§12. Задание групп образующими и соотношениями

12.1. Свободные группы и соотношения. С любым множеством M можно связать группу F_M, которая называется *свободной группой*, порождённой множеством M. Она состоит из классов эквивалентных слов, которые можно написать буквами x и x^{-1}, где $x \in M$, по наименьшему отношению эквивалентности, отождествляющему между собою слова, отличающиеся друг от друга вставкой или удалением[1] двубуквенного фрагмента xx^{-1} или $x^{-1}x$. Композиция определяется как приписывание одного слова к другому. Единицей служит пустое слово. Обратным к классу слова $w = x_1 \dots x_m$ является класс слова $w^{-1} = x_m^{-1} \dots x_1^{-1}$, где каждая из букв x_i равна x или x^{-1} для некоторого $x \in M$, и $\left(x^{-1}\right)^{-1} \overset{\text{def}}{=} x$.

Упражнение 12.1. Убедитесь, что композиция корректно определена на классах эквивалентности слов и что в каждом классе содержится ровно одно *несократимое*[2] слово, которое одновременно является и самым коротким словом в своём классе.

Элементы множества M называются *образующими* свободной группы F_M. Свободная группа с k образующими обозначается F_k. Группа $F_1 \simeq \mathbb{Z}$ — это циклическая группа бесконечного порядка. Группа F_2 классов слов на четырёхбуквенном алфавите x, y, x^{-1}, y^{-1} уже трудно обозрима.

Упражнение 12.2. Постройте инъективный гомоморфизм групп $F_{\mathbb{N}} \hookrightarrow F_2$.

Предложение 12.1 (универсальное свойство свободных групп)
Отображение $i_M : M \to F_M$, переводящее элемент $x \in M$ в класс однобуквенного слова $x \in F_M$, обладает следующим свойством: для любых группы G и отображения множеств $\varphi_M : M \to G$ существует единственный такой гомоморфизм групп $\varphi : F_M \to G$, что $\varphi_M = \varphi \circ i_M$. Для любого обладающего этим свойством отображения $i'_M : M \to F'$ множества M в группу F' имеется единственный такой изоморфизм групп $i' : F_M \xrightarrow{\sim} F'$, что $i'_M = i' \circ i_M$.

Доказательство. Гомоморфизм φ единствен, так как обязан переводить слово $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_m^{\varepsilon_m} \in F_M$, где $x_\nu \in M$, $\varepsilon_\nu = \pm 1$, в произведение $\varphi_M(x_1)^{\varepsilon_1} \dots \varphi_M(x_m)^{\varepsilon_m} \in G$. С другой стороны, это правило корректно задаёт гомоморфизм групп, что доказывает первое утверждение. Если отображение $i' : M \to F'$ множества M в группу F' обладает универсальным свойством из предл. 12.1, то существуют единственные гомоморфизмы $i' : F_M \to F'$ и $i : F' \to F_M$, встраивающиеся в коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
F_M \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{F_M}"] & & F_M \arrow[dd, dashed, "i'"] \\
& M \arrow[ul, "i_M"'] \arrow[ur, "i_M"] \arrow[dl, "i'_M"] \arrow[dr, "i'_M"'] & \\
F' \arrow[uu, dashed, "i"] \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{F'}"'] & & F'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F_M \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{F_M}"'] \arrow[dr, dashed, "i"] & & & & & & F' \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{F'}"] \arrow[dl, dashed, "i'"'] \\
& F' \arrow[dl, dashed, "i'"] & & M \arrow[ulll, "i_M"'] \arrow[ll, "i'_M"'] \arrow[dlll, "i_M"] \arrow[urrr, "i'_M"] \arrow[rr, "i_M"] \arrow[drrr, "i'_M"'] & & F_M \arrow[dr, dashed, "i"] & \\
F_M & & & & & & F'
\end{tikzcd}$$

Разложения вида $i_M = \varphi \circ i_M$, $i'_M = \psi \circ i'_M$ в силу их единственности возможны только с $\varphi = \mathrm{Id}_{F_M}$, $\psi = \mathrm{Id}_{F'}$. Поэтому $i' \circ i = \mathrm{Id}_{F'}$, $i \circ i' = \mathrm{Id}_{F_M}$. □

[1] В начале, в конце, или же между произвольными двумя последовательными буквами слова.
[2] Т. е. не содержащее двубуквенных фрагментов xx^{-1} и $x^{-1}x$.

12.1.1. Задание групп образующими и соотношениями. Если гомоморфизм групп

$$\varphi : F_M \twoheadrightarrow G\,, \tag{12-1}$$

заданный отображением $\varphi_M : M \to G$ множества M в группу G, является *сюрьективным*, то говорят, что группа G *порождается* элементами $g_m = \varphi_M(m)$, $m \in M$, а сами элементы g_m называются *образующими* группы G. В этом случае G исчерпывается всевозможными произведениями $g_1^{\varepsilon_1}\dots g_k^{\varepsilon_k}$, $\varepsilon = \pm 1$, образующих и обратных к ним элементов. Группа G называется *конечно порождённой*, если она допускает конечное множество образующих. Ядро $\ker\varphi \lhd F_M$ эпиморфизма (12-1) называется *группой соотношений* между образующими g_m. Набор слов $R \subset \ker\varphi$ называется набором *определяющих соотношений*, если $\ker\varphi$ — это наименьшая нормальная подгруппа в F_M, содержащая R. Это означает, что любое соотношение можно получить из слов множества R конечным числом умножений, обращений и сопряжений произвольными элементами из свободной группы F_M. Группа, допускающая конечное число образующих с конечным набором определяющих соотношений называется *конечно определённой*.

Всякую группу можно задать образующими и соотношениями, например, взяв в качестве M множество всех элементов группы. Удачный выбор образующих с простыми определяющими соотношениями может значительно прояснить устройство группы и её гомоморфизмов в другие группы. Однако в общем случае выяснить, изоморфны ли две группы, заданные своими образующими и определяющими соотношениями, или даже определить, отлична ли группа, заданная образующими и соотношениями, от тривиальной группы $\{e\}$, бывает очень непросто. Более того, обе эти задачи являются *алгоритмически неразрешимыми*[1] даже в классе конечно определённых групп.

Предложение 12.2
Пусть группа G_1 задана множеством образующих M и набором определяющих соотношений R, а G_2 — произвольная группа. Отображение $\varphi : M \to G_2$ тогда и только тогда корректно задаёт гомоморфизм групп $G_1 \to G_2$ правилом $x_1^{\varepsilon_1}\dots x_m^{\varepsilon_m} \mapsto \varphi(x_1)^{\varepsilon_1}\dots \varphi(x_m)^{\varepsilon_m}$, когда для каждого слова $y_1^{\varepsilon_1}\dots y_m^{\varepsilon_m} \in R$ в группе G_2 выполняется соотношение $\varphi(y_1)^{\varepsilon_1}\dots \varphi(y_m)^{\varepsilon_m} = 1$.

