ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ «АЛГЕБРА – I»

ЗА ВЕСЕННИЙ СЕМЕСТР 2023/24 УЧЕБНОГО ГОДА

ТЕМА 1. Алгебра грассмановых многочленов и внешняя алгебра свободного модуля. Знак и длина перестановки, знак тасующей перестановки. Линейная замена переменных в грассмановом многочлене, определитель и миноры, внешняя степень матрицы, мультипликативность внешних степеней. Соотношения Лапласа (разложение определителя по набору строк/столбцов), присоединённая матрица. Матрицы над кольцом многочленов = многочлены с коэффициентами в алгебре матриц, тождество Гамильтона – Кэли. Число элементов в факторе решётки по подрешётке равно объёму фундаментального параллелепипеда, выражение инвариантных множителей матрицы через её миноры.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: вычислять с грассмановыми многочленами, вычислять определители, находить присоединённую и обратную матрицы вычислением алгебраических дополнений, вычислять характеристический многочлен матрицы, вычислять инвариантные множители матрицы через её миноры, вычислять число элементов в факторе решётки по соизмеримой подрешётке через дискриминант подрешётки.

ТЕМА 2. Классификация конечномерных пространств с оператором над произвольным полем, жорданова и фробениусова нормальные формы. Элементарные делители, характеристический и минимальный многочлены. Характеризация нильпотентных, полупростых, циклических и диагонализуемых операторов. Свойства коммутирующих операторов. Корневое разложение и вычисление функций от операторов.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: находить элементарные делители, характеристический и минимальный многочлены, жорданову и фробениусову нормальные формы (над любым полем), собственные числа и собственные и корневые подпространства оператора, выяснять наличие циклического вектора, диагонализуемость, полупростоту, нильпотентность и цикловой тип нильпотентного оператора, вычислять аналитические в окрестности спектра функции от матриц и операторов (в частности, произвольные степени и экспоненту любой матрицы, а также корни и логарифмы невырожденных матриц) при помощи полиномиальной интерполяции.

ТЕМА 3. Группы и гомоморфизмы групп, непустые слои гомоморфизма являются смежными классами ядра. Циклические подгруппы и порядки элементов. Симметрические и знакопеременные группы: цикловой тип, длина и знак перестановки, классы сопряжённости, централизатор перестановки данного циклового типа. Группы многогранников. Линейные и проективные группы над конечными полями. Действие группы на множестве: транспортёры, стабилизаторы, нормализаторы и централизаторы, формулы для длины орбиты и числа орбит. Действие группы на себе: классы смежности и сопряжённости. Нормальные подгруппы и фактор группы.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: находить длину орбиты и число орбит действия конечной группы на конечном множестве, пользоваться свойствами гомоморфизмов, подгрупп, смежных классов, порядков элементов при решении комбинаторных задач с действием группы, вычислять знак, цикловой тип, порядок, централизатор и степени заданной перестановки, вычислять композиции перестановок, исследовать подгруппы на нормальность.

ТЕМА 4. Коммутаторы и коммутант. Простые группы, простота групп A_n и $\mathrm{PSL}_n\,\mathbb{F}_q$. Композиционные ряды, теорема Жордана – Гёльдера. Прямые и полупрямые произведения групп. Свойства p-групп и теоремы Силова. Свободные группы. Задание групп образующими и соотношениями.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: вычислять коммутанты групп S_n, A_n, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$, описывать группы порядков pq, перечислять группы порядка $\leqslant 15$, использовать свойства p-групп, теоремы Силова и композиционные факторы для анализа строения конечных групп, использовать образующие и соотношения для описания гомоморфизмов групп, задавать образующими и соотношениями симметрическую группу и группы трёхмерных многогранников (включая диэдры).

