Задачи для подготовки к контрольной № 6

ПК6◇1. Найдите ЖНФ линейного оператора $f \otimes g : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$, если

а) $f : V \to V$ имеет две двумерные клетки с собственными числами 1 и 2, а $g : V \to V$ — две двумерные клетки с собственными числами 3 и 4

б) $f : V \to V$ имеет две двумерные клетки с собственными числами 4 и 6, а $g : V \to V$ — две двумерные клетки с собственными числами 6 и 9

в) $f : V \to V$ имеет две двумерные клетки с собственными числами 0 и 1, а $g : V \to V$ — две двумерные клетки с собственными числами 2 и 3.

ОТВЕТ в (а) по одной одномерной и одной трёхмерной клетке с собственными числами 3, 6, 4, 8; в (б) по одной одномерной и одной трёхмерной клетке с собственными числами 24 и 54, а также две трёхмерных и две одномерных клетки с собственным числом 36; в (в) по одной одномерной и одной трёхмерной клетке с собственными числами 2 и 3, а также 4 двумерных нильпотентных клетки.

ПК6◇2. Векторы e_1, e_2, e_3 линейно независимы. Выясните, разложимы ли тензоры

а) $18e_1 \otimes e_1 - 12e_2 \otimes e_1 + 12e_3 \otimes e_1 + 12e_1 \otimes e_2 - 8e_2 \otimes e_2 + 8e_3 \otimes e_2 + 12e_1 \otimes e_3 - 8e_2 \otimes e_3 + 8e_3 \otimes e_3$

б) $-6e_1 \otimes e_1 + 4e_2 \otimes e_1 - 4e_3 \otimes e_1 - 2e_1 \otimes e_2 + 2e_2 \otimes e_2 - 4e_3 \otimes e_2 - e_1 \otimes e_3 - 6e_2 \otimes e_3 - 4e_3 \otimes e_3$

в) $12e_1 \otimes e_1 - 30e_2 \otimes e_1 + 18e_3 \otimes e_1 + 12e_1 \otimes e_2 - 30e_2 \otimes e_2 + 18e_3 \otimes e_2 + 4e_1 \otimes e_3 - 10e_2 \otimes e_3 + 6e_3 \otimes e_3$

Если да — предъявите разложение явно, если нет — объясните, почему.

ОТВЕТ в (а) разложим: $(6e_1 - 4e_2 + 4e_3) \otimes (3e_1 + 2e_2 + 2e_3)$, в (б) нет, так как $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} -6 & 4 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ -1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = 3$, в (в) разложим: $(2e_1 - 5e_2 + 3e_3) \otimes (6e_1 + 6e_2 + 2e_3)$.

ПК6◇3. Квадролинейная форма det на векторном пространстве с базисом $e_1, \dots, e_4$ сопоставляет четырём векторам определитель матрицы их координат в этом базисе. Напишите матрицу Грама билинейной формы, полученной свёрткой

а) 3-го и 2-го тензорных сомножителей формы det соответственно с 1-м и 2-м сомножителями тензора $(-5e_1 + 5e_4) \otimes (5e_2 + 2e_3) + (-4e_1 - 5e_3) \otimes (e_2 + e_4)$

б) 2-го и 4-го тензорного сомножителей формы det соответственно с 1-м и 2-м сомножителями тензора $(e_3 - 4e_4) \otimes (-5e_1 + 2e_2) + (-e_1 - e_4) \otimes (-5e_2 - 3e_3)$

в) 4-го и 2-го тензорного сомножителей формы det соответственно с 1-м и 2-м сомножителями тензора $(-2e_3 + 3e_4) \otimes (5e_1 - e_2) + (-5e_1 - 2e_3) \otimes (3e_2 - 4e_4)$.

ПК6◇4 (10 баллов). Векторы $e_1, \dots, e_5$ линейно независимы. Выясните, разложима ли грассманова квадратичная форма

а) $9e_1 \wedge e_2 - 8e_1 \wedge e_3 + 9e_1 \wedge e_4 + 2e_1 \wedge e_5 - 5e_2 \wedge e_3 + 4e_2 \wedge e_4 - 9e_2 \wedge e_5 - 5e_3 \wedge e_4 + 9e_3 \wedge e_5 + 6e_4 \wedge e_5$

б) $-8e_1 \wedge e_2 + 12e_1 \wedge e_3 - 12e_1 \wedge e_4 - 16e_2 \wedge e_3 + 16e_2 \wedge e_4 + 8e_2 \wedge e_5 - 12e_3 \wedge e_5 + 12e_4 \wedge e_5$