Доказательство. Отображения множеств $\varphi_M : M \to G_2$ биективно соответствуют гомоморфизмам групп $\varphi : F_M \to G_2$. Такой гомоморфизм φ факторизуется до гомоморфизма из группы $G_1 = F_M/N_R$, где $N_R \lhd F_M$ — наименьшая нормальная подгруппа, содержащая R, тогда и только тогда, когда $N_R \subset \ker\psi$. Так как $\ker\psi \lhd F_M$, для этого необходимио и достаточно включения $R \subset \ker\psi$. □

Пример 12.1 (образующие и соотношения группы диэдра)
Покажем, что группа диэдра D_n задаётся двумя образующими x_1, x_2 и соотношениями

$$x_1^2 = x_2^2 = (x_1x_2)^n = e\,. \tag{12-2}$$

Оси симметрии правильного n-угольника разбивают его на $2n$ конгруэнтных прямоугольных треугольников как на рис. 12◇1 ниже. Обозначим один из них через e. Поскольку любое движение плоскости однозначно задаётся своим действием на треугольник e, треугольники разбиения находятся в биекции с движениями $g \in D_n$, и каждый из них можно однозначно пометить

[1] В формальном смысле, принятом в математической логике.

тем единственным преобразованием g, которое переводит треугольник e в этот треугольник. При этом каждое преобразование $h \in D_n$ переводит каждый треугольник g в треугольник hg.

Упражнение 12.3. Для любого движения F евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и отражения σ_π в произвольной гиперплоскости $\pi \subset \mathbb{R}^n$ докажите соотношения

$$\sigma_{F(\pi)} = F \circ \sigma_\pi \circ F^{-1} \quad \text{и} \quad \sigma_{F(\pi)} \circ F = F \circ \sigma_\pi \,. \tag{12-3}$$

Обозначим через ℓ_1 и ℓ_2 боковые стороны треугольника e, а отражения плоскости в этих сторонах обозначим через $\sigma_1 = \sigma_{\ell_1}$ и $\sigma_2 = \sigma_{\ell_2}$. Тогда по второму из равенств (12-3) треугольники, получающиеся из e последовательными отражениями в направлении часовой стрелки пометятся элементами

$$\begin{aligned} \sigma_{\ell_1} &= \sigma_1 \,, \\ \sigma_{\sigma_1(\ell_2)}\sigma_1 &= \sigma_1\sigma_2 \,, \\ \sigma_{\sigma_1\sigma_2(\ell_1)}\sigma_1\sigma_2 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \,, \\ \sigma_{\sigma_1\sigma_2\sigma_1(\ell_2)}\sigma_1\sigma_2\sigma_1 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2 \,, \ \dots \end{aligned}$$

а треугольники, получающиеся из e последовательными отражениями против часовой стрелки пометятся элементами

$$\begin{aligned} \sigma_{\ell_2} &= \sigma_2 \,, \\ \sigma_{\sigma_2(\ell_1)}\sigma_2 &= \sigma_2\sigma_1 \,, \\ \sigma_{\sigma_2\sigma_1(\ell_2)}\sigma_2\sigma_1 &= \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \,, \\ \sigma_{\sigma_2\sigma_1\sigma_2(\ell_1)}\sigma_2\sigma_1\sigma_2 &= \sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \,, \ \dots \end{aligned}$$

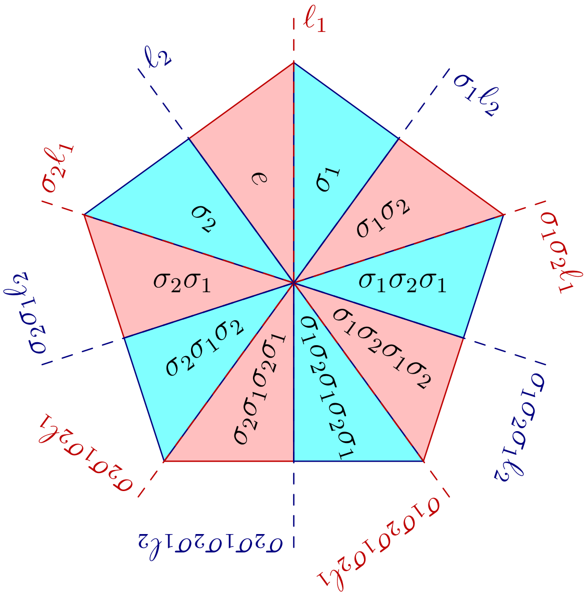

Рис. 12◇1. Образующие группы диэдра.

В результате каждый треугольник пометится словом вида $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2 \dots$ или $\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \dots$ Так как композиция $\sigma_1 \circ \sigma_2$ является поворотом на угол $2\pi/n$, в группе D_n выполняются соотношения

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = (\sigma_1\sigma_2)^n = e \,, \tag{12-4}$$

и правило $x_1 \mapsto \sigma_1$, $x_2 \mapsto \sigma_2$ корректно задаёт сюрьективный гомоморфизм $\varphi : F_2/H \twoheadrightarrow D_n$ из фактора свободной группы F_2 с образующими x_1, x_2 по наименьшей нормальной подгруппе $H \lhd F_2$, содержащей слова x_1^2, x_2^2 и $(x_1x_2)^n$. Покажем, что он инъективен. Поскольку последнее соотношение в (12-2) равносильно равенству

$$\underbrace{\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \dots}_{k} = \underbrace{\sigma_2\sigma_1\sigma_2 \dots}_{2n-k} \,, \tag{12-5}$$

каждое слово в алфавите $\{x_1, x_2, x_1^{-1}, x_2^{-1}\}$ записывается по модулю соотношений (12-2) словом

$$x_1x_2x_1 \dots \quad \text{или} \quad x_2x_1x_2 \dots \tag{12-6}$$

из не более n букв, причём два n-буквенных слова равны друг другу в F_2/H. Согласно предыдущему, все эти слова переводятся гомоморфизмом φ в разные треугольники, т. е. в разные элементы $g \in D_n$. Мы заключаем, что гомоморфизм $\varphi : F_2/H \xrightarrow{\sim} D_n$ биективен, а все слова (12-6), за исключением двух равных n-буквенных слов, различны по модулю H и являются самими короткими выражениями элементов группы D_n через образующие σ_1, σ_2.

