

### Тензорные произведения

**АЛ10◊1.** Для конечномерных векторных пространств  $U, V, W$  постройте изоморфизмы:

а)  $\text{Hom}(U \otimes W, V) \simeq \text{Hom}(W, \text{Hom}(U, V))$  и  $\text{Hom}(\text{Hom}(U, W), V) \simeq \text{Hom}(W, U \otimes V)$

б)  $\text{Hom}(U \otimes \text{Hom}(U, W), W) \simeq \text{End}(\text{Hom}(U, W)) \simeq \text{Hom}(U, \text{Hom}(U, W)^* \otimes W)$

в)  $\text{End}(U \otimes V \otimes W) \simeq \text{Hom}(\text{Hom}(U, V) \otimes \text{Hom}(V, W), \text{Hom}(U, W))$ .

**АЛ10◊2\*.** В какое линейное отображение  $\text{Hom}(U, V) \otimes \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(U, W)$  переходит в **зад. АЛ10◊1 (в)** тождественный эндоморфизм пространства  $U \otimes V \otimes W$ ?

**АЛ10◊3\*.** Какому эндоморфизму пространства  $\text{Hom}(U, W)$  отвечает в **зад. АЛ10◊1 (б)** отображение  $c : U \otimes \text{Hom}(U, W) \rightarrow W, u \otimes \varphi \mapsto \varphi(u)$ ? Как устроено ядро соответствующего ему линейного отображения  $U \rightarrow \text{Hom}(U, W)^* \otimes W$ ?

**АЛ10◊4.** Существуют ли такие ненулевые линейные операторы  $F_1, \dots, F_m : V \rightarrow V$  и отличный от нулевого набор констант  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ , что  $\lambda_1 F_1^{\otimes n} + \dots + \lambda_m F_m^{\otimes n} = 0$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ ?

**АЛ10◊5.** Найдите размерность пространства таких трилинейных форм  $\varphi : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  на  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{k}$  с  $\text{char } \mathbb{k} > 3$ , что для всех  $u, v, w \in V$

а)  $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w) = \varphi(u, w, v)$  б)  $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w)$

в)  $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w) = \varphi(u, w, w)$  г)  $\varphi(u, v, v) = \varphi(u, u, v) = 0$  д)  $\varphi(u, u, u) = 0$

е\*)  $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, w, u)$  ж\*)  $\varphi(u, v, w) + \varphi(v, w, u) + \varphi(w, u, v) = 0$ .

**АЛ10◊6.** Пусть  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2, U = \mathbb{k}^2$  и  $V = \text{End}(U)$ . Покажите, что  $\text{Sym}^2 V \simeq (\text{Sym}^2 U \otimes \text{Sym}^2 U^*) \oplus (\text{Alt}^2 U \otimes \text{Alt}^2 U^*), \text{Alt}^2 V \simeq (\text{Sym}^2 U \otimes \text{Alt}^2 U^*) \oplus (\text{Alt}^2 U \otimes \text{Sym}^2 U^*)$ .

**АЛ10◊7.** Пусть  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$  — невырожденная симметричная билинейная форма. Покажите, что существует единственная билинейная форма  $\Lambda^2 \beta : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \rightarrow \mathbb{k}$ , значение которой на разложимых тензорах равно  $\Lambda^2 \beta(v_1 \wedge v_2, w_1 \wedge w_2) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \beta(v_1, w_1) & \beta(v_1, w_2) \\ \beta(v_2, w_1) & \beta(v_2, w_2) \end{pmatrix}$ .

Вырождена ли она? Симметрична ли?

**АЛ10◊8\*.** Пусть в **зад. АЛ10◊7** пространство  $V = \text{End}(U)$ , как в **зад. АЛ10◊6**, а билинейная форма  $\beta$  является поляризацией квадратичной формы  $\det : \text{End}(U) \rightarrow \mathbb{k}$ . Фиксируем двойственные базисы  $e_1, e_2 \in U, x_1, x_2 \in U^*$  и базис  $v_{ij} = e_i \otimes x_j$  в  $V$ . Покажите, что а) формула  $\omega \wedge \eta = \alpha(\omega, \eta) v_{11} \wedge v_{12} \wedge v_{21} \wedge v_{22}$  задаёт невырожденную симметричную билинейную форму  $\alpha : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \rightarrow \mathbb{k}$  б) для каждого  $\omega \in \Lambda^2 V$  существует единственное такое  $\omega^* \in \Lambda^2 V$ , что  $\alpha(\eta, \omega^*) = \Lambda^2 \beta(\eta, \omega)$  для всех  $\eta \in \Lambda^2 V$  в) правило  $\omega \mapsto \omega^*$  задаёт линейную инволюцию на пространстве  $\Lambda^2 V$ . г) Напишите матрицу этой инволюции и матрицы Грама форм  $\alpha$  и  $\Lambda^2 \beta$  в базисе  $v_{ij} \wedge v_{k\ell}$ . д) Зависят ли форма  $\alpha$  и инволюция  $*$  от выбора двойственных базисов в  $U$  и  $U^*$ ? е) Вдохновляясь **зад. АЛ10◊6** установите канонические изоморфизмы между собственными подпространствами инволюции  $*$  и пространствами  $S^2 U$  и  $S^2 U^*$ .

**АЛ10◊9\*.** В условиях **зад. АЛ10◊8** положим  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V), \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ , обозначим через  $P$  и  $Q$  квадрики, задаваемые квадратичными формами  $\alpha$  и  $\Lambda^2 \beta$  в  $\mathbb{P}_5$ , а через  $L_{\pm} \subset \mathbb{P}_5$  — двумерные плоскости, состоящие из неподвижных точек инволюции  $*$ . Покажите, что а) сопоставление прямой  $(ab) \subset \mathbb{P}_3$  точки  $a \wedge b \in \mathbb{P}_5$  задаёт биекцию между прямыми в  $\mathbb{P}_3$  точками квадрики  $P$  б) два семейства прямых на квадрике Сегре в  $\mathbb{P}_3$  перейдут при этом в две гладкие коники  $P \cap L_{\pm}$  в) множество всех касательных прямых к квадрике Сегре перейдёт в линейное соединение этих двух коник, совпадающее с  $P \cap Q$ .

| №  | дата | кто принял | подпись |
|----|------|------------|---------|
| 1а |      |            |         |
| б  |      |            |         |
| в  |      |            |         |
| 2  |      |            |         |
| 3  |      |            |         |
| 4  |      |            |         |
| 5а |      |            |         |
| б  |      |            |         |
| в  |      |            |         |
| г  |      |            |         |
| д  |      |            |         |
| е  |      |            |         |
| ж  |      |            |         |
| 6  |      |            |         |
| 7  |      |            |         |
| 8а |      |            |         |
| б  |      |            |         |
| в  |      |            |         |
| г  |      |            |         |
| д  |      |            |         |
| е  |      |            |         |
| 9а |      |            |         |
| б  |      |            |         |
| в  |      |            |         |