Пространства с оператором

АЛ7◇1. Всякая ли квадратная матрица сопряжена своей транспонированной?

АЛ7◇2. Пусть $m \geqslant n$. Для любых линейных отображений $F : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^m$ и $G : \mathbb{k}^m \to \mathbb{k}^n$ над любым полем $\mathbb{k}$ вычислите отношение характеристических многочленов $\chi_{FG}(t)/\chi_{GF}(t)$.

АЛ7◇3. Перечислите все импликации между следующими свойствами линейного оператора $F : V \to V$ над любым полем $\mathbb{k}$: **а)** у F есть циклический вектор **б)** $\mu_F = \chi_F$ **в)** $Z_F \overset{\text{def}}{=} \{G \in \mathrm{End}(V) \mid FG = GF\}$ совпадает с $\mathbb{k}[F] \overset{\text{def}}{=} \{h(F) \mid h \in \mathbb{k}[t]\}$.

АЛ7◇4. Вычислите $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}[x]}\big(\mathbb{k}[x]/(f), \mathbb{k}[x]/(g)\big)$ и его размерность.

АЛ7◇5. Пусть линейный оператор G над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ перестановочен со всеми операторами из Z_F. Верно ли, что $G \in \mathbb{k}[F]$?

АЛ7◇6. Найдите ЖНФ квадрата $J_m^2(\lambda)$ жордановой клетки размера $m \times m$ с собственным числом **а)** $\lambda \neq 0$ **б)** $\lambda = 0$.

АЛ7◇7. Существуют ли $(n+1)$-мерные векторные подпространства в $\mathrm{End}(\mathbb{k}^n)$, состоящие из попарно перестановочных диагонализуемых операторов $\mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^n$?

АЛ7◇8. Покажите, что любые два коммутирующих линейных оператора $F, G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ в некотором базисе можно одновременно записать верхнетреугольными матрицами.

АЛ7◇9. Равносильна ли нильпотентность линейного оператора F над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ тому, что $\mathrm{tr}\, F^k = 0$ при всех $1 \leqslant k \leqslant n$, если **а*)** $\mathrm{char}\, \mathbb{k} = 0$ **б)** $\mathrm{char}\, \mathbb{k} \neq 0$?

АЛ7◇10. Пусть операторы F и G таковы, что $FG - GF = G$. Верно ли, что G нильпотентен?

АЛ7◇11* (лемма Барта). Докажите, что над алгебраически замкнутым полем любые два линейных оператора F, G с $\mathrm{rk}(FG - GF) = 1$ имеют общий собственный вектор.

АЛ7◇12. Всюду плотны ли матрицы с циклическим вектором **а)** в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ **б)** в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$?

АЛ7◇13* (принцип расщепления). Покажите, что: **а)** диагонализуемые операторы всюду плотны в $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ **б)** если утверждение про матрицу A записывается системой полиномиальных соотношений с целыми коэффициентами на матричные элементы a_{ij}, то из его справедливости для какого-нибудь всюду плотного множества матриц A в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ или в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ вытекает, что оно верно для всех матриц над любым коммутативным кольцом **в)** если система полиномиальных соотношений на a_{ij} из предыдущего пункта не меняется при заменах $A \mapsto CAC^{-1}$ с произвольным[1] $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, то её достаточно проверить для диагональных комплексных матриц **г)** чтобы доказать тождество Гамильтона – Кэли $\chi_A(A) = 0$ для всех матриц A над любым коммутативным кольцом, его достаточно проверить для диагональных комплексных матриц (и сделайте эту проверку).

АЛ7◇14*. Свяжем с матрицей $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$, где K — любое коммутативное кольцо, линейные отображения $L_A, R_A, \mathrm{ad}_A, \mathrm{Ad}_A : \mathrm{Mat}_n(K) \to \mathrm{Mat}_n(K)$, заданные правилами **а)** $L_A(X) = AX$ **б)** $R_A(X) = XA$ **в)** $\mathrm{ad}_A(X) = AX - XA$ **г)** $\mathrm{Ad}_A(X) = AXA^{-1}$ (тут предполагается, что A обратима). С помощью принципа расщепления найдите их следы и определители.

АЛ7◇15*. Те же вопросы про линейные эндоморфизмы, которые матрица A задаёт на пространстве **а)** грассмановых **б)** обычных однородных многочленов степени 2 от строки переменных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ по правилу $f(\xi) \mapsto f(\xi A)$.

АЛ7◇16*. Опишите с точностью до изоморфизма[2] все пары (A, f), где A — конечная аддитивная абелева группа, а $f \in \mathrm{End}\, A$ имеет $f^2 = -\mathrm{Id}_A$.

АЛ7◇17*. Классифицируйте все конечно порождённые модули над кольцом $\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$.

[1] Т. е. является утверждением не про матрицу A, но про линейный оператор $\alpha : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ с матрицей A в некотором базисе.

[2] Пары (A, f) и (B, g) называются изоморфными, если существует такой изоморфизм абелевых групп $h : A \xrightarrow{\sim} B$, что $g = hfh^{-1}$.

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 7 (9.1.2023)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			
7			
8			
9а			
б			
10			
11			
12а			
б			
13а			
б			
в			
г			
14а			
б			
в			
г			
15а			
б			
16			
17			