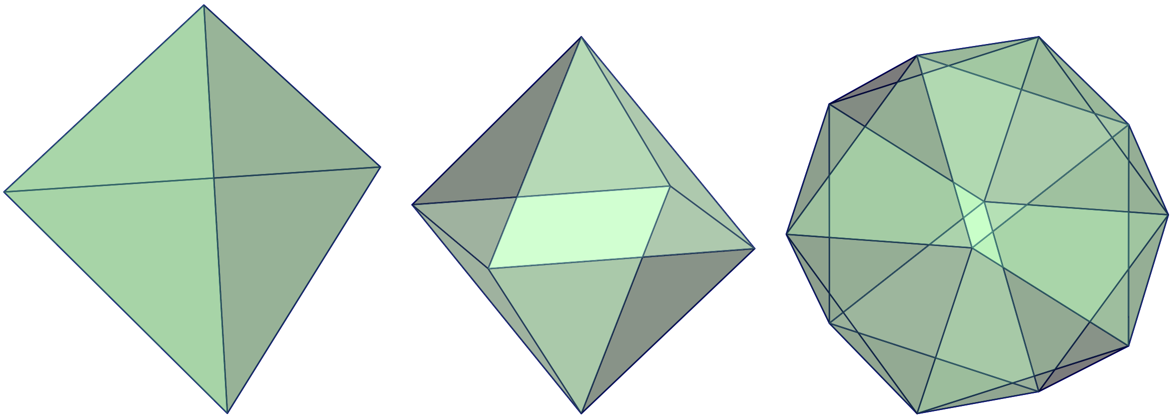

Рис. 12⋄2. Тетраэдр, октаэдр и икосаэдр.

12.2. Пример: группы платоновых тел. Обозначим через M платоново тело с треугольными гранями, т. е. правильный *тетраэдр*, *октаэдр* или *икосаэдр*, см. рис. 12⋄2. Плоскости симметрии многогранника M задают *барицентрическое разбиение* каждой грани на 6 конгруэнтных друг другу треугольников с вершинами в центре грани, в середине ребра этой грани и в одном из концов этого ребра, см. рис. 12⋄3. Обозначим, соответственно, через π_1, π_2, π_3 плоскости симметрии, высекающие противолежащие этим вершинам стороны в одном из треугольников, который пометим единичным элементом e группы O_M многогранника M. Двугранный угол между плоскостями π_i и π_j обозначим через

$$\pi/m_k = \measuredangle(\pi_i, \pi_j), \quad \text{где} \quad k = \{1, 2, 3\} \smallsetminus \{i, j\}.$$

Числа m_i, а также число γ граней многогранника M и общее число треугольников $N = 6\gamma$ представлены в таблице[1]:

M	m_1	m_2	m_3	γ	N
тетраэдр	3	2	3	4	24
октаэдр	3	2	4	8	48
икосаэдр	3	2	5	20	120.

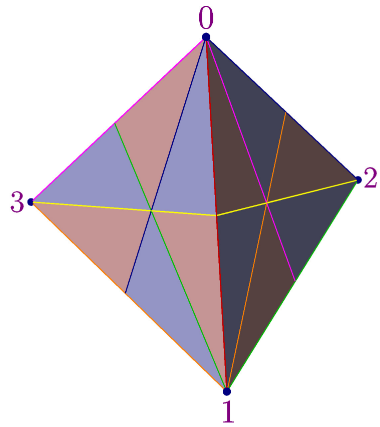

Рис. 12⋄3. Барицентрическое разбиение тетраэдра плоскостями симметрии.

Обозначим через σ_i отражение в плоскости π_i. Так как каждое преобразование из группы O_M однозначно определяется своим действием на тройку векторов с концами в вершинах треугольника e, каждый треугольник триангуляции является образом треугольника e под действием единственного преобразования $g \in O_M$. Надпишем каждый треугольник этим преобразованием g,

[1] Обратите внимание, что помещённый в пространство n-угольный диэдр из прим. 12.1 тоже можно включить в этот список со значениями $m_1 = n$, $m_2 = 2$, $m_3 = 2$, $\gamma = 2$ и $N = 4n$, если условиться, что плоский диэдр имеет две двумерные грани: «верхнюю» и «нижнюю».

и пометим его стороны, высекаемые плоскостями $g(\pi_1)$, $g(\pi_2)$, $g(\pi_3)$ соответствующими номерами 1, 2, 3. Отметим, что каждое преобразование $h \in \mathrm{O}_M$ переводит каждый треугольник g в треугольник hg. На рис. 12◇4 изображена стереографическая проекция картинки, которую 24 трёхгранных угла барицентрического разбиения тетраэдра с рис. 12◇3 высекают на описанной около этого тетраэдра сфере. На каждом сферическом треугольнике написана композиция отражений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, переводящая треугольник e в этот треугольник. Стороны треугольников, помеченные номерами 1, 2 и 3, изображены на рисунке в красным, зелёным и жёлтым цветом.

