

Строение групп

- АЛ9♦1.** Докажите, что ядро действия группы G левыми умножениями на множестве смежных классов G/N произвольной подгруппы $N \triangleleft G$ является единственной максимальной по включению среди содержащихся в N нормальных подгрупп $N \triangleleft G$.
- АЛ9♦2.** Докажите, что при $n \geq 5$ индекс любой подгруппы $H \subsetneq A_n$ не меньше n .
- АЛ9♦3.** Докажите, что неабелева простая группа, обладающая подгруппой индекса n , гомоморфно вкладывается в A_n .
- АЛ9♦4 (разрешимые группы).** Докажите, что следующие свойства группы G эквивалентны:
 а) существует цепочка подгрупп $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n = e$ с абелевыми G_i/G_{i+1}
 б) последовательные коммутаторы G, G', G'', G''', \dots тривиализуются на конечном шагу.
- АЛ9♦5.** Пусть $N \triangleleft G$ и $H = G/N$. Верно ли, что если две из групп N, G, H разрешимы, то разрешима и третья?
- АЛ9♦6.** Разрешимы ли при простых p, q, r все группы порядка а) pq б) pq^2 в) pqr ?
- АЛ9♦7*.** Докажите, что любая p -группа разрешима¹.
- АЛ9♦8*.** Докажите, что все группы порядка < 60 разрешимы².
- АЛ9♦9*.** Докажите, что неразрешимая группа порядка 60 изоморфна A_5 ³.
- АЛ9♦10.** Для группы $GL_2(\mathbb{F}_3)$ укажите а) все силовские подгруппы б) два разных композиционных ряда.
- АЛ9♦11.** Верно ли, что в p -группе G есть нормальные подгруппы всех порядков, делящих $|G|$?
- АЛ9♦12.** Перечислите с точностью до изоморфизма все группы порядка а) 8 б) 12 в) ≤ 15 г*) 105.
- АЛ9♦13* (системы Штейнера).** Набор S из k -элементных подмножеств n -элементного множества X называется *системой Штейнера* $S(t, k, n)$, если каждое t -элементное подмножество в X содержится ровно в одном множестве из S . Например, множество аффинных прямых на координатной плоскости над полем \mathbb{F}_5 является системой $S(2, 5, 25)$.
 а) По системе Штейнера $S(t, k, n)$ постройте систему $S(t - 1, k - 1, n - 1)$.
 б) Для всех $q = p^k$, где p — простое, постройте системы $S(2, q, q^2)$ и $S(2, q + 1, q^2 + q + 1)$.
 в) Покажите, что образы множества квадратов $\{0, 1, 4, 9, 3, 5\}$ поля \mathbb{F}_{11} под действием группы $PGL_2(\mathbb{F}_{11})$ дробно линейных преобразований проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_{11}) = \{0, 1, \dots, 10, \infty\}$ составляют систему Штейнера $S(5, 6, 12)$.
 г) Постройте систему Штейнера $S(5, 8, 24)$.
- АЛ9♦14*.** Для системы Штейнера $S = S(t, k, n)$ положим $Aut S \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in S_n \mid \forall Y \in S \ g(Y) \in S\}$. Постройте изоморфизмы:
 а) $PGL_3(\mathbb{F}_4)$ с $Aut S(2, 5, 21)$ б) A_6 с коммутантом $Aut' S(3, 4, 10)$.
- АЛ9♦15*.** Найдите порядки *спорадических простых групп Матьё*⁴:
 а) $M_{11} \stackrel{\text{def}}{=} Aut S(4, 5, 11)$ б) $M_{12} \stackrel{\text{def}}{=} Aut S(5, 6, 12)$ в) $M_{22} \stackrel{\text{def}}{=} Aut S(3, 6, 22)$
 г) $M_{23} \stackrel{\text{def}}{=} Aut S(4, 7, 23)$ д) $M_{24} \stackrel{\text{def}}{=} Aut S(5, 8, 24)$.
- АЛ9♦16*.** Покажите, что M_{11}, M_{22} и M_{23} суть стабилизаторы точек тавтологических действий M_{12}, M_{23} и M_{24} на соответствующих системах Штейнера.

1
2
3
4

ПОДСКАЗКА: вложите её в S_n , а S_n — в $GL_n(\mathbb{F}^d)$, и примените теорему Силова.
 ПОДСКАЗКА: $\exists p : N^d > 4$.
 ПОДСКАЗКА: рассмотрите её действие на силовских 5-подгруппах.
 ОТВЕТЫ: 7920, 95 040, 443 520, 10 200 960, 244 823 040.

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4а			
б			
5			
6а			
б			
в			
7			
8			
9			
10а			
б			
11			
12а			
б			
в			
г			
13а			
б			
в			
г			
14а			
б			
15а			
б			
в			
г			
д			
16			