольцо многочленов  $\mathbb{Q}[t]$  от переменной  $t$ . Обозначим через

$$D = \frac{d}{dt} : \mathbb{Q}[t] \rightarrow \mathbb{Q}[t], \quad g \mapsto g',$$

оператор дифференцирования. Оператор  $D$  можно подставить вместо переменной  $x$  в любой степенной ряд  $\Phi(x) = \sum_{k \geq 0} \varphi_k x^k \in \mathbb{Q}[[x]]$ . Результатом такой подстановки, по определению, является линейное отображение

$$\Phi(D) : \mathbb{Q}[t] \rightarrow \mathbb{Q}[t], \quad f \mapsto \sum_{k \geq 0} \varphi_k D^k f = \varphi_0 f + \varphi_1 f' + \varphi_2 f'' + \dots \quad (3-21)$$

Поскольку каждое дифференцирование уменьшает степень многочлена на единицу, все слагаемые в правой части (3-21) обратятся в нуль при  $k > \deg f$ . Таким образом, для каждого многочлена  $f \in \mathbb{Q}[t]$ , правая часть (3-21) является корректно определённым многочленом, каждый коэффициент которого вычисляется конечным числом действий с коэффициентами исходного многочлена  $f$  и первыми  $\deg(f)$  коэффициентами ряда  $\Phi$ . Линейность отображения (3-21) означает, что  $\Phi(D)(\alpha f + \beta g) = \alpha\Phi(D)f + \beta\Phi(D)g$  для всех  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$  и  $f, g \in \mathbb{Q}[t]$ . Результатом подстановки оператора  $D$  в произведение рядов  $\Phi(x)\Psi(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$  является композиция  $\Phi(D) \circ \Psi(D) = \Psi(D) \circ \Phi(D)$  отображений  $\Phi(D)$  и  $\Psi(D)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.7. Убедитесь в этом.

Таким образом, все отображения вида  $\Phi(D)$  перестановочны друг с другом, и для биективности отображения  $\Phi(D)$  необходимо и достаточно, чтобы степенной ряд  $\Phi(x)$  был обратим<sup>1</sup> в кольце  $\mathbb{Q}[[x]]$ . В силу линейности значение отображения  $\Phi(D)$  на произвольном многочлене выражается через его значения  $\Phi_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(D)t^m$  на базисных одночленах  $t^m$ :

$$\Phi(D)(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) = a_0 + a_1 \Phi_1(t) + \dots + a_n \Phi_n(t).$$

Многочлен  $\Phi_m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(D)t^m$  называется  $m$ -тым *многочленом Аппеля* ряда  $\Phi$ . Его степень не превосходит  $m$ , а коэффициенты зависят лишь от первых  $m + 1$  коэффициентов ряда  $\Phi$ .

ПРИМЕР 3.9 (ОПЕРАТОРЫ СДВИГА)

Экспонента  $e^D = 1 + D + D^2/2 + D^3/6 + \dots$  имеет многочлены Аппеля

$$e^D t^m = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} D^k t^m = \sum_{k \geq 0} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} t^{m-k} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} t^{m-k} = (t+1)^m.$$

Поэтому  $e^D : f(t) \mapsto f(t+1)$  — это *оператор сдвига*. Так как ряды  $e^x$  и  $e^{-x}$  обратны друг другу в  $\mathbb{Q}[[x]]$ , операторы  $e^D$  и  $e^{-D}$  тоже обратны друг другу, т. е.  $e^{-D} : f(t) \mapsto f(t-1)$ .

УПРАЖНЕНИЕ 3.8. Убедитесь, что  $e^{\alpha D} : f(t) \mapsto f(t+\alpha)$  при любом  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

ПРИМЕР 3.10 (ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ СТЕПЕНЕЙ)

Для произвольно зафиксированного  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  рассмотрим сумму

$$S_m(n) \stackrel{\text{def}}{=} 0^m + 1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m = \sum_{k=0}^n k^m \quad (3-22)$$

как функцию от  $n$ . При  $m = 0, 1, 2, 3$  функции  $S_m(n)$  достаточно известны:

$$\begin{aligned} S_0(n) &= 1 + \dots + 1 = n \\ S_1(n) &= 1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2 \\ S_2(n) &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6 \\ S_3(n) &= 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = n^2(n+1)^2/4 = S_1(n)^2. \end{aligned} \quad (3-23)$$

Чтобы получить для  $S_m(t)$  явное выражение, применим к этой функции *разностный оператор*

$$\nabla : \varphi(t) \mapsto \varphi(t) - \varphi(t-1).$$

<sup>1</sup>Т. е. имел ненулевой свободный член, см. прим. 2.2 на стр. 38.