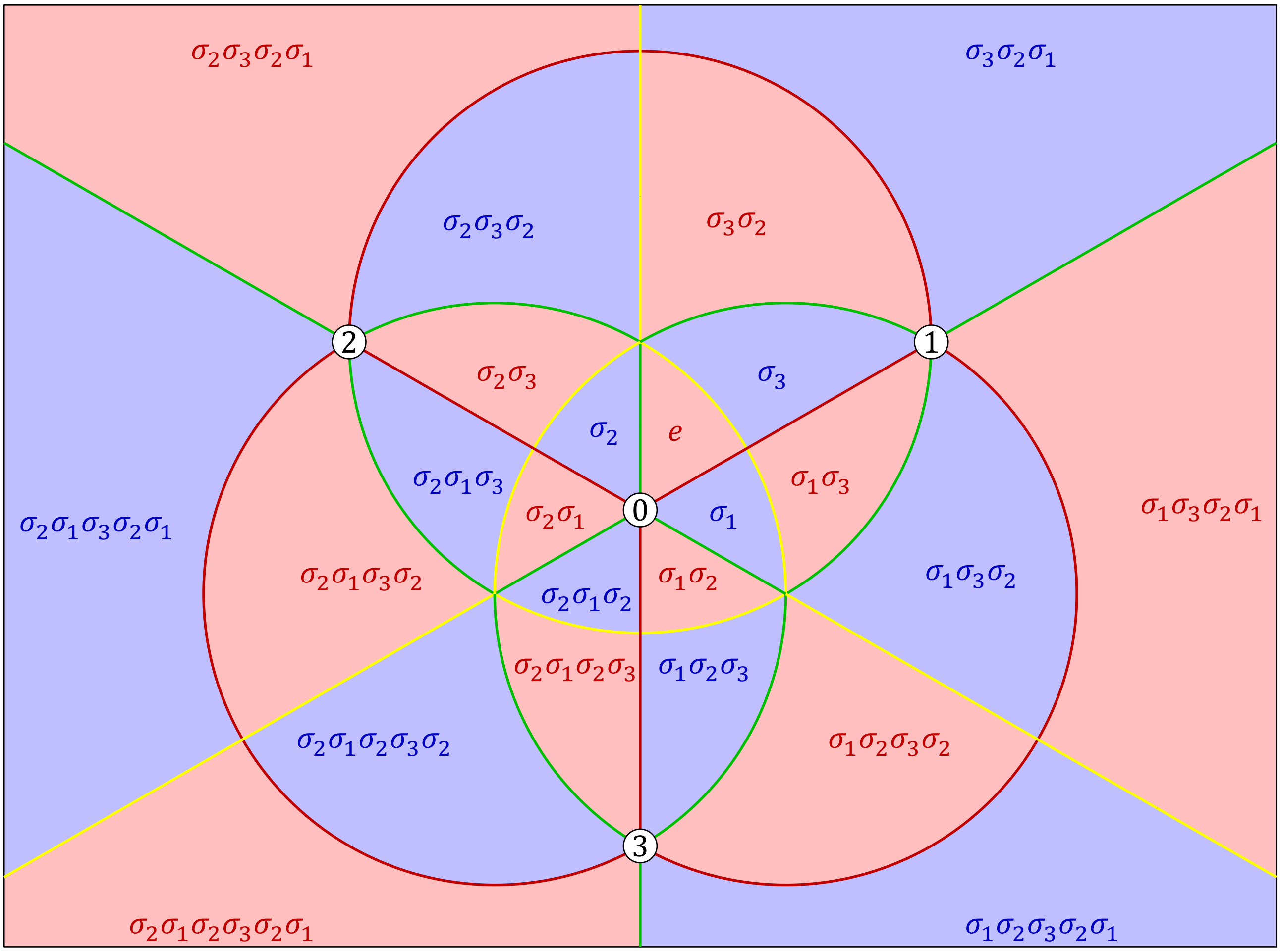

Рис. 12◇4. Триангуляция описанной сферы плоскостями симметрии тетраэдра в стереографической проекции из диаметрально противоположного к вершине «0» полюса сферы на экваториальную плоскость, параллельную грани «123».

Чтобы явно написать композицию отражений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, переводящую треугольник e в треугольник g, выберем внутри опирающихся на эти треугольники трёхгранных углов векторы u и w с концами на описанной около M сфере так, чтобы $w \neq -u$ и натянутая на них плоскость Π_{uw} не содержала линий пересечения плоскостей симметрии многогранника M. Пройдём из u в w по кратчайшей из двух дуг окружности, высекаемой плоскостью Π_{uw} на описанной около M сфере. Пусть мы при этом последовательно побываем в треугольниках

$$g_1 = e,\ g_2,\ g_3,\ \dots,\ g_{m+1} = g\,.$$

Обозначим через $\nu_i \in \{1,2,3\}$ номер, надписанный на той стороне треугольника g_i, сквозь которую осуществляется проход из g_i в g_{i+1}. Это означает, что общая сторона треугольников g_i и g_{i+1} высекается плоскостью $g_i(\pi_{\nu_i})$, т. е. образом плоскости π_{ν_i} при отображении g_i. Тогда

$$g_2 = \sigma_{\nu_1}\,,\ \ g_3 = \sigma_{g_2(\pi_{\nu_2})} g_2 = \sigma_{\nu_1}\sigma_{\nu_2}\,,\ \ g_4 = \sigma_{g_3(\pi_{\nu_3})} g_3 = \sigma_{\nu_1}\sigma_{\nu_2}\sigma_{\nu_3}\,,\ \dots$$

по второму равенству из форм. (12-3) на стр. 201. Таким образом, последовательность индексов $\nu_i \in \{1,2,3\}$ в разложении $g = \sigma_{\nu_1} \dots \sigma_{\nu_m}$ состоит из выписанных по порядку номеров сторон, которые приходится пересекать по пути из $e = g_1$ в $g = g_{m+1}$ по дуге uw, как на рис. 12⋄5, где стороны с номерами 1, 2, 3 изображены соответственно красным, зелёным и жёлтым цветами. Отметим, что полученное нами разложение элемента $g \in \mathrm{O}_M$ в композицию отражений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ не единственно и зависит от выбора векторов u и w внутри трёхгранных углов e и g. При изменении любого из этих векторов последовательность $\nu_1, \dots, \nu_m$ номеров зеркал, пересекаемых по дороге из u в w, не меняется до тех пор, пока натянутая на эти векторы плоскость Π_{uw} не натолкнётся на линию пересечения зеркал, а в момент пересечения такой линии в последовательности $\nu_1, \dots, \nu_m$ некоторый фрагмент вида $\sigma_i\sigma_j\sigma_i\sigma_j \dots$ длины m_k заменяется симметричным фрагментом $\sigma_j\sigma_i\sigma_j\sigma_i \dots$ той же самой длины m_k, как показано на рис. 12⋄5.

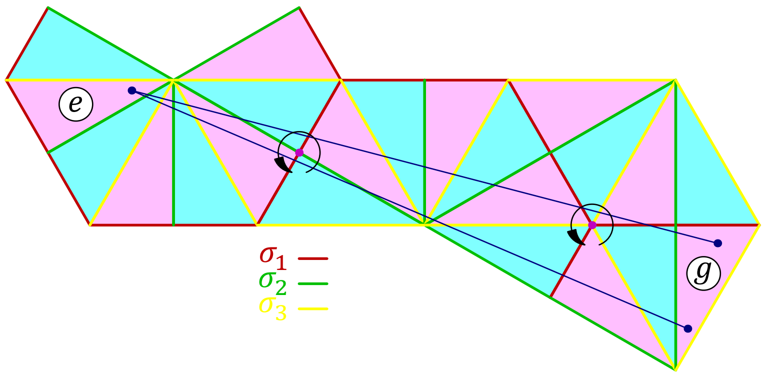

Рис. 12⋄5. $\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_3\boldsymbol{\sigma_1\sigma_2}\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_2\boldsymbol{\sigma_3\sigma_1\sigma_3}\sigma_2 = g = \sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_3\boldsymbol{\sigma_2\sigma_1}\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_2\boldsymbol{\sigma_1\sigma_3\sigma_1}\sigma_2$.

