## Тензорные произведения

**АЛ10⋄1.** Пусть $f_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto mz$, и $g_k : \mathbb{Z}/(n) \to \mathbb{Z}/(n)$, $[z] \mapsto [kz]$. Канонический изоморфизм $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) \simeq \mathbb{Z}/(n)$, $x \otimes [y]_n \mapsto [xy]_n$, превращает каждый гомоморфизм $\mathbb{Z}$-модулей

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n)$$

в гомоморфизм $\mathbb{Z}/(n) \to \mathbb{Z}/(n)$. В какие гомоморфизмы $\mathbb{Z}/(n) \to \mathbb{Z}/(n)$ превратятся $f_m \otimes_{\mathbb{Z}} g_k$ при разных $m, k \in \mathbb{N}$? Опишите их ядра и образы, а также ядра и образы самих $f_m$ и $g_k$. Не забудьте рассмотреть случаи $m = 1$ и $k = 1$.

**АЛ10⋄2.** Для конечномерных векторных пространств $U$, $V$, $W$ постройте изоморфизмы:

**а)** $\operatorname{Hom}(U \otimes W, V) \simeq \operatorname{Hom}(W, \operatorname{Hom}(U, V))$ и $\operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}(U, W), V) \simeq \operatorname{Hom}(W, U \otimes V)$

**б)** $\operatorname{Hom}\big(U \otimes \operatorname{Hom}(U, W),\, W\big) \simeq \operatorname{End}\big(\operatorname{Hom}(U, W)\big) \simeq \operatorname{Hom}\big(U,\, \operatorname{Hom}(U, W)^* \otimes W\big)$

**в)** $\operatorname{End}(U \otimes V \otimes W) \simeq \operatorname{Hom}\big(\operatorname{Hom}(U, V) \otimes \operatorname{Hom}(V, W), \operatorname{Hom}(U, W)\big)$.

**АЛ10⋄3*.** В какое линейное отображение $\operatorname{Hom}(U, V) \otimes \operatorname{Hom}(V, W) \to \operatorname{Hom}(U, W)$ переходит в зад. АЛ10⋄2 (в) тождественный эндоморфизм пространства $U \otimes V \otimes W$?

**АЛ10⋄4*.** Какому эндоморфизму пространства $\operatorname{Hom}(U, W)$ отвечает в зад. АЛ10⋄2 (б) отображение $c : U \otimes \operatorname{Hom}(U, W) \to W$, $u \otimes \varphi \mapsto \varphi(u)$? Как устроено ядро соответствующего ему линейного отображения $U \to \operatorname{Hom}(U, W)^* \otimes W$?

**АЛ10⋄5.** Существуют ли такие ненулевые линейные операторы $F_1, \dots, F_m : V \to V$ и отличный от нулевого набор констант $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, что $\lambda_1 F_1^{\otimes n} + \ldots + \lambda_m F_m^{\otimes n} = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$?

**АЛ10⋄6.** Найдите размерность пространства таких трилинейных форм $\varphi : V \times V \times V \to \Bbbk$ на $n$-мерном векторном пространстве $V$ над полем $k$, что для всех $u, v, w \in V$

**а)** $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w) = \varphi(u, w, v)$ **б)** $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w)$

**в)** $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w) = \varphi(u, w, w)$ **г)** $\varphi(u, v, v) = \varphi(u, u, v) = 0$ **д)** $\varphi(u, u, u) = 0$

**е*)** $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, w, u)$ **ж*)** $\varphi(u, v, w) + \varphi(v, w, u) + \varphi(w, u, v) = 0$.

**АЛ10⋄7.** Пусть $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$, $U = \Bbbk^2$ и $V = \operatorname{End}(U)$. Покажите, что $\operatorname{Sym}^2 V \simeq (\operatorname{Sym}^2 U \otimes \operatorname{Sym}^2 U^*) \oplus$ $\oplus (\operatorname{Alt}^2 U \otimes \operatorname{Alt}^2 U^*)$, $\operatorname{Alt}^2 V \simeq (\operatorname{Sym}^2 U \otimes \operatorname{Alt}^2 U^*) \oplus (\operatorname{Alt}^2 U \otimes \operatorname{Sym}^2 U^*)$.

**АЛ10⋄8.** Пусть $\beta : V \times V \to \Bbbk$ — невырожденная симметричная билинейная форма. Покажите, что существует единственная билинейная форма $\Lambda^2\beta : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \to \Bbbk$, значение которой на разложимых тензорах равно $\Lambda^2\beta(v_1 \wedge v_2, w_1 \wedge w_2) \overset{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \beta(v_1, w_1) & \beta(v_1, w_2) \\ \beta(v_2, w_1) & \beta(v_2, w_2) \end{pmatrix}$. Вырождена ли она? Симметрична ли?

**АЛ10⋄9*.** Пусть в зад. АЛ10⋄8 пространство $V = \operatorname{End}(U)$, как в зад. АЛ10⋄7, а билинейная форма $\beta$ является поляризацией квадратичной формы $\det : \operatorname{End}(U) \to \Bbbk$. Фиксируем двойственные базисы $e_1, e_2 \in U$, $x_1, x_2 \in U^*$ и базис $v_{ij} = e_i \otimes x_j$ в $V$. Покажите, что **а)** формула $\omega \wedge \eta = \alpha(\omega, \eta)\, v_{11} \wedge v_{12} \wedge v_{21} \wedge v_{22}$ задаёт невырожденную симметричную билинейную форму $\alpha : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \to \Bbbk$ **б)** для каждого $\omega \in \Lambda^2 V$ существует единственное такое $\omega^* \in \Lambda^2 V$, что $\alpha(\eta, \omega^*) = \Lambda^2\beta(\eta, \omega)$ для всех $\eta \in \Lambda^2 V$ **в)** правило $\omega \mapsto \omega^*$ задаёт линейную инволюцию на пространстве $\Lambda^2 V$. **г)** Напишите матрицу этой инволюции и матрицы Грама форм $\alpha$ и $\Lambda^2\beta$ в базисе $v_{ij} \wedge v_{k\ell}$. **д)** Зависят ли форма $\alpha$ и инволюция $*$ от выбора двойственных базисов в $U$ и $U^*$? **е)** Вдохновляясь зад. АЛ10⋄7 установите канонические изоморфизмы между собственными подпространствами инволюции $*$ и пространствами $S^2 U$ и $S^2 U^*$.

**АЛ10⋄10*.** В условиях зад. АЛ10⋄9 положим $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, обозначим через $P$ и $Q$ квадрики, задаваемые квадратичными формами $\alpha$ и $\Lambda^2\beta$ в $\mathbb{P}_5$, а через $L_\pm \subset \mathbb{P}_5$ — двумерные плоскости, состоящие из неподвижных точек инволюции $*$. Покажите, что **а)** сопоставление прямой $(ab) \subset \mathbb{P}_3$ точки $a \wedge b \in \mathbb{P}_5$ задаёт биекцию между прямыми в $\mathbb{P}_3$ точками квадрики $P$ **б)** два семейства прямых на квадрике Сегре в $\mathbb{P}_3$ перейдут при этом в две гладкие коники $P \cap L_\pm$ **в)** множество всех касательных прямых к квадрике Сегре перейдёт в линейное соединение этих двух коник, совпадающее с $P \cap Q$.

Персональный табель ________________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

**Листок № 10 (17.3.2023)**

| № | дата | кто принял | подпись |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| г | | | |
| д | | | |
| е | | | |
| ж | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| г | | | |
| д | | | |
| е | | | |
| 10а | | | |
| б | | | |
| в | | | |