

Комплексные и вещественные пространства

АЛ12♦1 (теорема Шура). Докажите, что любой оператор на эрмитовом пространстве записывается в подходящем ортонормальном базисе верхнетреугольной матрицей.

АЛ12♦2. Постройте изоморфизм групп $U_n \simeq O_{2n}(\mathbb{R}) \cap Sp_{2n}(\mathbb{R})$.

АЛ12♦3. Всякая ли унитарная матрица является произведением вещественной ортогональной и комплексной симметричной матриц?

АЛ12♦4. Всякая ли матрица из SU_2 подобна вещественной ортогональной матрице?

АЛ12♦5 (нормальные операторы). Докажите, что нормальность оператора f в эрмитовом пространстве равносильна каждому из следующих свойств:

а) $\|fv\| = \|f^\times v\|$ для всех $v \in V$

б) каждый собственный вектор оператора f собственный и для f^\times

в) ортогонален к любому f -инвариантному подпространству f -инвариантен

г) всякое f -инвариантное подпространство f^\times -инвариантно

д) компоненты разложения f в сумму эрмитова и антиэрмитова операторов перестановочны

АЛ12♦6. Верно ли, что обратимый оператор нормален если и только если компоненты его полярного разложения перестановочны?

АЛ12♦7. Докажите, что для любых $h \in U_n$ и $k \in \mathbb{N}$ существует такой $f \in \mathbb{C}[t]$, что $f(h) \in U_n$ и $f(h)^k = h$.

АЛ12♦8. Пусть f — эрмитов оператор на координатном пространстве \mathbb{C}^n со стандартной эрмитовой структурой, а $L \subset \mathbb{C}^n$ — r -мерное комплексное подпространство с ортонормальным базисом e_1, \dots, e_r . Положим $R_L(f) = \sum_{i=1}^r (fe_i, e_i)$.

а) Зависит ли $R_L(f)$ от выбора ортонормального базиса в L ?

б*) Пусть f имеет попарно разные собственные значения $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$. Найдите $\max_L R_L(f)$ по всем r -мерным подпространствам $L \subset \mathbb{C}^n$.

АЛ12♦9*. На комплексном векторном пространстве V заданы невырожденная симметричная \mathbb{C} -билинейная форма $g: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ и такой \mathbb{C} -линейный оператор $f: V \rightarrow V$, что $\beta(fu, w) = \beta(u, fw)$ для всех $u, w \in V$. Докажите, что у оператора f есть такой жорданов базис, в котором матрица Грама формы β блочно диагональна и состоит из блоков вида

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

АЛ12♦10*. Покажите, что зигелево полупространство $\mathfrak{H}_n \subset \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ непрерывно стягивается по себе в точку.

Персональный табель _____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 12 (15.05.2023)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
в			
г			
д			
6			
7			
8а			
б			
9			
10			