Разложения, отвечающие верхней и нижней траекториям на рис. 12⋄5 отличаются друг от друга тем, что линии пересечения зеркал обходятся в противоположных направлениях. Композиции возникающих при этом отражений удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1 \quad \text{и} \quad \sigma_1\sigma_3\sigma_1 = \sigma_3\sigma_1\sigma_3$$

той же самой природы, что соотношения (12-4) в группе диэдра: так как композиция отражений $\sigma_i \circ \sigma_j$ является поворотом вокруг прямой $\pi_i \cap \pi_j$ на угол $2\pi/m_k$, равный удвоенному углу между плоскостями π_i и π_j, в группе O_M выполняются соотношения $\sigma_i^2 = e$ и $(\sigma_i\sigma_j)^{m_k} = e$, где $i = 1,2,3$, а тройка (i,j,k) пробегает три циклические перестановки номеров $(1,2,3)$.

Отсюда вытекает, во-первых, что длина представления $g = \sigma_{\nu_1} \dots \sigma_{\nu_m}$, считанного вдоль кратчайшей из двух дуг, соединяющих векторы u и w, не зависит от выбора этих векторов внутри трёхгранных углов, опирающихся на треугольники e и g, при условии, что плоскость Π_{uw} не проходит через линии пересечения зеркал, а во-вторых, что правило $x_i \mapsto \sigma_i$ задаёт сюрьективный гомоморфизм $\varphi : F_3/H \twoheadrightarrow \mathrm{O}_M$ из фактора свободной группы F_3 с образующими x_1, x_2, x_3 по наименьшей нормальной подгруппе $H \triangleleft F_3$, содержащей шесть слов

$$x_i^2 \qquad \text{и} \qquad (x_i x_j)^{m_k}\,. \tag{12-7}$$

Для проверки его инъективности достаточно для каждого элемента $y \in F_3/H$ убедиться в том, что последовательность номеров $\nu_1, \dots, \nu_k$, считанная с любой кратчайшей дуги, соединяющей треугольник e с треугольником $g = \varphi(y)$, как это объяснялось выше, даёт представление

$$y = x_{\nu_1} \dots x_{\nu_k}$$

минимально возможной по модулю соотношений (12-7) длины. Тогда каждый элемент $y \in F_3/H$ будет однозначно восстанавливаться по своему образу $g(y) \in \mathrm{O}_M$.

Воспользуемся индукцией по длине k кратчайшего по модулю соотношений (12-7) слова $x_{\nu_1} \dots x_{\nu_k}$, представляющего данный элемент $y \in F_3/H$. Для представимых однобуквенными словами элементов $y = x_1, x_2, x_3$ утверждение очевидно. Пусть оно верно для всех $y \in F_3/H$, представимых словами из $\leqslant k$ букв. Рассмотрим произвольный такой y и проверим утверждение для всех элементов yx_j, $j = 1, 2, 3$, которые по модулю соотношений (12-7) не представимы словами из $\leqslant k$ букв. Пусть $g = \varphi(y)$ и $h = \varphi(yx_j) = g\sigma_j$. Выберем в треугольниках e и g векторы $u \in e$ и $w \in g$ так, чтобы окружность, высекаемая из сферы плоскостью Π_{uw}, пересекала плоскость $H = g(\pi_j)$. Кротчайшая дуга этой окружности, ведущая из u в w либо не пересекает плоскость H, как на рис. 12◇6, либо пересекает, как на рис. 12◇7.

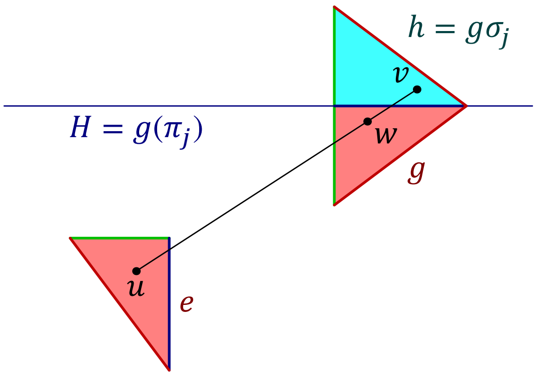

Рис. 12◇6. H не разделяет e и g.

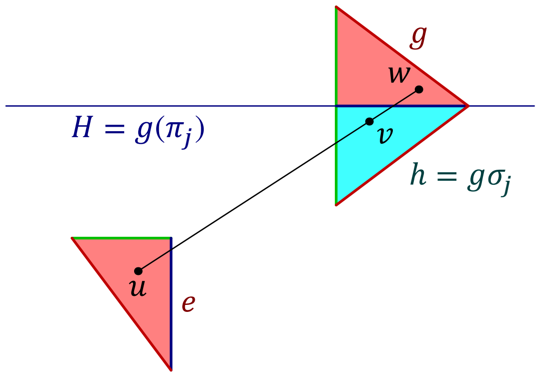

Рис. 12◇7. H разделяет e и g.

Во втором случае обозначим через v какую-нибудь точку дуги $[u, w]$, лежащую в предыдущем треугольнике $\sigma_{g(\pi_j)}g = g\sigma_j g^{-1} g = g\sigma_j = h$. По предположению индукции, одно из минимальных по длине представлений $y = x_{\nu_1} \dots x_{\nu_m}$ имеет в качестве $\nu_1, \dots, \nu_m$ номера последовательных рёбер, которые приходится пересекать по пути из u в w по дуге $[u, w]$, и его длина $m \leqslant k$. В частности, последняя буква $x_{\nu_m} = x_j$. Поэтому элемент $yx_j = x_{\nu_1} \dots x_{\nu_{m-1}}$ записывается более коротким, чем y, словом из $< k$ букв, вопреки нашему предположению. Таким образом, имеет место первый случай, изображённый на рис. 12◇6. Обозначим через $v \in h$ какой-нибудь вектор, лежащий на продолжении дуги $[u, w]$ за точку w. По предположению индукции, одно из минимальных по количеству букв представлений $y = x_{\nu_1} \dots x_{\nu_m}$ имеет в качестве $\nu_1, \dots, \nu_m$ номера последовательных рёбер, которые приходится пересекать по пути из u в w по дуге $[u, w]$, и его длина $m \leqslant k$. При этом $h = \varphi(yx_j) = g\sigma_j = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}\sigma_j$, и представление $yx_j = x_{\nu_1} \dots x_{\nu_m} x_j$ по нашему предположению состоит, как минимум, из $k + 1$ букв. Мы заключаем, что $m = k$, представление $yx_j = x_{\nu_1} \dots x_{\nu_k} x_j$ является одним из кратчайших для элемента yx_j и считывается с дуги $[u, v]$, как и требуется. Мы получили следующий результат.

