

### Многочлены и ряды

**АЛЗ♦1.** Для всех  $m, n \in \mathbb{N}$  вычислите  $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{k}{n}$ .

**АЛЗ♦2.** Укажите в  $\mathbb{Z}[[x]] \setminus \mathbb{Q}(x)$  ряд с коэффициентами 0 и 1.

**АЛЗ♦3.** Пусть  $p_m(n)$  равно количеству диаграмм Юнга<sup>1</sup> из  $n$  клеток и  $\leq m$  строк, а  $p_m(0) \stackrel{\text{def}}{=} 1$ . Выразите  $p_m(n)$  через  $p_{m-1}(n)$  и  $p_m(n-m)$  и покажите, что  $\sum_{n \geq 0} p_m(n) t^n \in \mathbb{Q}(t)$ .

**АЛЗ♦4\*** (теорема Эйлера о пятиугольных числах). Пусть  $p(n)$  равно числу всех диаграмм Юнга из  $n$  клеток, а  $p_{\text{ч}}^{\vee}(n)$  и  $p_{\text{н}}^{\vee}(n)$  — количествам тех из них, где нет строк одинаковой длины и которые имеют, соответственно, чётное и нечётное число строк. Также пусть  $p(0) \stackrel{\text{def}}{=} 1$  и  $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 0} p(n) t^n \in \mathbb{Q}[[t]]$ . Покажите, что **а)**  $P(t) = \prod_{k \geq 1} (1 - t^k)^{-1}$

**б)**  $1/P(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} t^n (p_{\text{ч}}^{\vee}(n) - p_{\text{н}}^{\vee}(n))$  **в)**  $p(n) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \left( p\left(n - \frac{3k^2 - k}{2}\right) + p\left(n - \frac{3k^2 + k}{2}\right) \right)$ .

**г)** Вычислите  $p(10) = p(9) + p(8) - p(5) - p(3)$ .

**АЛЗ♦5.** Найдите число всех различных разбиений выпуклого  $n$ -угольника на треугольники не пересекающимися нигде кроме вершин диагоналями.

**АЛЗ♦6\***. Убедитесь, что ряд  $\text{tg}(t) = \sin(t)/\cos(t) = -i(e^{it} - e^{-it})/(e^{it} + e^{-it}) \in \mathbb{C}[[x]]$  имеет рациональные коэффициенты. Есть ли среди них отрицательные?

**АЛЗ♦7\***. Докажите, что у ряда  $\text{td}(-t) = t/(e^t - 1) = \sum_{k \geq 0} b_k t^k / k! \in \mathbb{Q}[[x]]$  коэффициенты  $b_{2n}$  знакопеременны, а  $b_{2n+1} = 0$  при  $n \geq 1$ .

**АЛЗ♦8\***. Выразите через числа  $b_k$  из предыдущей задачи коэффициенты рядов

**а)**  $(t/2) \cdot \text{cth}(t/2)$ , где  $\text{cth } t \stackrel{\text{def}}{=} \text{ch } t / \text{sh } t = (e^t + e^{-t}) / (e^t - e^{-t})$  **б)**  $(t/2) \cdot \text{ctg}(t/2)$  **в)**  $(t/2) \cdot \text{tg}(t/2)$ .

**АЛЗ♦9.** Пусть  $\nabla : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$ ,  $f(x) \mapsto f(x) - f(x-1)$ . Покажите, что для любого  $\psi(t) \in \mathbb{Q}[[t]]$  корректно определено линейное отображение  $\psi(\nabla) : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$ , и укажите такой ряд  $\varphi$ , что  $\varphi(\nabla) = d/dx$ . Много ли таких  $\varphi$ ?

**АЛЗ♦10.** Покажите, что следующие свойства линейного отображения  $F : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$  эквивалентны: **а)**  $F$  перестановочно с  $d/dx$  **б)**  $F$  перестановочно с  $\nabla$

**в)**  $F = \varphi(d/dx)$  для некоторого  $\varphi(t) \in \mathbb{Q}[[t]]$  **г)**  $F = \psi(\nabla)$  для некоторого  $\psi(t) \in \mathbb{Q}[[t]]$

**д)**  $F$  перестановочно со сдвигом  $T_1 : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$ ,  $f(x) \mapsto f(x+1)$

**е)**  $F$  перестановочно со всеми сдвигами  $T_\alpha : f(x) \mapsto f(x+\alpha)$ , где  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

**АЛЗ♦11.** Верно ли, что любые два коммутирующих со сдвигами линейных отображения  $\mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$  коммутируют между собой?

**АЛЗ♦12.** Пусть  $\varphi(t) = \sum_{k \geq 0} \varphi_k t^k / k! \in \mathbb{Q}[[t]]$ . Образ базисного монома  $x^m \in \mathbb{Q}[x]$  под действием оператора  $\varphi(d/dx) : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$  называется  $m$ -м многочленом Аппеля ряда  $\varphi$  и обозначается  $f_m(x) = \varphi(d/dx) x^m$ . Покажите, что при всех целых  $n \geq 0$ :

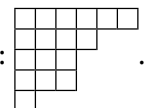
**а)**  $\varphi_n = f_n(0)$

**б)**  $f'_n(x) = n f_{n-1}(x)$

**в)**  $f_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{n-k}(x) y^k$

**г)**  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi_{n-k} x^k = (\varphi^\downarrow + x)^n$ , где стрелка у  $\varphi^\downarrow$  предписывает раскрывать бином  $(\varphi + x)^n$  заменяя все  $\varphi^k$  на  $\varphi_k$ .

<sup>1</sup>Т. е. выровненных по левому краю полосок неубывающей сверху вниз длины, например:



№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3			
4а			
б			
в			
г			
5			
6			
7			
8а			
б			
в			
9			
10			
11			
12а			
б			
в			
г			