ОТВЕТ в (а) det сворачивается с $-29e_1 \otimes e_2 - 5e_3 \otimes e_2 + 25e_4 \otimes e_2 - 10e_1 \otimes e_3 + 10e_4 \otimes e_3 - 4e_1 \otimes e_4 - 5e_3 \otimes e_4$, получается тензор $15x_2 \otimes x_1 - 25x_3 \otimes x_1 - 5x_4 \otimes x_1 - 15x_1 \otimes x_2 + 4x_3 \otimes x_2 - 10x_4 \otimes x_2 + 25x_1 \otimes x_3 - 4x_2 \otimes x_3 + 29x_4 \otimes x_3 + 5x_1 \otimes x_4 + 10x_2 \otimes x_4 - 29x_3 \otimes x_4$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 0 & -15 & 25 & 5 \\ 15 & 0 & -4 & 10 \\ -25 & 4 & 0 & -29 \\ -5 & -10 & 29 & 0 \end{pmatrix}$;

в (б)det сворачивается с $-5e_3 \otimes e_1 + 20e_4 \otimes e_1 + 5e_1 \otimes e_2 + 2e_3 \otimes e_2 - 3e_4 \otimes e_2 + 3e_1 \otimes e_3 + 3e_4 \otimes e_3$, получается тензор $-3x_2 \otimes x_1 - 3x_3 \otimes x_1 - 2x_4 \otimes x_1 + 3x_1 \otimes x_2 - 20x_3 \otimes x_2 - 8x_4 \otimes x_2 + 3x_1 \otimes x_3 + 20x_2 \otimes x_3 + 5x_4 \otimes x_3 + 2x_1 \otimes x_4 + 8x_2 \otimes x_4 - 5x_3 \otimes x_4$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 20 & 8 \\ -3 & -20 & 0 & -5 \\ -2 & -8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$;

в (в) det сворачивается с $-10e_3 \otimes e_1 + 15e_4 \otimes e_1 - 15e_1 \otimes e_2 - 4e_3 \otimes e_2 - 3e_4 \otimes e_2 + 20e_1 \otimes e_4 + 8e_3 \otimes e_4$, получается тензор $8x_2 \otimes x_1 - 3x_3 \otimes x_1 + 4x_4 \otimes x_1 - 8x_1 \otimes x_2 + 5x_3 \otimes x_2 - 10x_4 \otimes x_2 + 3x_1 \otimes x_3 - 5x_2 \otimes x_3 - 15x_4 \otimes x_3 - 4x_1 \otimes x_4 + 10x_2 \otimes x_4 + 15x_3 \otimes x_4$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 0 & -8 & 3 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 10 \\ -3 & 5 & 0 & 15 \\ 4 & -10 & -15 & 0 \end{pmatrix}$.

в) $-2e_1\wedge e_2+2e_1\wedge e_3-3e_1\wedge e_4+3e_1\wedge e_5+5e_2\wedge e_3+2e_2\wedge e_4-4e_2\wedge e_5-6e_3\wedge e_4-6e_3\wedge e_5-8e_4\wedge e_5$

г) $12e_1\wedge e_2+2e_1\wedge e_3-14e_1\wedge e_5+21e_2\wedge e_3-18e_2\wedge e_4-3e_2\wedge e_5-3e_3\wedge e_4+24e_3\wedge e_5-21e_4\wedge e_5$.

Если да — предъявите разложение явно, если нет — объясните, почему.

ОТВЕТ в (б) разложима: $(e_1-2e_3+2e_4+e_5)\wedge(-8e_2+12e_3-12e_4)$, в (в) тоже разложима: $(e_1-\frac{7e_3}{4}+\frac{3e_4}{2}+\frac{e_5}{4})\wedge(12e_2+2e_3-14e_5)$, а в (а) и в (г) нет, так как $a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23}\neq 0$.

ПК6◇5 (10 баллов). Найдите размерности линейных носителей многочленов

а) $-8x_1^3+36x_1^2x_2-24x_1^2x_3-54x_1x_2^2+72x_1x_2x_3-24x_1x_3^2+27x_2^3-54x_2^2x_3+36x_2x_3^2-8x_3^3$

б) $13x_1^3-66x_1^2x_2+46x_1^2x_3+66x_1x_2^2-44x_1x_2x_3-14x_1x_3^2-40x_2^3+88x_2^2x_3-88x_2x_3^2+40x_3^3$

в) $-16x_1^3+8x_1^2x_2+8x_1^2x_3-64x_1x_2x_3+28x_1x_3^2-12x_2^3+9x_2^2x_3-x_2x_3^2-8x_3^3$.

ОТВЕТ в (а): 1, в (б): 2, в (в): 3.