Комплексные и вещественные пространства

АЛ12◇1 (сопряжённые комплексные структуры). Рассмотрим комплексное векторное пространство W. Обозначим через $\overline{W}$ пространство, которое совпадает с W как векторное пространство над $\mathbb{R}$, но на комплексные числа векторы умножаются по формуле $z \cdot w \overset{\text{def}}{=} \overline{z}w$ (слева стоит произведение в $\overline{W}$, справа — в W). Покажите, что

а) $\overline{W}$ является векторным пространством над $\mathbb{C}$ и $\dim_{\mathbb{C}} \overline{W} = \dim_{\mathbb{C}} W$

б) комплексификация $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}}$ овеществления $W_{\mathbb{R}}$ пространства W канонически изоморфна $W \oplus \overline{W}$ как комплексное векторное пространство.

АЛ12◇2. Для $\mathbb{C}$-линейного оператора $f : W \to W$ обозначим через $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \otimes W_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C} \otimes W_{\mathbb{R}}$ комплексификацию его овеществления. Как связаны друг с другом **а)** характеристические многочлены **б)** собственные числа **в)** собственные векторы **г)** элементарные делители операторов f и $f_{\mathbb{C}}$? Если общий случай вызывает затруднения, начните с оператора $z \mapsto iz$ умножения на i в одномерном пространстве $W = \mathbb{C}$.

АЛ12◇3 (теорема Шура). Докажите, что любой оператор на эрмитовом пространстве записывается в подходящем ортонормальном базисе верхнетреугольной матрицей.

АЛ12◇4. Постройте изоморфизм групп $\mathrm{U}_n \simeq \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

АЛ12◇5. Всякая ли унитарная матрица является произведением вещественной ортогональной и комплексной симметричной матриц?

АЛ12◇6. Всякая ли матрица из SU_2 подобна вещественной ортогональной матрице?

АЛ12◇7 (нормальные операторы). Докажите, что нормальность оператора f в эрмитовом пространстве равносильна каждому из следующих свойств:

а) $||fv|| = ||f^{\times}v||$ для всех $v \in V$

б) каждый собственный вектор оператора f собственный и для $f^{\times}$

в) ортогонал к любому f-инвариантному подпространству f-инвариантен

г) всякое f-инвариантное подпространство $f^{\times}$-инвариантно

д) компоненты разложения f в сумму эрмитова и антиэрмитова операторов перестановочны

АЛ12◇8. Верно ли, что обратимый оператор нормален если и только если компоненты его полярного разложения перестановочны?

АЛ12◇9. Докажите, что для любых $h \in \mathrm{U}_n$ и $k \in \mathbb{N}$ существует такой $f \in \mathbb{C}[t]$, что $f(h) \in \mathrm{U}_n$ и $f(h)^k = h$.

АЛ12◇10. Пусть f — эрмитов оператор на координатном пространстве $\mathbb{C}^n$ со стандартной эрмитовой структурой, а $L \subset \mathbb{C}^n$ — r-мерное комплексное подпространство с ортонормальным базисом $e_1, \dots, e_r$. Положим $R_L(f) = \sum_{i=1}^{r}(fe_i, e_i)$.

а) Зависит ли $R_L(f)$ от выбора ортонормального базиса в L?

б*) Пусть f имеет попарно разные собственные значения $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$. Найдите $\max_L R_L(f)$ по всем r-мерным подпространствам $L \subset \mathbb{C}^n$.

АЛ12◇11*. Покажите, что унитарная группа U_n компактна и линейно связна.

АЛ12◇12*. На комплексном векторном пространстве V заданы невырожденная симметричная $\mathbb{C}$-билинейная форма $g : V \times V \to \mathbb{C}$ и такой $\mathbb{C}$-линейный оператор $f : V \to V$, что $\beta(fu, w) = \beta(u, fw)$ для всех $u, w \in V$. Докажите, что у оператора f есть такой жорданов базис, в котором матрица Грама формы β блочно диагональна и состоит из блоков вида

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Персональный табель ______________________________. **Листок № 12 (24.05.2024)**
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
2а			
б			
в			
г			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
г			
д			
8			
9			
10а			
б			
11			
12			