

### Задачи для подготовки к контрольной № 3

**ПКЗ♦1.** Выясните, приводим или нет в  $\mathbb{Z}[x]$  многочлен

а)  $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 4$  б)  $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 2$  в)  $x^4 + 2x^2 + 2$

и если да, разложите его на неприводимые множители.

ОТВЕТ: в (а) приводим:  $(x^2 + 2)(x^2 + x + 2)$ ; в (б) в  $\mathbb{F}_3$ , в (в) неприводим.

**ПКЗ♦2.** Найдите сумму квадратов комплексных корней многочлена:

а)  $x^3 - x^2 + 2x - 3$  б)  $x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 1$ .

ОТВЕТ:  $p_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} - 2e^{\frac{4\pi i}{3}}$  в (а) равно  $-3$ , в (б) равно  $-1$ .

**ПКЗ♦3.** Найдите (1) инвариантные множители (2) взаимные базисы в  $\mathbb{Z}^3$  и его  $\mathbb{Z}$ -подмодуле, порождённом столбцами матрицы

а)  $\begin{pmatrix} -80 & 42 & -46 & 36 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -40 & 19 & -22 & 17 \end{pmatrix}$  б)  $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 0 \\ -30 & 2 & 14 & 5 \\ -32 & 0 & 12 & 4 \end{pmatrix}$ .

ОТВЕТ: в (а) инвариантные множители: 1, 5, взаимный базис в  $\mathbb{Z}^3$  из столбцов матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ; в (б) инвариантные множители: 1, 4, 12, взаимный базис в  $\mathbb{Z}^3$  из столбцов матрицы  $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**ПКЗ♦4.** Найдите все целые решения систем уравнений

а)  $\begin{cases} 185x_1 + 78x_2 - 30x_3 + 2x_4 = 45 \\ 273x_1 + 126x_2 - 42x_3 + 21x_4 = 105 \\ 299x_1 + 130x_2 - 50x_3 + 8x_4 = 47 \\ 124x_1 + 53x_2 - 22x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$  б)  $\begin{cases} 65x_1 + 21x_2 + 9x_3 - 2x_4 = 7 \\ 64x_1 + 18x_2 + 12x_3 - 2x_4 = 2 \\ -47x_1 - 21x_2 + 2x_4 = -1 \\ -73x_1 - 30x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ .

в)  $\begin{cases} -889x_1 - 283x_2 + 212x_3 + 62x_4 = 514 \\ -451x_1 - 153x_2 + 89x_3 + 29x_4 = 177 \\ -38x_1 - 7x_2 + 19x_3 + 4x_4 = 67 \\ 32x_1 + 15x_2 + 2x_3 - x_4 = 24 \end{cases}$  г)  $\begin{cases} -208x_1 - 208x_2 + 116x_3 + 172x_4 = 28 \\ -11x_1 - 14x_2 + 7x_3 + 11x_4 = -1 \\ 31x_1 + 30x_2 - 17x_3 - 25x_4 = -5 \\ 113x_1 + 106x_2 - 61x_3 - 89x_4 = -21 \end{cases}$ .

(2z<sub>1</sub> + 2z<sub>2</sub> - 4z<sub>3</sub> + 6z<sub>4</sub> - 5z<sub>5</sub> + 6z<sub>6</sub> - 7z<sub>7</sub> + 9z<sub>8</sub> - 6).

матрица  $R_A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 6 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 6 \\ 3 & -7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ , приведённая матрица системы  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , решения исходной системы.

приведённая матрица системы  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ , решения исходной системы:  $(-12z_1 - 26z_2 - 5z_3 - 28z_4)$ ; в (г)

приведённая матрица системы  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , система не совместна; в (в) матрица  $R_A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -1 \\ -2 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -9 & -11 & 5 \end{pmatrix}$

исходной системы:  $(-2z_1 + 7z_2 - 12z_3 + 11z_4 - 4z_5 + 8z_6)$ ; в (б) матрица  $R_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & -4 & 6 & 7 \\ -2 & -4 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ , приве-

ОТВЕТ: в (а) матрица  $R_A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ -4 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ , приведённая матрица системы  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , решения

**ПКЗ♦5.** Отщепляется ли прямым слагаемым  $\mathbb{Z}$ -подмодуль  $L \subset \mathbb{Z}^3$ , порождённый столбцами матрицы

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 18 & -18 & -27 & -6 \\ 12 & -4 & -1 & 0 \\ -57 & 37 & 43 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} -98 & -17 & -38 & -8 \\ 33 & 7 & 13 & 3 \\ -46 & -9 & -18 & -4 \end{pmatrix},$$

и если да, явно укажите в  $\mathbb{Z}^3$  какой-нибудь дополнительный к  $L$  подмодуль.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & -15 \end{pmatrix}$$

множители: 1, 1, дополнительный подмодуль порождается третьим столбцом матрицы  
 ОТВЕТ: в (а) нет, т. к. инвариантные множители: 1, 3, и  $\mathbb{Z}_3/L \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(3)$  имеет кручение; в (б) да, т. к. инвариантные