Предложение 12.3

Полная группа O_M платонова тела M с треугольными гранями порождается тремя элементами x_1, x_2, x_3, связанными шестью определяющими соотношениями $x_i^2 = e$ и $(x_i x_j)^{m_k} = e$. □

12.3. Образующие и соотношения симметрической группы S_{n+1}. Обозначим числами от 0 до n концы стандартных базисных векторов $e_0, e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ и рассмотрим n-мерный правильный симплекс $\varDelta \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с вершинами в этих точках. Поскольку каждое аффинное преобразование n-мерной гиперплоскости $x_0+x_1+\dots+x_n = 1$, в которой лежит симплекс $\varDelta$, однозначно задаётся своим действием на вершины симплекса $\varDelta$, полная группа $\mathrm{O}_\varDelta$ симплекса $\varDelta$ изоморфна симметрической группе S_{n+1} перестановок его вершин $0, 1, \dots, n$. Каждая k-мерная грань симплекса $\varDelta$ является правильным k-мерным симплексом и представляет собою выпуклую оболочку каких-либо $k+1$ вершин симплекса $\varDelta$, и наоборот, выпуклая оболочка $[i_0, i_1, \dots, i_k]$ любых $k+1$ различных вершин $\{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$ является k-мерной гранью симплекса $\varDelta$. Симплекс $\varDelta$ симметричен относительно $n(n+1)/2$ гиперплоскостей π_{ij}, проходящих через середину ребра $[i, j]$ и противолежащую этому ребру грань коразмерности 2 с вершинами $\{0, 1, \dots, n\} \smallsetminus \{i, j\}$. Гиперплоскость π_{ij} перпендикулярна вектору $e_i - e_j$ и отражение $\sigma_{ij} \in \mathrm{O}_\varDelta$ в этой гиперплоскости отвечает транспозиции элементов i и j в симметрической группе S_{n+1}.

Упражнение 12.4. Убедитесь, что гиперплоскости π_{ij} и π_{km} с $\{i, j\} \cap \{k, m\} = \varnothing$ ортогональны, а гиперплоскости π_{ij} и π_{jk} с различными i, j, k пересекаются под углом $\pi/3 = 60°$.

Плоскости π_{ij} осуществляют *барицентрическое разбиение* симплекса $\varDelta$ на $(n+1)!$ меньших симплексов с вершинами в центрах граней симплекса $\varDelta$ и в центре самого симплекса. Если обозначить через $\langle i_0 i_1 \dots i_m \rangle$ центр m-мерной грани с вершинами в $i_0, i_1, \dots, i_m$, то каждый симплекс барицентрического разбиения будет иметь одну из вершин в какой-либо вершине $\langle i_0 \rangle$ симплекса $\varDelta$, следующую вершину — в центре $\langle i_0 i_1 \rangle$ какого-либо примыкающего к вершине i_0 ребра $[i_0, i_1]$, следующую вершину — в центре $\langle i_0 i_1 i_2 \rangle$ какой-либо примыкающей к ребру $[i_0, i_1]$ двумерной треугольной грани $[i_0, i_1, i_2]$ и т. д. вплоть до центра $\langle i_0 i_1 \dots i_n \rangle$ самого симплекса $\varDelta$. Эти симплексы находятся в естественной биекции с перестановками $g \in S_{n+1}$: симплекс

$$g = \big[\langle g_0 \rangle, \langle g_0, g_1 \rangle, \langle g_0, g_1, g_2 \rangle, \dots, \langle g_0 g_1 \dots g_{n-1} \rangle, \langle g_0 g_1 \dots g_n \rangle\big] \tag{12-8}$$

является образом начального симплекса

$$e = \big[\langle 0 \rangle, \langle 01 \rangle, \langle 012 \rangle, \dots, \langle 0, 1, \dots, n-1 \rangle, \langle 0, 1, \dots, n \rangle\big] \tag{12-9}$$

под действием единственной перестановки $g = (g_0, g_1, \dots, g_n) \in S_{n+1} = \mathrm{O}_M$. Спроектируем поверхность симплекса $\varDelta$ из его центра на описанную сферу. Получим разбиение $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1} на $(n+1)!$ конгруэнтных друг другу $(n-1)$-мерных симплексов, надписанных элементами $g \in S_{n+1}$. Грани этих симплексов высекаются из сферы гиперплоскостями π_{ij}. При $n = 3$ получится представленная на рис. 12◇4 на стр. 203 триангуляция двумерной сферы S^2 двадцатью четырьмя сферическими треугольниками с углами $\pi/3$, $\pi/3$ и $\pi/2$. Помеченному тождественным преобразованием e начальному симплексу (12-9) отвечает сферический симплекс, высекаемый из сферы n гиперплоскостями $\pi_i \overset{\text{def}}{=} \pi_{i-1,i}$ с $1 \leqslant i \leqslant n$. Обозначим через $\sigma_i = \sigma_{i-1,i}$ отражения в этих гиперплоскостях. В симметрической группе S_{n+1} этим отражениям отвечают транспозиции $|i-1, i\rangle$ пар соседних элементов. По упр. 12.4 они удовлетворяют соотношениям[1]

$$\sigma_i^2 = e\,, \quad \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad \text{и} \quad \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i\,, \quad \text{где} \quad |i-j| \geqslant 2\,. \tag{12-10}$$

[1]Соотношение $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ является более употребительной в данном контексте записью циклического соотношения $(\sigma_i\sigma_{i+1})^3 = e$ на поворот $\sigma_i\sigma_{i+1}$ на 120° вокруг $(n-2)$-мерного подпространства $\pi_i \cap \pi_{i+1}$.

Упражнение 12.5. Убедитесь напрямую, что транспозиции $\sigma_i = |i-1,i\rangle \in S_{n+1}$ удовлетворяют соотношениям (12-10).

В силу этих соотношений, гомоморфизм свободой группы F_n с образующими $x_1, \dots, x_n$, переводящий x_i в σ_i, корректно факторизуется до гомоморфизма $\varphi : F_n/H \to S_{n+1}$, где $H \lhd F_n$ — наименьшая нормальная подгруппа, содержащая слова

$$x_i^2\,,\quad (x_ix_{i+1})^3 \quad \text{и} \quad (x_ix_j)^2\,,\quad \text{где} \quad |i-j| \geqslant 2\,. \tag{12-11}$$

