О строении групп

A13◇1. Пусть произведение любых двух левых смежных классов некоторой подгруппы H также является левым смежным классом подгруппы H. Верно ли, что H нормальна?

A13◇2. Пусть две нормальные подгруппы пересекаются по единице. Покажите, что их элементы коммутируют друг с другом.

A13◇3. Во всякой ли группе чётного порядка есть элемент порядка 2?

A13◇4. Пусть любая подгруппа конечной группы G нормальна. Верно ли, что G абелева?

A13◇5. Какие классы сопряжённости в S_n распадаются на несколько классов сопряжённости в A_n? Перечислите классы сопряжённых элементов с указанием числа элементов в каждом классе для групп **а)** A_3 **б)** A_4 **в)** A_6.

A13◇6. Покажите, что группа A_n проста при $n \geqslant 5$.

A13◇7 (простота группы SO_3). Рассмотрим группу $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ всех вращений евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^3$ и для каждой пары $v \in \mathbb{R}^3$, $\varphi \in \mathbb{R}$ обозначим через $R_{v,\varphi} \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ поворот вокруг оси, направленной вдоль вектора v, на угол φ по ЧС, если смотреть в направлении v. Покажите, что $FR_{v,\varphi}F^{-1} = R_{Fv,\varphi}$ для всех $F \in \mathrm{SO}_3$, и выведите отсюда, что группа SO_3 проста.

A13◇8 (полупрямые произведения). Пусть группа H действует на группе N посредством гомоморфизма групп $\psi : H \to \mathrm{Aut}\, N$, $h \mapsto \psi_h : N \xrightarrow{\sim} N$. Зададим на декартовом произведении $N \times H$ операцию композиции правилом $(x_1, h_1) \cdot (x_2, h_2) = (x_1\psi_{h_1}(x_2), h_1h_2)$. Проверьте, что:

а) оно задаёт на $N \times H$ структуру группы (она называется *полупрямым произведением* групп N и H по действию ψ и обозначается $N \rtimes_\psi H$)

б) элементы вида (x, e) с $x \in N$ образуют в группе $G = N \rtimes_\psi H$ нормальную подгруппу N', изоморфную N, и фактор $G/N' \simeq H$, а элементы вида (e, h) с $h \in H$ образуют подгруппу H', такую что $N'H' = G$ и $N' \cap H' = \{e\}$.

в) Пусть действие $\varphi : H \to \mathrm{Aut}\, N$, $h \mapsto \varphi_h : N \xrightarrow{\sim} N$ и автоморфизмы $\beta : N \xrightarrow{\sim} N$, $\alpha : H \xrightarrow{\sim} H$ таковы, что $\varphi_h = \beta \circ \psi_{\alpha(h)} \circ \beta^{-1}$ для всех $h \in H$. Покажите, что $N \rtimes_\varphi H \simeq N \rtimes_\psi H$.

A13◇9. Приведите пример двух неизоморфных групп G_1 и G_2 и их нормальных подгрупп $H_1 \lhd G_1$ и $H_2 \lhd G_2$, таких что $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$.

A13◇10. Докажите, что любая подгруппа, индекс которой равен наименьшему простому числу, делящему порядок группы нормальна (в частности, любая подгруппа индекса 2 нормальна, в группе нечётного порядка любая подгруппа индекса 3 нормальна и т. д.).

A13◇11. Опишите все группы порядка pq, где p, q — такие простые, что: **а)** $p = q$ **б)** $p > q = 2$ **в)** $\text{НОД}(p-1, q) = 1$ **г)** $p = 11$, $q = 5$.

A13◇12. Перечислите все группы порядка $\leqslant 15$ с точностью до изоморфизма.

A13◇13. Пусть $\varphi : G_1 \twoheadrightarrow G_2$ — сюрьективный гомоморфизм групп. Покажите, что полный прообраз $N_1 = \varphi^{-1}(N_2)$ любой нормальной подгруппы $N_2 \lhd G_2$ является нормальной подгруппой в G_1 и $G_1/N_1 \simeq G_2/N_2$.

A13◇14. Пусть H — любая, а N — нормальная подгруппы некой группы. Покажите, что $H \cap N \lhd H$, $HN = HN$ является подгруппой, $N \lhd HN$ и $HN/N \simeq H/(H \cap N)$.

A13◇15 (лемма о бабочке). Пусть четыре подгруппы A, B, C, D некой группы таковы, что $A \lhd B$ и $C \lhd D$. Покажите, что $(B \cap D)C/(A \cap D)C \simeq (B \cap D)/(A \cap D)(B \cap C) \simeq A(B \cap D)/A(B \cap C)$.

A13◇16. Приведите пример группы с двумя композиционными рядами, факторы которых нетривиально переставлены друг относительно друга.

A13◇17. Приведите пример двух неизоморфных групп с одинаковыми композиционными факторами Жордана – Гёльдера.