Задачи для подготовки к контрольной № 5

ПК5◇1. Найдите порядок и чётность перестановки

а) $(1, 12, 8, 11, 10, 5, 4, 9, 2, 6, 7, 3) \in S_{12}$

б) $(2, 1, 9, 8, 10, 4, 7, 5, 3, 6) \in S_{10}$

в) $(4, 3, 7, 2, 6, 13, 10, 11, 5, 1, 8, 12, 9) \in S_{13}$.

ОТВЕТ: в (а) разложение на циклы: $|2, 12, 3, 8, 9\rangle|4, 11, 7\rangle|5, 10, 6\rangle$, чётная перестановка порядка 15.
в (б) разложение на циклы: $|1, 2\rangle|3, 9\rangle|4, 8, 5, 10, 6\rangle$, чётная перестановка порядка 10
в (в) разложение на циклы: $|1, 4, 2, 3, 7, 10\rangle|5, 6, 13, 9\rangle|8, 11\rangle$, нечётная перестановка порядка 12.

ПК5◇2. Сколько перестановок

а) не меняется при сопряжении перестановкой $(5, 6, 9, 2, 7, 4, 1, 3, 8)$ в S_9

б) сопряжено перестановке $(1, 8, 3, 6, 7, 4, 5, 2)$ в S_8

в) коммутирует с перестановкой $(2, 8, 10, 6, 4, 1, 5, 7, 11, 3, 9)$ в S_{11}

г) не меняется при сопряжении перестановкой $(9, 4, 3, 2, 8, 7, 6, 5, 1, 10)$ в A_{10}

д) сопряжено перестановке $(11, 3, 6, 7, 9, 2, 5, 4, 1, 10, 8)$ в A_{11} ?

ОТВЕТ: в (а) разложение на циклы: $|1, 5, 7\rangle|2, 6, 4\rangle|3, 9, 8\rangle$, ответ: 162
в (б) разложение на циклы: $|2, 8\rangle|4, 6\rangle|5, 7\rangle$, ответ: 56
в (в) разложение на циклы: $|1, 2, 8, 7, 5, 4, 6\rangle|3, 10\rangle|9, 11\rangle$, ответ: 420
в (г) разложение на циклы: $|1, 9\rangle|2, 4\rangle|5, 8\rangle|6, 7\rangle$, класс сопряжённости в A_{10} не расщепляется, ответ: 384
в (д) разложение на циклы: $|1, 11, 8, 4, 7, 5, 9\rangle|2, 3, 6\rangle$, класс сопряжённости в A_{11} расщепляется, ответ: 950400.

ПК5◇3. Сколько в S_9 перестановок порядка **а)** 3 **б)** 12 **в)** 14?

ОТВЕТ: в (а) типа $[3, 3, 3]$: 2240, типа $[3, 3, 1, 1, 1]$: 3360, типа $[3, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$: 168, итого: 5768
в (б) типа $[4, 3, 2]$: 15120, типа $[4, 3, 1, 1]$: 15120, итого: 30240
в (в) типа $[7, 2]$: 25920, итого: 25920.

ПК5◇4. Сколько орбит имеет оператор

а) $\mathrm{Ad}_g : S_5 \to S_5$ сопряжения перестановкой $g = (4, 3, 1, 2, 5)$

б) $\mathrm{Ad}_g : S_7 \to S_7$ сопряжения перестановкой $g = (6, 2, 3, 7, 1, 4, 5)$

в) $\mathrm{Ad}_g : S_{10} \to S_{10}$ сопряжения перестановкой $g = (8, 10, 7, 1, 4, 6, 2, 9, 5, 3)$?

ОТВЕТ: в (а) $g = |1, 4, 2, 3\rangle$ имеет $|X^g| = 4$, $g = |1, 2\rangle|3, 4\rangle$ имеет $|X^g| = 8$, $g = |1, 3, 2, 4\rangle$ имеет $|X^g| = 4$, $g = \mathrm{Id}$ имеет $|X^g| = 120$, итого: 34 в (б) 4 элемента имеют $|X^g| = 10$, $|X^{\mathrm{Id}} = 5040$, итого: 1016
в (в) 8 элементов циклового типа $[5, 4, 1]$ имеют $|X^g| = 20$, 4 элемента циклового типа $[5, 2^2, 1]$ имеют $|X^g| = 40$, 4 элемента циклового типа $[5, 1^5]$ имеют $|X^g| = 600$, 2 элемента циклового типа $[4, 1^6]$ имеют $|X^g| = 2880$, 1 элемент циклового типа $[2^2, 1^6]$ имеет $|X^g| = 5760$, $|X^{\mathrm{Id}}| = 3628800$, итого: 182152.

ПК5◇5. Задайте двумя образующими и тремя соотношениями какую-нибудь неабелеву группу порядка **а)** 183 **б)** 205 и найдите её коммутант.

ОТВЕТ: в (а) $183 = 61 \cdot 3$, решения уравнения $3x = 0$ в $\mathbb{Z}/(60)$ суть $[20, 40]$, решения уравнения $x^3 = 1$ в $\mathbb{Z}/(61)$ суть $[47, 13]$, один из возможных ответов: образующие x_{61}, x_3, соотношения: $x_{61}^{61} = x_3^3 = e$, $x_3 x_{61} x_3^{-1} = x_{61}^{47}$, коммутант порождается x_{61} и изоморфен $\mathbb{Z}/(61)$; в (б $205 = 41 \cdot 5$, решения уравнения $5x = 0$ в $\mathbb{Z}/(40)$ суть $[8, 16, 24, 32]$, решения уравнения $x^5 = 1$ в $\mathbb{Z}/(41)$ суть $[10, 18, 16, 37]$, один из возможных ответов: образующие x_{41}, x_5, соотношения: $x_{41}^{41} = x_5^5 = e$, $x_5 x_{41} x_5^{-1} = x_{41}^{10}$, коммутант порождается x_{41} и изоморфен $\mathbb{Z}/(41)$ (надо обосновать, почему группы $\mathbb{Z}/(61) \rtimes \mathbb{Z}/(3)$ и $\mathbb{Z}/(41) \rtimes \mathbb{Z}/(5)$ имеют такие образующие и соотношения).

ПК5◇6. Предъявите три попрано не изоморфные группы порядка **а)** 09 **б)** 42 и укажите их композиционные ряды и факторы Жордана–Гёльдера.

ОТВЕТ: например, в (а) A_5 (простая), $\mathbb{Z}/(2) \times D_{15} \triangleright D_{15} \triangleright \mathbb{Z}/(5)$, $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(5) \triangleright \mathbb{Z}/(15) \triangleright \mathbb{Z}/(3)$ (абелева);
в (б) $\mathbb{Z}/(3) \times D_{14} \triangleright D_{14} \triangleright \mathbb{Z}/(7)$, $\mathbb{Z}/(7) \times D_6 \triangleright D_6 \triangleright \mathbb{Z}/(3)$, $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(7) \triangleright \mathbb{Z}/(21) \triangleright \mathbb{Z}/(7)$ (надо обосновать, почему группы не изоморфны).