Чтобы убедиться в его сюрьективности, выберем в симплексах e и g точки a и b так, чтобы они не были диаметрально противоположны и соединяющая их геодезическая[1] не пересекала граней коразмерности[2] 2. Пройдя из a в b по этой геодезической, мы получим разложение

$$g = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}\,, \tag{12-12}$$

в котором каждое $i_\nu \in \{1, \dots, n\}$ равно номеру такого зеркала π_{i_ν}, что переход из ν-того встреченного по дороге симплекса g_ν в следующий симплекс[3] $g_{\nu+1}$ осуществляется через грань, высекаемую гиперплоскостью $g_\nu(\pi_{i_\nu})$. Дословно также, как и в n° 12.2, проверяется, что длина представления (12-12), полученного с помощью дуги $[a,b]$ не зависит от выбора её концов $a \in e$ и $b \in g$ при условии, что они не диаметрально противоположны и плоскость π_{ab} не проходит через пересечения зеркал π_{ij}: если при перемещении точек a и b внутри симплексов e и g дуга $[a,b]$ пройдёт через пересечение $g_k(\pi_i \cap \pi_j)$ перпендикулярных гиперграней $g_k(\pi_i)$, $g_k(\pi_j)$ с $|i-j| \geqslant 2$, или через пересечение $g_k(\pi_i \cap \pi_{i+1})$ гиперграней $g_k(\pi_i)$, $g_k(\pi_{i+1})$, пересекающихся под углом 60°, то в представлении $g = \sigma_1 \dots \sigma_m$ стоящий на k-том месте фрагмент $\sigma_i\sigma_j$ или $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$ заменится, соответственно, равным ему в группе O_Δ фрагментом $\sigma_j\sigma_i$ или $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$. В ортогональной проекции вдоль $(n-2)$-мерного подпространства $g_k(\pi_i \cap \pi_j)$ или $g_k(\pi_i \cap \pi_{i+1})$ на ортогональную ему двумерную плоскость мы при этом увидим картину вроде показанной на рис. 12◇5 на стр. 204. Дословно такая же, как в n° 12.2, индукция по длине минимального по количеству букв выражения элемента $y \in F_n/H$ через образующие x_i показывает, что считанная с любой соединяющей симплекс e с симплексом $g = \varphi(y)$ дуги последовательность индексов $i_1, \dots, i_m$ даёт минимальное по количеству букв представление $y = x_{i_1} \dots x_{i_m}$ в группе F_n/H. Таким образом, симметрическая группа S_{n+1} порождается n образующими x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, связанными определяющими соотношениями (12-11).

Эту геометрическую картину нетрудно выхолостить до сугубо комбинаторного рассуждения, представленного в следующем разделе.

12.4. Порядок Брюа на симметрической группе S_{n+1}. Напомню[4], что *длиной* $\ell(g)$ перестановки $g = (g_0, g_1, \dots, g_n) \in S_{n+1}$ называется количество всех её инверсных пар[5]. Правое умножение перестановки g на транспозицию $\sigma_i = |i-1,i\rangle$ приводит к перестановке $g\sigma_i$, отличающейся от g транспозицией $(i-1)$-того и i-го символов g_{i-1} и g_i:

$$\big(g_0,\,\dots\,,\,g_{i-2},\,\boldsymbol{g_{i-1}},\,\boldsymbol{g_i},\,g_{i+1},\,\dots\,,\,g_n\big)\circ\sigma_i = \big(g_0,\,\dots\,,\,g_{i-2},\,\boldsymbol{g_i},\,\boldsymbol{g_{i-1}},\,g_{i+1},\,\dots\,,\,g_n\big)\,,$$

[1] Кратчайшая из двух дуг ab большой окружности, высекаемой из сферы двумерной плоскостью, проходящей через точки a, b и центр сферы.

[2] Т. е. пересечений всевозможных пар зеркал π_{ij}.

[3] Напомню, что при этом $g_\nu = \sigma_1 \dots \sigma_{\nu-1}$,f $g_{\nu+1} = \sigma_{g_\nu(\pi_{i_\nu})} g_\nu = g_\nu \sigma_{i_\nu}$.

[4] См. n° 8.1 на стр. 128.

[5] Т. е. таких пар $1 \leqslant i < j \leqslant n$, что $g_i > g_j$.

причём $\ell(g\sigma_i) = \ell(g) + 1$, если $g_{i-1} < g_i$, и $\ell(g\sigma_i) = \ell(g) - 1$, если $g_{i-1} > g_i$.

Упражнение 12.6. Убедитесь, что любая перестановка g длины $\ell(g) = m$ может быть записана таким словом $g = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}$, что $\ell(\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}) = \ell(\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_{k-1}}) + 1$ при всех $2 \leqslant k \leqslant m$.

Частичный порядок на S_{n+1}, в котором $g < h$, если $h = g\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_s}$, где

$$\ell(g\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}) = \ell(g\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_{k-1}}) + 1 \text{ при всех } 1 \leqslant k \leqslant s\,,$$

называется *порядком Брюа*.

Слово $w = x_{i_1} \dots x_{i_m}$ в свободной группе F_n с образующими $x_1, \dots, x_n$ называется *минимальным словом* перестановки $g \in S_{n+1}$, если $m = \ell(g)$ и $g = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}$. Начальные фрагменты минимального слова задают строго возрастающую в смысле порядка Брюа последовательность элементов $h_\nu = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_\nu} \in S_{n+1}$. Перестановка g может иметь много разных минимальных слов, однако не может быть записана никаким более коротким словом.

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим гомоморфизм $\varphi : F_n \to S_{n+1}$, $x_i \mapsto \sigma_i$.

Предложение 12.4

По модулю соотношений $x_i^2 = e$, $x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1}$ и $x_i x_j = x_j x_i$, где $|i-j| \geqslant 2$, каждое слово $w \in F_n$ эквивалентно некоторому минимальному слову перестановки $\varphi(w) \in S_{n+1}$, а все минимальные слова перестановки $\varphi(w)$ эквивалентны между собой.

Доказательство. Индукция по количеству букв в слове $w \in F_{n-1}$. Для $w = \varnothing$ утверждение очевидно. Пусть оно справедливо для всех слов из $\leqslant m$ букв. Достаточно для каждого m-буквенного слова w и каждой буквы x_ν проверить предложение для слова wx_ν. Если слово w не является минимальным словом элемента $g = \varphi(w)$, то оно эквивалентно более короткому минимальному слову. Тогда и wx_ν эквивалентно более короткому слову, и предложение справедливо по индукции. Поэтому мы будем далее считать, что слово w является минимальным словом элемента $g = \varphi(w) = (g_0, g_1, \dots, g_n)$. Возможны два случая: либо $g_{\nu-1} > g_\nu$, либо $g_{\nu-1} < g_\nu$. В первом случае у перестановки g есть минимальное слово вида ux_ν, по предположению индукции эквивалентное слову w. Тогда $wx_\nu \sim ux_\nu x_\nu \sim u$ и элемент $\varphi(wx_\nu) = \varphi(u)$ является образом более короткого, чем w слова u, эквивалентного слову wx_ν. По индукции, слово u эквивалентно минимальному слову элемента $\varphi(wx_\nu)$ и все такие слова эквивалентны друг другу. Поэтому то же верно и для эквивалентного u слова wx_ν.

