ПРОГРАММА ПЕРВОГО СЕМЕСТРА

КУРСА «АЛГЕБРА – I»

интенсивность занятий: 1,5 пары лекций + 1,5 пары упражнений в неделю
темы, набранные *курсивом* могут стать необязательными или упраздниться вовсе

ПЕРВАЯ ЧЕТВЕРТЬ (7 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Определение поля, коммутативного кольца и абелевой группы. Примеры: числа, многочлены, геометрические векторы, $\mathbb{F}_2$, аддитивная и мультипликативная группы поля. Рабочий пример: кольцо $\mathbb{Z}$ — делимость, НОД и НОК, алгоритм Евклида – Гаусса, взаимная простота, свойства взаимно простых элементов, факториальность.

НЕДЕЛЯ 2. Второй рабочий пример: кольца и поля $\mathbb{Z}/(n)$ — таблицы умножения, делители нуля, нильпотенты, обратимые элементы, теоремы Ферма и Эйлера, свойства простых полей $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

НЕДЕЛЯ 3. Гомоморфизмы абелевых групп и коммутативных колец, непустой слой является сдвигом ядра. Приложения: квадраты в поле $\mathbb{F}_p$, простое подполе и гомоморфизм Фробениуса. Прямые произведения абелевых групп и коммутативных колец. Китайская теорема об остатках (КТО), явное отыскание чисел с заданными остатками.

НЕДЕЛЯ 4. Многочлены — деление «столбиком», НОД, НОК, алгоритм Евклида – Гаусса, взаимная простота, КТО, неприводимые многочлены, факториальность кольца $\Bbbk[x]$. Корни и общие корни, *интерполяционный многочлен Лагранжа*. Кольца и поля вычетов $\Bbbk[x]/(f)$, отыскание обратных элементов. Рабочий пример: поле $\mathbb{C}$. *Квадратичный закон взаимности.*

КОНТРОЛЬНАЯ № 1: НОД, НОК и КТО в $\mathbb{Z}$ и $\Bbbk[x]$, примитивные расширения полей, поле $\mathbb{C}$.

НЕДЕЛЯ 5. Конечные поля. *Конечная мультипликативная подгруппа в поле циклическая. Классификация конечных полей.*

НЕДЕЛЯ 6. Формальные степенные ряды и алгебраические операции над ними, обращение ряда с ненулевым свободным членом. Дифференциальное исчисление, приложение: кратные корни многочленов. Экспонента и логарифм, бином с произвольным показателем. *Продвинутые примеры: числа Каталана, действие $\mathbb{Q}[\![d/dt]\!]$ на $\mathbb{Q}[t]$ и суммирование степеней.*

НЕДЕЛЯ 7. Кольца частных, поле частных целостного кольца. Примеры: $\mathbb{Q}$, поле рациональных функций $\Bbbk(t)$, поле рядов Лорана $\Bbbk(\!(t)\!)$, разложение рациональных функций в сумму простейших дробей и в степенной ряд. Приложения: отыскание производных и первообразных, решение линейных рекуррентных уравнений. *Дробно степенные ряды, лемма Гензеля, разложение алгебраической функции в ряд Пюизо.*

КОНТРОЛЬНАЯ № 2: рациональные функции и степенные ряды (в сессию после 1-го модуля).

ВТОРАЯ ЧЕТВЕРТЬ (8 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Идеалы и фактор кольца. *Нётеровы кольца, теорема Гильберта о базисе идеала.* Простые и максимальные идеалы. Простые и неприводимые элементы кольца. Области главных идеалов, рабочий пример: евклидовы кольца. Факториальные кольца, факториальность области главных идеалов.

НЕДЕЛЯ 2. Лемма Гаусса и факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Разложение на множители многочленов с целыми коэффициентами, критерии неприводимости.

неделя 3. Модули над коммутативными кольцами: подмодули, фактор модули, дополнительные подмодули и неразложимость, модули гомоморфизмов. Ранг свободного модуля. Задание модулей образующими и соотношениями. Матричный формализм: умножение матриц, как преобразуются строки/столбцы матрицы при умножении слева/справа на заданную матрицу, матрицы переходов, матрицы гомоморфизмов.

неделя 4. Алгебра матриц, таблица умножения матричных единиц. Нильпотентные и обратимые матрицы, обращение верхней унитреугольной матрицы. Рабочий пример: модуль симметрических многочленов и теорема об элементарных симметрических функциях.

неделя 5. Обратимые матрицы 2×2 и элементарные преобразования строк/столбцов, задаваемые левым/правым умножением на обратимые 2×2-матрицы. Метод Гаусса над областью главных идеалов: приведение матрицы к нормальной форме Смита и его применения для решения систем линейных уравнений и отыскания обратной матрицы.

неделя 6. Строение конечно порождённых модулей над областью главных идеалов: теорема о взаимном базисе и инвариантные множители подмодуля в свободном модуле, теорема об элементарных делителях. Основной рабочий пример: $\mathbb{Z}$-модули.

контрольная № 3: разложение на множители и метод Гаусса.

неделя 7. Строение конечно порождённых абелевых групп, каноническое разложение абелевой группы в сумму циклических и его применения. Группы гомоморфизмов и группы, заданные образующими и соотношениями.

неделя 8. Грассмановы многочлены и определители[1]: замена переменных в грассмановом многочлене и миноры, разложение определителя по набору строк/столбцов (формулы Лапласа), *определитель пучка матриц, присоединённая матрица. Матрицы над кольцом многочленов = многочлены с коэффициентами в алгебре матриц, тождество Гамильтона – Кэли.* Приложение к абелевым группам: число элементов в факторе решётки по подрешётке равно объёму фундаментального параллелепипеда, выражение инвариантных множителей матрицы через её миноры.

письменный экзамен за 1-й семестр.

[1]Этот сюжет очень сильно перекликается с курсом геометрии, и объём материала зависит от его распределения между этими курсами. Присоединённые матрицы, тождество Гамильтона – Кэли и связь определителей с объёмами параллелепипедов и симплексов, скорее всего, будут именно в курсе геометрии, а грассмановы многочлены и миноры — у нас.