Функция  $\nabla S_m(t)$  принимает при всех  $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  те же значения, что и многочлен  $t^m$ . Если существует такой многочлен  $S_m(t) \in \mathbb{Q}[t]$ , что  $S_m(0) = 0$  и  $\nabla S_m(t) = t^m$ , то его значения в точках  $t = 0, 1, 2, \dots$  последовательно вычисляются, начиная с  $S_m(0) = 0$ , по формуле

$$S_m(n) = S_m(n-1) + \nabla S_m(n) = S_m(n-1) + n^m$$

и совпадают с суммами (3-22). Покажем, что уравнение  $\nabla S_m(t) = t^m$  имеет в  $\mathbb{Q}[t]$  единственное решение  $S_m(t)$  с  $S_m(0) = 0$ . Согласно прим. 3.9 оператор  $\nabla: \mathbb{Q}[t] \rightarrow \mathbb{Q}[t]$  имеет вид

$$\nabla = 1 - e^{-D} = \frac{1 - e^{-D}}{D} \circ D.$$

Ряд  $(1 - e^{-x})/x$  имеет свободный член 1 и обратим в  $\mathbb{Q}[[x]]$ . Обратный ему ряд

$$\text{td}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{1 - e^{-x}} \in \mathbb{Q}[[x]]$$

называется *рядом Тодда*. Подставляя  $x = D$  в равенство  $\text{td}(x) \cdot (1 - e^{-x}) = x$ , получаем соотношение  $\text{td}(D) \circ \nabla = D$ . Стало быть,  $DS_m(t) = \text{td}(D)\nabla S_m(t) = \text{td}(D)t^m = \text{td}_m(t)$  является многочленом Аппеля ряда Тодда, а искомый нами многочлен  $S_m(t) = \int \text{td}_m(t) dt$  получается из него интегрированием. Запишем ряд Тодда в «экспоненциальной форме»

$$\text{td}(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k!} x^k. \quad (3-24)$$

Сумма  $m$ -тых степеней первых  $t$  натуральных чисел равна

$$\begin{aligned} S_m(t) &= \int \left( \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{k!} D^k t^m \right) dt = \int \left( \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a_k t^{m-k} \right) dt = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{a_k t^{m-k+1}}{m-k+1} = \\ &= \frac{1}{m+1} \left( \binom{m+1}{1} a_m t + \binom{m+1}{2} a_{m-1} t^2 + \dots + \binom{m+1}{m} a_1 t^m + \binom{m+1}{m+1} a_0 t^{m+1} \right). \end{aligned}$$

Эту формулу часто символически пишут в виде

$$(m+1) \cdot S_m(t) = (a^\downarrow + t)^{m+1} - a_{m+1},$$

где стрелка у  $a^\downarrow$  предписывает при раскрытии бинома  $(a+t)^{m+1}$  заменять  $a^k$  на  $a_k$ . Коэффициенты  $a_k$  рекурсивно вычисляются из равенства  $\text{td}(x) \cdot (1 - e^{-x})/x = 1$ , которое имеет вид

$$\left( 1 + a_1 x + \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{a_3}{6} x^3 + \frac{a_4}{24} x^4 + \dots \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{24} x^3 + \frac{1}{120} x^4 - \dots \right) = 1.$$

**УПРАЖНЕНИЕ 3.9.** Найдите первую дюжину чисел  $a_k$ , проверьте формулы (3-23), дополните их явными формулами для  $S_4(n)$  и  $S_5(n)$  и вычислите<sup>1</sup>  $S_{10}(1000)$ .

<sup>1</sup>Яков Бернулли (1654–1705), пользуясь лишь пером и бумагой, сложил 10-е степени первой тысячи натуральных чисел примерно за 7 минут, о чём не без гордости написал в своём манускрипте «Ars Conjectandi», изданном в 1713 году уже после его кончины.