Остаётся рассмотреть случай $g_{\nu-1} < g_\nu$. Здесь $\ell(g\sigma_\nu) = \ell(g) + 1$ и слово wx_ν является минимальным словом для элемента $\varphi(wx_\nu)$. Мы должны показать, что любое другое минимальное слово w' этого элемента эквивалентно wx_ν. Для самой правой буквы слова w' есть 3 возможности: либо она равна x_ν, либо она равна $x_{\nu\pm1}$ либо она равна x_μ с $|\mu - \nu| \geqslant 2$. В пером случае $w' = ux_\nu$, где u, как и w, является минимальным словом элемента g. По индукции $u \sim w$, а значит, и $w' = ux_k \sim wx_k$.

Пусть теперь $w' = ux_{\nu+1}$. Поскольку оба слова wx_ν и $ux_{\nu+1}$ минимальны для перестановки $h = \varphi(wx_\nu) = \varphi(ux_{\nu+1})$, в перестановке h на местах с номерами $\nu-1, \nu, \nu+1$ стоят числа $g_\nu > g_{\nu-1} > g_{\nu+1}$, а в перестановке $g = (g_0, g_1, \dots, g_n) = \varphi(w)$ на этих же местах — числа $g_{\nu-1} < g_\nu > g_{\nu+1}$, где $g_{\nu-1} > g_{\nu+1}$. Поэтому у перестановки h имеется минимальное слово вида $sx_{\nu+1}x_\nu x_{\nu+1}$, а у перестановки g — минимальное слово вида $tx_\nu x_{\nu+1}$. Перестановка $h' = \varphi(s) = \varphi(t)$ отличается от h тем, что числа на местах с номерами $\nu-1$, ν, $\nu+1$ в ней возрастают и равны $g_{\nu+1} < g_{\nu-1} < g_\nu$. Поскольку $\ell(h') = \ell(h) - 3 = \ell(g) - 2$, оба слова t и s минимальны для h' и по индукции эквивалентны. Кроме того, по индукции $w \sim tx_\nu x_{\nu+1}$. Поэтому

$$wx_\nu \sim tx_\nu x_{\nu+1} x_\nu \sim sx_\nu x_{\nu+1} x_\nu \sim sx_{\nu+1} x_\nu x_{\nu+1}\,.$$

Но $sx_{\nu+1}x_\nu \sim u$, поскольку оба слова минимальны для одной и той же перестановки[1] длины $m = \ell(h) - 1$. Таким образом, $wx_\nu \sim ux_{\nu+1}$. Случай $w' = ux_{\nu-1}$ полностью симметричен.

Наконец, пусть $h = \varphi(wx_\nu) = \varphi(ux_\mu)$, где $|\mu - \nu| \geqslant 2$. Тогда в h есть два непересекающихся фрагмента $g_{\nu-1} > g_\nu$ и $g_{\mu-1} > g_\mu$. Поэтому у h есть минимальные слова вида $tx_\mu x_\nu$ и вида $sx_\nu x_\mu$, где t и s являются минимальными словами для перестановки $\varphi(t) = \varphi(s)$, отличающейся от h тем, что расматриваемые 2 фрагмента в ней имеют вид $g_\nu < g_{\nu-1}$ и $g_\mu < g_{\mu-1}$. Так как длина этой перестановки равна $\ell(h) - 2 = m - 1$, по индукции $t \sim s$. Поскольку tx_μ — минимальное слово для g, по индукции $w \sim tx_\mu$. Аналогично, т. к. sx_ν и u — минимальные слова для перестановки $\varphi(sx_\nu) = \varphi(u)$, отличающейся от h' транспозицией первого из двух фрагментов и потому имеющей длину $\ell(h) - 1 = m$, по индукции $sx_\nu \sim u$. Таким образом, $wx_\nu \sim tx_\mu x_\nu \sim sx_\mu x_\nu \sim sx_\nu x_\mu \sim ux_\mu$, что и требовалось. □

Упражнение 12.7. Убедитесь, что $h \leqslant g$ в смысле порядка Брюа если и только если в симплексах e, h, g из n° 12.3 можно выбрать такие точки a, b, c, что длина геодезической дуги $[ac]$ меньше π и $b \in [ac]$.

[1] Она отличается от g, h и h' тем, что числа в позициях с номерами $\nu - 1, \nu, \nu + 1$ в ней упорядочены как $g_\nu > g_{\nu+1} < g_{\nu-1}$, где $g_\nu > g_{\nu-1}$.

Упр. 12.1. Первое очевидно, второе вытекает из того, что при вставке фрагмента $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$ в произвольное слово w получится такое слово, в котором сокращение любого фрагмента вида $y^{\varepsilon}y^{-\varepsilon}$ приведёт либо обратно[1] к слову w, либо к слову, получающемуся из w сначала сокращением *того же самого фрагмента* $y^{\varepsilon}y^{-\varepsilon}$, а уже затем вставкой $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$ в *то же самое место*, что и в w.

Упр. 12.2. Отобразите $n \in \mathbb{N}$ в $x^n y x^n \in F_2$ и воспользуйтесь предл. 12.1 на стр. 199.

Упр. 12.3. Поскольку отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ биективно, достаточно убедиться, что отображения $\sigma_{F(\pi)}$ и $F \circ \sigma_\pi \circ F^{-1}$ одинаково действуют на точку вида $F(p)$ с произвольным $p \in \mathbb{R}^n$.

Упр. 12.4. Обозначим через v_i вектор, идущий из центра симплекса Δ в вершину i. Вектор $n_{ij} = v_i - v_j$ ортогонален гиперплоскости π_{ij}, поскольку для любого $k \neq i, j$ скалярное произведение $\left(n_{ij}, v_k - (v_i + v_j)/2\right) = (v_i, v_k) - (v_j, v_k) + (v_i, v_i)/2 - (v_j, v_j)/2 = 0$, т. к. все произведения (v_i, v_j) с $i \neq j$ и все скалярные квадраты (v_i, v_i) одинаковы. Аналогичная выкладка показывает, что при $\{i, j\} \cap \{k, m\} = \varnothing$ векторы n_{ij} и n_{km} ортогональны. Векторы $v_i - v_k$ и $v_k - v_j$ образуют в натянутой на них двумерной плоскости стороны правильного треугольника с вершинами в концах векторов v_i, v_j и v_k, и угол между ними равен 60°.

[1] Обратите внимание, что такое происходит *не только* при сокращении того же самого фрагмента $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$, который был перед этим вставлен, но и при сокращении одной из букв $x^{\pm\varepsilon}$ с её соседкой.