

**Задачи для подготовки к контрольной № 2**

**ПК2♦1.** В  $\mathbb{F}_3[x]$  разложите на неприводимые множители или докажите неприводимость многочленов а)  $x^5 + x^4 - x^2 - x - 1$  б)  $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + 1$  в)  $x^5 - x^4 - x^3 - x + 1$ .

ОТВЕТ: в (а)  $x^5 + x^4 - x^2 - x - 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 - x - 1)$ ; в (б) и (в) неприводимы. Неприводимы в  $\mathbb{F}_3$  многочлены  $x^2 + x + 1$ ,  $x^3 - x^2 - x - 1$ ,  $x^3 - x^2 - x + 1$ ,  $x^3 - x^2 - x - 1$ ,  $x^3 - x^2 - x + 1$ .

**ПК2♦2.** Разложите в сумму простейших дробей над полем  $\mathbb{Q}$  рациональные функции:

а)  $\frac{x^3 - x^2 + 6x + 4}{x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36}$  б)  $\frac{x^3 + 9x^2 + 6x + 8}{x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 56x + 32}$   
 в)  $\frac{x^3 - 9x^2 - 6x + 6}{x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81}$ .

ОТВЕТ: в (а)  $\frac{19}{25} + \frac{x+3}{2} + \frac{x-2}{6/25} + \frac{x-2}{4/5}$ ; в (б)  $-\frac{x-2}{29} - \frac{x-2}{43} - \frac{x-2}{32} + \frac{x-4}{30}$ ; в (в)  $\frac{x-3}{66} + \frac{x-3}{33} + \frac{x-3}{1} + \frac{x-3}{33}$ .

**ПК2♦3.** Найдите коэффициент при  $x^k$  у следующих рядов из  $\mathbb{Q}[[x]]$ :

а)  $\frac{-8x^2 - 5x + 1}{x^3 - 10x^2 + 32x - 32}$  б)  $\frac{-8x^2 + 3x + 7}{x^3 - x^2 - x + 1}$  в)  $\frac{x^2 - 4x + 2}{x^3 + 6x^2 + 9x + 4}$ .

ОТВЕТ: в (а) разложение на простейшие дроби:  $-\frac{4}{165} + \frac{1}{15} + \frac{1}{11} + \frac{1}{33}$ ; в (б) разложение на простейшие дроби:  $-\frac{1}{1} + \frac{x+1}{7} + \frac{x-1}{1}$ ; в (в) разложение на простейшие дроби:  $\frac{34}{25} - \frac{9(x+4)}{25} + \frac{9(x+1)}{25}$ .

**ПК2♦4.** Явно выразите  $a_k$  через  $k$  для следующих последовательностей:

- а)  $a_0 = -5, a_1 = 1, a_2 = -21, a_k = 3a_{k-2} + 2a_{k-3}$  при  $k \geq 3$
- б)  $a_0 = 3, a_1 = 25, a_2 = 130, a_k = 6a_{k-1} - 9a_{k-2} + 4a_{k-3}$  при  $k \geq 3$
- в)  $a_0 = -9, a_1 = -1, a_2 = -78, a_k = a_{k-1} + 8a_{k-2} - 12a_{k-3}$  при  $k \geq 3$ .

ОТВЕТ: в (а) производящая функция:  $\frac{-6x^2+x-5}{x^2+x-5}$ ; в (б) производящая функция:  $\frac{-4x^3+9x^2-6x+1}{7x^2+7x+3}$ ; в (в) производящая функция:  $\frac{1}{2x^2-8x^2-8x+9}$ .

**ПК2♦5.** Вычислите коэффициенты при  $x^k$  для всех  $0 \leq k \leq 3$  у степенных рядов

а)  $\frac{\operatorname{ch}(-4x^2 + 2x)}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$  б)  $\frac{\ln(-3x^2 + 3x + 1)}{\sqrt[3]{-x^2 - 4x + 1}}$  в)  $\frac{\sin(4x^2 - 4x)}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$ .

ОТВЕТ: в (а)  $\operatorname{ch}(-4x^2 + 2x) = 1 + 2x^2 - 8x^3 + O(x^4)$ ; в (б)  $\ln(-3x^2 + 3x + 1) = 1 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{10}x^3 + O(x^4)$ ; в (в)  $\sin(4x^2 - 4x) = -4x + 4x^2 - 4x^3 + O(x^4)$ .