Замечание 3.1. (числа Бернулли) Название «ряд Тодда» вошло в обиход во второй половине XX века после работ Хирцебруха и Гротендика, где он использовался для формулировки и доказательства теоремы Римана – Роха. Во времена Бернулли и Эйлера предпочитали пользоваться рядом  $td(-x) = x/(e^x - 1)$ , который отличается от  $td(x)$  ровно в одном члене, поскольку

$$td(x) - td(-x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} + \frac{x}{1 - e^x} = x \cdot \frac{2 - e^x - e^{-x}}{(1 - e^{-x}) \cdot (1 - e^x)} = x.$$

Тем самым, коэффициенты при  $x$  в  $td(x)$  и в  $td(-x)$  равны соответственно  $1/2$  и  $-1/2$ , а все прочие коэффициенты при нечётных степенях  $x^{2k+1}$  с  $k \geq 1$  в обоих рядах нулевые. Коэффициенты  $B_k$  в экспоненциальном представлении

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{k!} x^k$$

называются *числами Бернулли*. Таким образом,  $B_k = a_k$  при  $k \neq 1$  и обращаются в нуль при всех нечётных  $k \geq 3$ , а  $B_1 = -a_1 = -1/2$ . Со времён своего открытия числа Бернулли вызывают неослабевающий интерес. Им посвящена обширная литература<sup>1</sup> и специальный интернет-ресурс<sup>2</sup>, на котором среди прочего есть программа для быстрого вычисления чисел  $B_k$  в виде несократимых рациональных дробей. Однако, не смотря на множество красивых теорем о числах Бернулли, про явную зависимость  $B_n$  от  $n$  известно немного, и любой содержательный новый взгляд в этом направлении был бы интересен.

Упражнение 3.10. Получите для чисел Бернулли рекурсивную формулу

$$(n + 1)B_n = - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k.$$

<sup>1</sup>Начать знакомство с которой я советую с гл. 15 книги К. Айрлэнд, М. Роузен. «Классическое введение в современную теорию чисел» и § 8 гл. V книги З. И. Борович, И Р. Шафаревич. «Теория чисел».

<sup>2</sup><http://www.bernoulli.org/>

### Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 3.1. Воспользуйтесь лем. 3.1.

Упр. 3.2. По теор. 3.1 на стр. 55 эпиморфизм  $\pi : K = \mathbb{Z}/(30) \rightarrow \mathbb{Z}/(15)$ ,  $[n]_{30} \mapsto [n]_{15}$ , раскладывается в композицию гомоморфизма  $\iota_S : K \rightarrow KS^{-1}$  и гомоморфизма

$$\pi_S : KS^{-1} \rightarrow \mathbb{Z}/(15), \quad [m]_{30}/[2^k]_{30} \mapsto [m]_{15}[2^k]_{15}^{-1},$$

сюръективного в силу сюръективности  $\pi$ . Если  $[m]_{30}/[2^k]_{30} \in \ker \pi_S$ , то  $[m]_{15} = 0$ , а значит,  $[m]_{30}/[2^k]_{30} = [2m]_{30}/[2^{k+1}]_{30} = 0$  в  $KS^{-1}$ . Тем самым,  $\ker \pi_S = 0$  и  $\pi_S$  инъективен.

Упр. 3.4. По правилу дифференцирования композиции  $(f^m)' = mf^{m-1}f'$ , откуда

$$\frac{d}{dx}(1-x)^{-m} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right)^m = m(1-x)^{-(m+1)}.$$

Нужная формула получается отсюда по индукции.

Упр. 3.5. Первое равенство вытекает из правила дифференцирования сложной функции<sup>1</sup>, второе доказывается дифференцированием обеих частей.

Упр. 3.9. Ответы:  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_2 = \frac{1}{6}$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = -\frac{1}{30}$ ,  $a_5 = 0$ ,  $a_6 = \frac{1}{42}$ ,  $a_7 = 0$ ,  $a_8 = -\frac{1}{30}$ ,  $a_9 = 0$ ,  
 $a_{10} = \frac{5}{66}$ ,  $a_{11} = 0$ ,  $a_{12} = -\frac{691}{2730}$ ,

$$S_4(n) = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$$

$$S_5(n) = n^2(n+1)^2(2n+1)(2n^2+2n-1)/12$$

$$S_{10}(1000) = 91\,409\,924\,241\,424\,243\,424\,241\,924\,242\,500.$$

Упр. 3.10. Подставьте  $t = 1$  в  $(m+1)S_m(t) = (a^\downarrow + t)^{m+1} - a_{m+1}$ .

---

<sup>1</sup>См. формулу (2-8) на стр. 39.