ТЕМА 5. Полилинейные отображения и тензорные произведения модулей над кольцом (конструкция и универсальное свойство), тензорное произведение линейных отображений. Канонические изоморфизмы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Базис тензорного произведения свободных модулей, образующие и соотношения тензорного произведения модулей, заданных образующими и соотношениями.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: пользоваться универсальным свойством тензорного произведения, задавать линейные отображения между тензорными произведениями указанием их значений на разложимых тензорах, вычислять тензорные произведения абелевых групп и примитивных расширений полей.

ТЕМА 6. Тензорные произведения и тензорные степени векторных пространств. Разложимые тензоры. Линейные операторы и полилинейные формы как тензоры. Свёртки, двойственность между тензорными степенями двойственных пространств. Линейный носитель тензора. Тензорная алгебра векторного пространства, её универсальное свойство.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: вычислять свёртки и линейные носители тензоров, исследовать тензор на разложимость, понимать, как действуют свёртки на языке полилинейных форм и линейных отображений.

ТЕМА 7. Симметрические и внешние степени векторного пространства, симметрическая и внешняя алгебра. Симметрические и знакопеременные тензоры. Поляризация многочленов (обычных и грассмановых), частные производные и двойственность между симметрическими и внешними алгебрами двойственных пространств над полем характеристики нуль. Многочлены с минимальным линейным носителем, многообразия Веронезе и Грассмана.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: вычислять размерности симметрических и внешних степеней, вычислять поляризации обычных и грассмановых многочленов, пользоваться формулой Тейлора и принципом Аронгольда при анализе линейных утверждений про (обычные) многочлены, вычислять размерность линейного носителя многочлена (обычного и грассманова), выяснять, разложим ли грассманов многочлен.

ТЕМА 8. Овеществление комплексного векторного пространства, сравнение вещественной и комплексной линейности, соотношения Коши – Римана. Комплексификация вещественных векторных пространств и линейных отображений, вещественный геометрический смысл комплексных собственных векторов, билинейное и полуторалинейное продолжение вещественной билинейной формы на комплексификацию. Комплексные и вещественные структуры. Эрмитовы структуры и кэлеровы тройки. Эрмитова геометрия: длина вектора, эрмитова структура однозначно восстанавливается по функции длины, неравенства КБШ и треугольника, матрицы Грама и ортогонализация Грама – Шмидта, ортогональное дополнение и ортогональная проекция, эрмитов угол между комплексными прямыми.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: выяснять, является ли $\mathbb{R}$-линейный оператор $\mathbb{C}$-линейным, понимать, что происходит с собственными векторами, собственными и корневыми подпространствами и элементарными делителями линейных операторов при комплексификации и овеществлении, понимать, как устроены собственные подпространства комплексной и вещественной структуры, и как эти собственные подпространства получаются друг из друга, находить третий элемент кэлеровой тройки по двум другим, вычислять длины, углы и ортогональные проекции в эрмитовом пространстве, находить эрмитово двойственный базис к данному.

ТЕМА 9. Эрмитово сопряжение линейных отображений, эрмитовы и антиэрмитовы операторы, ортогональная диагонализация нормальных операторов, нормальные формы унитарных и (анти)эрмитовых операторов. Унитарная группа, экспоненциальное отображение. Эрмитово продолжение евклидовой структуры, канонический вид евклидово (анти)самосопряжённых и ортогональных операторов. SVD-разложение линейных отображений между эрмитовыми пространствами, сингулярные числа и сингулярные направления. Полярное разложение обратимого оператора на эрмитовом пространстве.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: выяснять, нормален ли оператор, и приводить нормальные (в том числе унитарные и (анти)эрмитовы) операторы к нормальным осям, а также приводить к нормальным осям ортогональные и евклидово (анти)самосопряжённые операторы в евклидовом пространстве,вычислять экспоненты и логарифмы от комплексных матриц, вычислять сингулярные числа и сингулярные направления линейных отображений между эрмитовыми пространствами и компоненты полярного разложения невырожденного оператора на эрмитовом пространстве.