О строении групп

AC12◇1. Напишите два разных композиционных ряда для группы: **а)** S_4 **б)** D_6.

AC12◇2. Разложите в полупрямое произведение собственных подгрупп группы
а) S_n **б)** обратимых верхнетреугольных матриц **в)** подобий евклидовой плоскости.

AC12◇3. Есть ли такое разложение у группы Q_8?

AC12◇4. Приведите пример неабелевой группы порядка **а)** 21 **б)** 27 и укажите какой-нибудь её композиционный ряд.

AC12◇5. Покажите, что группа $\mathbb{Z}/(3) \rtimes_\psi \mathbb{Z}/(4)$, где $\psi : \mathbb{Z}/(4) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/(3))$ переводит $[1]_4$ в автоморфизм смены знака, не абелева и не изоморфна ни D_6, ни A_4.

AC12◇6. Для всякого ли простого $p \mid |G|$, в G есть элемент порядка[1] p?

AC12◇7. Верно ли, что силовская p-подгруппа группы G
а) нормальна если и только если $N_p(G) = 1$
б) пересекает каждую подгруппу $H \subset G$ по силовской p-подгруппе в H
в) отображается в силовскую p-подгруппу при каждой факторизации $G \twoheadrightarrow G/N$?

AC12◇8. Для простых $p \in \mathbb{N}$ найдите $N_p(S_p)$.

AC12◇9. Перечислите все силовские подгруппы в **а)** S_3 **б)** S_4 **в)** S_7.

AC12◇10. Пусть $|D_n| = 2^m k$, где k нечётно. Докажите, что $N_2(D_n) = k$.

AC12◇11. Верно ли, что во всех группах порядка 12 есть нормальная подгруппа порядка 4?

AC12◇12. Перечислите с точностью до изоморфизма все группы порядка:
а) 14 **б)** 15 **в)** 21 **г)** 45 **д)** 49 **е)** 2121.

AC12◇13. Верно ли, что верхние унитреугольные матрицы составляют силовскую p-подгруппу в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$? Сколько всего силовских p-подгрупп в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$?

AC12◇14. Опишите подгруппу, порождённую матрицами $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$, и перечислите все силовские подгруппы в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.

AC12◇15. Рассмотрим подгруппу $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, порождённую матрицами $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$, где $i^2 = \omega^2 + \omega = -1$. Найдите $|G|$, разложите группу G в полупрямое произведение собственных подгрупп и задайте её образующими и соотношениями.

---

[1] ПОДСКАЗКА: рассмотрите действие группы $\mathbb{Z}/(p)$ циклическими перестановками элементов на множестве таких наборов $(g_1, \dots, g_p) \in G^p$, что $g_1 \cdots g_p = 1$.